

О.А. Боцюра, І.П. Захаров

**МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ
ОЦІНЮВАННЯ
НЕВИЗНАЧЕНОСТІ
ВИМІРЮВАНЬ**

Навчальний посібник

Харків
2025

УДК 53.088
Б86

Рецензенти:

Скляр В. В., д-р. техн. наук, с.н.с (ННЦ “Інститут метрології”);
Дорожовець М. М., д-р. техн. наук, професор (НУ «Львівська
політехніка»)

*Рекомендовано до друку Вченою Радою
Харківського національного університету радіоелектроніки
(рішення № 13/6 від 31.10.2025 року).*

Боцюра О.А.

Б86 Математичні основи оцінювання невизначеності вимірювань:
навчальний посібник / О. А. Боцюра, І. П. Захаров. – Харків:
ТОВ «Оберіг», 2025. – 136 с.

ISBN 978-966-8689-76-5

DOI 10.30837/978-966-8689-76-5

Розглянуто застосування математичних операцій, які необхідно виконувати під час оцінювання невизначеності вимірювань: отримання статистичних оцінок розсіювання показань індикаційних вимірювальних приладів; розрахунок стандартної інструментальної невизначеності вимірювань повірених та відкаліброваних засобів вимірювальної техніки; правила розрахунку сумарної стандартної та розширеної невизначеності для прямих одноразових та багаторазових вимірювань; техніка розрахунку частинних похідних при отриманні коефіцієнтів чутливості; процедура оцінювання невизначеності непрямих вимірювань з урахуванням кореляції між результатами вимірювань вхідних величин; складання бюджетів невизначеності для всіх видів вимірювань; застосування методу частинних прирощень та методу Монте-Карло для автоматизації оцінювання невизначеності вимірювань. Призначено для студентів, аспірантів та викладачів ВНЗ, а також фахівців у галузі метрології і вимірювальної техніки.

УДК 53.088

© О.А. Боцюра, І. П. Захаров, 2025
© ТОВ «Оберіг», 2025

Перелік умовних позначень та скорочень

ДСТУ – Державний стандарт України;
ЗВТ – засіб вимірювальної техніки;
ІВП – індикаційний вимірювальний прилад;
ММК – метод Монте-Карло;
ФВ – фізична величина;
GUM – Настанова з подання невизначеності вимірювань;
IEC – Міжнародна електротехнічна комісія;
ISO – Міжнародна організація зі стандартизації;
JCGM – Об'єднаний комітет з настанов в метрології;
MPE – максимально допустима похибка;
SI – Міжнародна система одиниць;
VIM – Міжнародний словник з метрології;
 A , B – статистичний і нестатистичний методи оцінювання невизначеності вимірювань;
 d – дискретність відліку ІВП;
 f – модель вимірювання;
 k – коефіцієнт охоплення;
 n – число проведених багаторазових вимірювань;
 N – число входних величин у моделі вимірювання;
 r – коефіцієнт кореляції;
 $t_{0,9545;\nu}$ – коефіцієнт Стюдента для ймовірності 0,9545 і числа степенів свободи ν ;
 U , u – розширена і стандартна невизначеності;
 u_A , u_B – стандартні невизначеності, які оцінені за типом A і B , відповідно;
 $u_c(y)$ – сумарна стандартна невизначеність вимірювань;
 X_i , x_i – i -та входна величина моделі вимірювань, та її значення;
 α – коефіцієнт, що характеризує закон розподілу входної величини;
 θ – границя максимально-допустимої похибки ЗВТ;
 ν , ν_{eff} – число степенів свободи та ефективне число степенів свободи, відповідно.

ВСТУП

Поняття «невизначеність вимірювань» є базовим в сучасній метрологічній практиці. Його поширенню сприяло впровадження стандарту ISO/IEC 17025 «Загальні вимоги до компетентності випробувальних та калібрувальних лабораторій» [1], який законодавчо закріпив необхідність наявності процедур оцінювання невизначеності вимірювань, що проводяться в акредитованих лабораторіях.

Впровадження концепції невизначеності вимірювань потребує проведення відповідної методичної роботи.

В Україні здійснено переклад низки міжнародних стандартів з оцінювання невизначеності вимірювань [2-6], крім того видано декілька навчальних посібників з цієї теми [7,8], в яких наводяться приклади з оцінювання невизначеності, але бракую посібників з практичних занять.

Матеріал посібника складено на підставі багаторічного досвіду викладання та видання навчально-методичної літератури з дисциплін «Теорія невизначеності вимірювань» та «Сучасні методи оцінювання якості вимірювань» на кафедрі інформаційно-вимірювальних технологій ХНУРЕ.

Структуру посібника складають вісім розділів, переліки скорочень, літератури та додатки.

Перший розділ пов'язаний з оцінюванням характеристик розкиду показів індикаційних вимірювальних приладів (ІВП), другий – з оцінювання стандартної інструментальної невизначеності повірених та відкаліброваних засобів вимірювальної техніки (ЗВТ).

Третій та четвертий розділи присвячені оцінюванню невизначеності прямих одноразових та прямих багаторазових вимірювань.

П'ятий розділ направлений на вивчення особливостей визначення коефіцієнтів чутливості та внесків невизначеності.

Шостий розділ розглядає оцінювання невизначеності непрямих некорельованих та корельованих вимірювань.

В сьомому розділі наводяться принципи автоматизації оцінювання невизначеності вимірювань за допомогою програми

Excel, для чого наводиться процедура розрахунку внесків невизначеності за допомогою методу частинних припущень.

В восьмому розділі розглянуто оцінювання невизначеності непрямих вимірювань за допомогою методу Монте-Карло.

До кожного розділу запропоновано тридцять варіантів індивідуальних завдань і наведено приклад їхнього виконання.

Навчальний посібник рекомендований для студентів усіх форм навчання спеціальності G6 «Інформаційно-вимірювальні технології», а також може бути корисним студентам інших спеціальностей під час вивчення навчальних дисциплін, зміст яких пов'язаний з оцінюванням невизначеності вимірювань.

1 ОЦІНЮВАННЯ ХАРАКТЕРИСТИК РОЗСПІВАННЯ ПОКАЗАНЬ ІНДИКУЮЧИХ ВИМІРЮВАЛЬНИХ ПРИЛАДІВ

1.1 Основні теоретичні відомості

Спостережуване розсіювання показань ІВП є джерелом невизначеності вимірювань типу *A*. Якщо при *n*-кратному вимірюванні одного й того ж значення вимірюваної величини *X* показання ІВП $x_1, x_2, \dots, x_n$ хаотично відрізняються один від одного (мають розкид), то їх можна розглядати як реалізації випадкової величини.

Оцінкою характеристики положення повторних показань ІВП є їхнє *середнє арифметичне* $\bar{x}$, що приймається за виміряне значення:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n x_q = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \quad (1.1)$$

Наприклад, показання ваг при трикратному зважування маси тіла людини склали 81 кг, 79 кг і 80 кг. Середнє арифметичне значення цих показань дорівнює:

$$\bar{m} = \frac{81 + 79 + 80}{3} = 80 \text{ кг.}$$

Відхилення окремих показань ІВП $x_1, x_2, \dots, x_n$ від їх середнього значення $\bar{x}$ оцінюється параметром, який називається *вибіркова дисперсія*:

$$D(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{q=1}^n (x_q - \bar{x})^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}. \quad (1.2)$$

Наприклад, для наведених вище показань ваг вибірка дисперсія складе:

$$D(m) = \frac{(81-80)^2 + (79-80)^2 + (80-80)^2}{3-1} = 1 \text{ кг}^2.$$

З наведених вище прикладів видно, що розмірність дисперсії дорівнює квадрату розмірності вимірюваного значення. Для узгодження цих розмірностей із значення вибіркової дисперсії вилучають квадратний корінь і отримують оцінку *середнього квадратичного відхилення* (СКВ) $S(x)$ окремих показань ІВП:

$$S(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{q=1}^n (x_q - \bar{x})^2}. \quad (1.3)$$

Наприклад, для отриманого вище значення вибіркової дисперсії вимірювання маси $D(m)$ СКВ окремих показань складе:

$$S(m) = \sqrt{1 \text{ кг}^2} = 1 \text{ кг}.$$

Оскільки за результат багаторазового вимірювання приймають середнє арифметичне окремих показань ІВП $\bar{x}$, то його характеристикою розкиду служить не вибірка дисперсія результатів окремих спостережень $D(x)$, а *дисперсія їх середнього арифметичного* $D(\bar{x})$:

$$D(\bar{x}) = \frac{D(x)}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{q=1}^n (x_q - \bar{x})^2; \quad (1.4)$$

Наприклад, для отриманого вище значення вибіркової дисперсії показань ваг $D(m)$ дисперсія їх середнього арифметичного $D(\bar{m})$ складе:

$$D(\bar{m}) = \frac{1}{3} = 0,33(3) \text{ кг}^2.$$

З наведеного прикладу видно, що розмірність дисперсії середнього арифметичного дорівнює квадрату розмірності вимірюваного значення. Для узгодження цих розмірностей із значення вибіркової дисперсії середнього арифметичного вилучають квадратний корінь і отримують оцінку *середнього квадратичного відхилення середнього арифметичного* $S(\bar{x})$, яка називається *стандартною невизначеністю типу A* (u_A):

$$S(\bar{x}) = \sqrt{D(\bar{x})} = u_A(\bar{x}) . \quad (1.5)$$

Наприклад, для отриманого вище значення вибіркової дисперсії середнього арифметичного окремих показань ваг стандартна невідомість типу A складе:

$$u_A(\bar{m}) = \sqrt{0,33(3) \text{ кг}^2} = 0,5774 \text{ кг}.$$

Величині $u_A(\bar{x})$ приписують число степенів свободи v_A , яке дорівнює:

$$v_A = n - 1 . \quad (1.6)$$

Наприклад, для отриманого вище значення стандартної невідомості типу A вимірювання маси тіла людини число степенів свободи складає:

$$v_A = 3 - 1 = 2 .$$

1.2 Контрольні завдання

Варіант 1. Для наведених у таблиці результатів багаторазових вимірювань електричної напруги V розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{V}$, вибіркoву дисперсію $D(V)$, стандартне відхилення окремих результатів спостережень $S(V)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{V})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{V})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання				
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
V	10,1 В	10,4 В	10,2 В	10,3 В	10,5 В

Варіант 2. Для наведених у таблтіці результатів багаторазових вимірювань маси m розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{m}$, вибіркoву дисперсію $D(m)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(m)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{m})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{m})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання			
	m_1	m_2	m_3	m_4
m	246 г	248 г	247 г	245 г

Варіант 3. Для наведених у таблиці результатів багаторазових вимірювань часу t розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{t}$, вибіркoву дисперсію $D(t)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(t)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{t})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{t})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання		
	t_1	t_2	t_3
t	4,67 с	4,69 с	4,68 с

Варіант 4. Для наведених у таблиці результатів багаторазових вимірювань сили електричного струму I розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{I}$, вибіркoву дисперсію $D(I)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(I)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{I})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{I})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання			
	I_1	I_2	I_3	I_4
I	0,333 мА	0,334 мА	0,332 мА	0,331 мА

Варіант 5. Для наведених у таблиці результатів багаторазових вимірювань температури T розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{T}$, вибіркoву дисперсію $D(T)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(T)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{T})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{T})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання				
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
T	26,8 °C	26,7 °C	26,9 °C	26,6 °C	26,5 °C

Варіант 6. Для наведених у таблиці результатів багаторазових вимірювань електричного опору R розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{R}$, вибіркoву дисперсію $D(R)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(R)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{R})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{R})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання			
	R_1	R_2	R_3	R_4
R	0,707 кОм	0,706 кОм	0,705 кОм	0,704 кОм

Варіант 7. Для наведених у таблиці результатів багаторазових вимірювань діаметру циліндру d розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{d}$, вибіркoву дисперсію $D(d)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(d)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{d})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{d})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання		
	d_1	d_2	d_3
d	333,5 мм	333,6 мм	333,4 мм

Варіант 8. Для наведених у таблиці результатів багаторазових відтворень об'єму рідини V розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{V}$, вибіркoву дисперсію $D(V)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(V)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{V})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{V})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання			
	V_1	V_2	V_3	V_4
V	41,2 мл	41,3 мл	41,4 мл	41,1 мл

Варіант 9. Для наведених у таблиці результатів багаторазових вимірювань тиску p розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{p}$, вибіркoву дисперсію $D(p)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(p)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{p})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{p})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання				
	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p	0,35 кПа	0,36 кПа	0,34 кПа	0,37 кПа	0,38 кПа

Варіант 10. Для наведених у таблиці результатів багаторазових вимірювань загасання атенуатора A розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{A}$, вибіркoву дисперсію $D(A)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(A)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{A})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{A})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання			
	A_1	A_2	A_3	A_4
A	34,55 дБ	34,56 дБ	34,54 дБ	34,53 дБ

Варіант 11. Для наведених у таблиці результатів багаторазових вимірювань частоти f розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{f}$, вибіркoву дисперсію $D(f)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(f)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{f})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{f})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання		
	f_1	f_2	f_3
f	2156 Гц	2155 Гц	2157 Гц

Варіант 12. Для наведених у табл. 12 результатів багаторазових вимірювань ваги тіла P розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{P}$, вибіркoву дисперсію $D(P)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(P)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{P})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{P})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання			
	P_1	P_2	P_3	P_4
P	3,62 Н	3,63 Н	3,61 Н	3,60 Н

Варіант 13. Для наведених у таблиці результатів багаторазових вимірювань електричної потужності W розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{W}$, вибірккову дисперсію $D(W)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(W)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{W})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{W})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання				
	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
W	110,7 Вт	110,4 Вт	110,6 Вт	110,5 Вт	110,3 Вт

Варіант 14. Для наведених у таблиці результатів багаторазових вимірювань густини поліетилену ρ розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{\rho}$, вибірккову дисперсію $D(\rho)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(\rho)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{\rho})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{\rho})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання			
	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4
ρ	939 г/мм ³	935 г/мм ³	933 г/мм ³	937 г/мм ³

Варіант 15. Для наведених у таблиці результатів багаторазових вимірювань прискорення вільного падіння g розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{g}$, вибірккову дисперсію $D(g)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(g)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{g})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{g})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання		
	g_1	g_2	g_3
g	9,801 м/с ²	9,800 с	9,799 с

Варіант 16. Для наведених у таблиці результатів багаторазових вимірювань площини основи S розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{S}$, вибіркoву дисперсію $D(S)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(S)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{S})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{S})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання			
	S_1	S_2	S_3	S_4
S	0,543 м ²	0,542 м ²	0,540 м ²	0,541 м ²

Варіант 17. Для наведених у таблиці результатів багаторазових вимірювань кута α розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{\alpha}$, вибіркoву дисперсію $D(\alpha)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(\alpha)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{\alpha})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{\alpha})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання				
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
α	0,855 рад	0,857 рад	0,854 рад	0,856 рад	0,853 рад

Варіант 18. Для наведених у таблиці результатів багаторазових вимірювань кутової частоти ω розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{\omega}$, вибіркoву дисперсію $D(\omega)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(\omega)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{\omega})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{\omega})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання			
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
ω	9,12 рад/с	9,14 рад/с	9,10 рад/с	9,16 рад/с

Варіант 19. Для наведених у таблиці результатів багаторазових вимірювань висоти H розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{H}$, вибіркoву дисперсію $D(H)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(H)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{H})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{H})$, число степенів свободи ν_A .

Таблиця 19

Вимірювана величина	Результати вимірювання		
	H_1	H_2	H_3
H	56,7 мм	56,8 мм	56,6 мм

Варіант 20. Для наведених у таблиці результатів багаторазових вимірювань електричного заряду q розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{q}$, вибіркoву дисперсію $D(q)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(q)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{q})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{q})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання			
	q_1	q_2	q_3	q_4
q	0,707 Кл	0,708 Кл	0,709 Кл	0,706 Кл

Варіант 21. Для наведених у таблиці результатів багаторазових вимірювань електричної ємності C розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{C}$, вибіркoву дисперсію $D(C)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(C)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{C})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{C})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання				
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C	0,35 мкФ	0,36 мкФ	0,34 мкФ	0,37 мкФ	0,33 мкФ

Варіант 22. Для наведених у таблиці результатів багаторазових вимірювань магнітної індукції B розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{B}$, вибірккову дисперсію $D(B)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(B)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{B})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{B})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання			
	B_1	B_2	B_3	B_4
B	35,55 Тл	35,56 Тл	35,54 Тл	35,53 Тл

Варіант 23. Для наведених у таблиці результатів багаторазових вимірювань магнітного потоку Φ розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{\Phi}$, вибірккову дисперсію $D(\Phi)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(\Phi)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{\Phi})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{\Phi})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання		
	Φ_1	Φ_2	Φ_3
Φ	2156 Вб	2155 Вб	2157 Вб

Варіант 24. Для наведених у таблиці результатів багаторазових вимірювань індуктивності L розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{L}$, вибірккову дисперсію $D(L)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(L)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{L})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{L})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання			
	L_1	L_2	L_3	L_3
L	3,62 мГн	3,63 мГн	3,61 мГн	3,60 мГн

Варіант 25. Для наведених у таблиці результатів багаторазових вимірювань освітленості E розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{E}$, вибіркoву дисперсію $D(E)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(E)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{E})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{E})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання				
	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
E	10,1 лк	10,4 лк	10,2 лк	10,3 лк	10,5 лк

Варіант 26. Для наведених у таблиці результатів багаторазових вимірювань молярної маси M розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{M}$, вибіркoву дисперсію $D(M)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(M)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{M})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{M})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання			
	M_1	M_1	M_1	M_1
M	246 г/моль	248 г/моль	247 г/моль	245 г/моль

Варіант 27. Для наведених у таблиці результатів багаторазових вимірювань коефіцієнта пружності k розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{k}$, вибіркoву дисперсію $D(k)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(k)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{k})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{k})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання		
	k_1	k_2	k_3
k	4,67 Н/м	4,69 Н/м	4,68 Н/м

Варіант 28. Для наведених у таблиці результатів багаторазових вимірювань сили світла J розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{J}$, вибіркoву дисперсію $D(J)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(J)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{J})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{J})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання			
	J_1	J_2	J_3	J_4
J	0,333 кД	0,335 кД	0,337 кД	0,331 кД

Варіант 29. Для наведених у таблиці результатів багаторазових вимірювань енергії Q розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{Q}$, вибіркoву дисперсію $D(Q)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(Q)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{Q})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{Q})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання				
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5
Q	26,7 Дж	26,4 Дж	26,6 Дж	26,3 Дж	26,5 Дж

Варіант 30. Для наведених у таблиці результатів багаторазових вимірювань довжини хвилі λ розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{\lambda}$, вибіркoву дисперсію $D(\lambda)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(\lambda)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{\lambda})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{\lambda})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання			
	λ_1	λ_1	λ_1	λ_1
λ	0,505 мкм	0,503 мкм	0,501 мкм	0,507 мкм

1.3 Приклад виконання контрольного завдання

Завдання: для наведених у таблиці результатів багатократних спостережень $L_1, L_2, \dots, L_n$ довжини стрижня L розрахуйте з урахуванням розмірностей наступні характеристики: середнє арифметичне $\bar{L}$, вибірккову дисперсію $D(L)$, СКВ окремих результатів спостережень $S(L)$, дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{L})$, стандартну невизначеність типу A $u_A(\bar{L})$, число степенів свободи ν_A .

Вимірювана величина	Результати вимірювання				
	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
L	0,444 м	0,445 м	0,446 м	0,445 м	0,444 м

1.3.1 Розрахуємо середнє арифметичне результатів вимірювань за формулою (1.1):

$$\bar{L} = \frac{0,444 + 0,445 + 0,446 + 0,445 + 0,444}{5} = 0,4448 \text{ м.}$$

1.3.2 Розрахуємо вибірккову дисперсію результатів спостережень за формулою (1.2):

$$\begin{aligned} D(L) &= \frac{(0,444 - 0,4448)^2 + (0,445 - 0,4448)^2 + (0,446 - 0,4448)^2 + (0,445 - 0,4448)^2 + (0,444 - 0,4448)^2}{5-1} = \\ &= \frac{(-0,0008)^2 + (0,0002)^2 + (0,0012)^2 + (0,0002)^2 + (-0,0008)^2}{4} = \\ &= \frac{6,4 \cdot 10^{-7} + 0,4 \cdot 10^{-7} + 14,4 \cdot 10^{-7} + 0,4 \cdot 10^{-7} + 6,4 \cdot 10^{-7}}{4} = \frac{28 \cdot 10^{-7}}{4} = 7 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2. \end{aligned}$$

1.3.3 Розрахуємо СКВ окремих результатів спостережень (1.3):

$$S(L) = \sqrt{D(L)} = \sqrt{7 \cdot 10^{-7}} = 0,00083666 \text{ м.}$$

1.3.4 Розрахуємо дисперсію середнього арифметичного (1.4):

$$D(\bar{L}) = \frac{D(L)}{5} = \frac{0,7 \cdot 10^{-7}}{5} = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2.$$

1.3.5 Розрахуємо стандартну невизначеність типу A (1.5):

$$u_A(\bar{L}) = \sqrt{D(\bar{L})} = \sqrt{1,4 \cdot 10^{-7}} = 0,000374166 \text{ м.}$$

1.3.6 Розрахуємо число степенів свободи за формулою (1.6):

$$\nu = n - 1 = 5 - 1 = 4.$$

2 ОЦІНЮВАННЯ ІНСТРУМЕНТАЛЬНОЇ СТАНДАРТНОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

2.1 Основні теоретичні відомості

Інструментальна невизначеність – складова невизначеності вимірювань типу *B*, яка обумовлена використанням ЗВТ [9]. Інформація, що стосується інструментальної невизначеності, може бути наведена у специфікації ЗВТ. Необхідно розрізняти оцінювання невизначеності для повірених і каліброваних ЗВТ.

2.1.1 Оцінювання стандартної інструментальної невизначеності повірених ЗВТ

Для повірених ЗВТ оцінювання стандартної інструментальної невизначеності типу *B* проводиться відповідно до табл. 2.1. У таблиці застосовані відомі формули, що зв'язують границі відносної δ та зведених γ і λ похибок, через які виражається клас точності ЗВТ, з границями максимально-допустимої абсолютної похибки θ [7] в припущенні її рівномірного розподілу всередині границь.

Таблиця 2.1

Формули для розрахунку стандартної інструментальної невизначеності

Приклад позначення класу точності	Вид та позначення нормованої похибки	Формула для розрахунку стандартної невизначеності типу
1,0	Зведена, γ	$u_B = \gamma \frac{X_{\text{макс}}}{\sqrt{3} \cdot 100} \quad (2.1)$
①,0	Відносна, δ	$u_B = \delta \frac{X_{\text{вим}}}{\sqrt{3} \cdot 100} \quad (2.2)$
1,0 ↙ ↘	Зведена до довжини нерівномірної шкали, λ	$u_B = \lambda \frac{(X_{\text{сеп}} + X_{\text{вим}})^2}{X_{\text{сеп}} \sqrt{3} \cdot 100} \quad (2.3)$
2,0/0,1	Відносна, c/d	$u_B = \left[c + d \left(\left \frac{X_{\text{макс}}}{X_{\text{вим}}} \right - 1 \right) \right] \frac{X_{\text{вим}}}{\sqrt{3} \cdot 100} \quad (2.4)$

В таблиці використані позначення: $X_{\text{вим}}$ – виміряне значення (показання ЗВТ), $X_{\text{макс}}$ – максимальне значення вимірюваної величини; $X_{\text{сер}}$ – значення вимірюваної величини, що відповідає геометричній середині істотно нерівномірної шкали.

Приклад 1.

Оцінити стандартну невизначеність типу B вимірювання опору на діапазоні 100 кОм мегомметром Е6-17.

На вказаному діапазоні клас точності приладу позначений як 1,5. Скориставшись формулою (2.1) табл. 2.1, отримуємо:

$$u_B = \gamma \frac{X_{\text{макс}}}{\sqrt{3} \cdot 100} = 1,5 \cdot \frac{100}{\sqrt{3} \cdot 100} = 0,87 \text{ кОм}.$$

Слід зазначити, що при такому поданні класу точності невизначеність типу B *не залежить від значення вимірюваної величини*.

Приклад 2.

Необхідно оцінити стандартну невизначеність типу B вимірювання опору омметром М371.

Показання приладу 5 Ом. Клас точності приладу позначений як (1,5). Скориставшись формулою (2.2) табл. 2.1, отримуємо:

$$u_B = \delta \frac{X_{\text{вим}}}{\sqrt{3} \cdot 100} = 1,5 \cdot \frac{5}{\sqrt{3} \cdot 100} = 0,043 \text{ Ом}.$$

Приклад 3.

Необхідно оцінити стандартну невизначеність типу B вимірювання опору на діапазоні 10 МОм мегомметром Е6-17.

На вказаному діапазоні клас точності приладу позначений як ~~2,5~~. Геометрична середина шкали на цьому діапазоні становить 20 МОм. Показання приладу 36 МОм. Скориставшись формулою (2.3) табл. 2.1, отримуємо:

$$u_B = \lambda \frac{(X_{\text{сер}} + X_{\text{вим}})^2}{X_{\text{сер}} \sqrt{3} \cdot 100\%} = 2,5 \cdot \frac{(20 + 36)^2}{20 \sqrt{3} \cdot 100} = 2,3 \text{ МОм}.$$

Приклад 4.

Необхідно оцінити стандартну невизначеність типу B відтворення опору магазином Р4831.

Встановлене значення опору на магазині 79,6 кОм. Максимальне значення опору становить 111111,11 Ом. Клас точності магазину $0,02/2 \cdot 10^{-6}$. Скориставшись формулою (2.4) табл.2.1, отримуємо:

$$u_B = \left[c + d \left(\left| \frac{X_{\text{макс}}}{X_{\text{вим}}} \right| - 1 \right) \right] \frac{X_{\text{вим}}}{\sqrt{3} \cdot 100} = \left[0,02 + 2 \cdot 10^{-6} \left(\frac{111111,11}{79600} - 1 \right) \right] \frac{79600}{\sqrt{3} \cdot 100} = 9,2 \text{ Ом.}$$

2.1.2 Оцінювання стандартної інструментальної невизначеності каліброваних ЗВТ

Для каліброваних ЗВТ стандартна невизначеність розраховується з даних про розширену невизначеність U і коефіцієнт охоплення k , що взяті зі свідоцтва про калібрування, за формулою:

$$u_B = \frac{U}{k}. \quad (2.5)$$

Приклад 5.

Оцінити стандартну невизначеність типу B відтворення опору котушкою Р321.

У сертифікаті про калібрування зазначено, що значенню опору приписана розширена невизначеність 1 мОм з коефіцієнтом охоплення $k = 2$ для рівня довіри, який приблизно дорівнює 0,95. Використовуючи формулу (2.5), отримуємо стандартну невизначеність типу B :

$$u_B = \frac{1 \text{ мОм}}{2} = 0,5 \text{ мОм.}$$

2.2 Контрольні завдання

Варіант 1. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу *B*.

№ 1	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
1.1	0,5	—	—	160	500	250
1.2	0,2	—	—	160	500	250
1.3	0,5	—	—	160	500	250
1.4	0,1/0,01	—	—	160	500	250
1.5	—	0,16	2,1	160	500	250

Варіант 2. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу *B*.

№ 2	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
2.1	0,2	—	—	31,5	100	50
2.2	0,1	—	—	31,5	100	50
2.3	0,2	—	—	31,5	100	50
2.4	0,05/0,01	—	—	31,5	100	50
2.5	—	1,2	1,9	31,5	100	50

Варіант 3. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу *B*.

№ 3	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
3.1	0,1	—	—	1,12	10	3
3.2	0,02	—	—	1,12	10	3
3.3	0,1	—	—	1,12	10	3
3.4	0,2/0,05	—	—	1,12	10	3
3.5	—	0,1	2,3	1,12	10	3

Варіант 4. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандар-

ртні інструментальні невизначеності типу *B*.

№ 4	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
4.1	1,0	—	—	65	100	50
4.2	0,05	—	—	65	100	50
4.3	0,04	—	—	65	100	50
4.4	0,1/0,05	—	—	65	100	50
4.5	—	0,22	1,8	65	100	50

Варіант 5. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу *B*.

№ 5	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
5.1	0,05	—	—	10,7	100	70
5.2	0,1	—	—	10,7	100	70
5.3	0,02	—	—	10,7	100	70
5.4	0,05/0,01	—	—	10,7	100	70
5.5	—	0,56	2,2	10,7	100	70

Варіант 6. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу *B*.

№ 6	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
6.1	1,5	—	—	3,62	10	2,5
6.2	0,15	—	—	3,62	10	2,5
6.3	1,0	—	—	3,62	10	2,5
6.4	0,2/0,05	—	—	3,62	10	2,5
6.5	—	1,2	1,7	3,62	10	2,5

Варіант 7. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандар-

ртні інструментальні невизначеності типу В.

№ 7	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
7.1	0,2	—	—	42,3	100	50
7.2	(0,2)	—	—	42,3	100	50
7.3	0,1	—	—	42,3	100	50
7.4	0,02/0,01	—	—	42,3	100	50
7.5	—	1,2	2,1	42,3	100	50

Варіант 8. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу В.

№ 8	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
8.1	0,04	—	—	0,67	1,0	0,3
8.2	(1,0)	—	—	0,67	1,0	0,3
8.3	0,2	—	—	0,67	1,0	0,3
8.4	0,15/0,1	—	—	0,67	1,0	0,3
8.5	—	0,26	2,0	0,67	1,0	0,3

Варіант 9. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу В.

№ 9	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
9.1	0,05	—	—	433	1000	350
9.2	(0,5)	—	—	433	1000	350
9.3	0,01	—	—	433	1000	350
9.4	0,05/0,02	—	—	433	1000	350
9.5	—	1,12	2,2	433	1000	350

Варіант 10. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу *B*.

№ 10	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сеп}}$
10.1	0,05	—	—	73,1	100	43
10.2	0,2	—	—	73,1	100	43
10.3	0,02	—	—	73,1	100	43
10.4	0,02/0,01	—	—	73,1	100	43
10.5	—	1,6	2,1	73,1	100	43

Варіант 11. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу *B*.

№ 11	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сеп}}$
11.1	2,5	—	—	8,12	10	6
11.2	0,25	—	—	8,12	10	6
11.3	0,15	—	—	8,12	10	6
11.4	1,5/0,2	—	—	8,12	10	6
11.5	—	2,1	1,9	8,12	10	6

Варіант 12. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу *B*.

№ 12	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сеп}}$
12.1	0,3	—	—	57	100	80
12.2	1,5	—	—	57	100	80
12.3	1,5	—	—	57	100	80
12.4	0,5/0,02	—	—	57	100	80
12.5	—	3,6	1,7	57	100	80

Варіант 13. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу *B*.

№ 13	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
13.1	0,1	—	—	150	400	250
13.2	0,05	—	—	150	400	250
13.3	0,02	—	—	150	400	250
13.4	0,05/0,01	—	—	150	400	250
13.5	—	2,4	1,9	150	400	250

Варіант 14. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу *B*.

№ 14	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
13.1	0,15	—	—	35,6	90	50
14.2	(1,5)	—	—	35,6	90	50
14.3	0,02	—	—	35,6	90	50
14.4	0,2/0,05	—	—	35,6	90	50
14.5	—	0,46	2,2	35,6	90	50

Варіант 15. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу *B*.

№ 15	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
15.1	0,2	—	—	2,24	10	5
15.2	(0,2)	—	—	2,24	10	5
15.3	0,1	—	—	2,24	10	5
15.4	0,02/0,01	—	—	2,24	10	5
15.5	—	0,061	2,5	2,24	10	5

Варіант 16. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу *B*.

№ 16	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
16.1	1	—	—	57	100	50
16.2	0,04	—	—	57	100	50
16.3	0,2	—	—	57	100	50
16.4	0,15/0,1	—	—	57	100	50
16.5	—	0,11	1,4	57	100	50

Варіант 17. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу *B*.

№ 17	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
17.1	0,5	—	—	9,4	100	60
17.2	0,04	—	—	9,4	100	60
17.3	0,01	—	—	9,4	100	60
17.4	0,05/0,02	—	—	9,4	100	60
17.5	—	0,021	2,4	9,4	100	60

Варіант 18. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу *B*.

№ 18	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
18.1	0,2	—	—	2,51	10	2
18.2	0,05	—	—	2,51	10	2
18.3	0,02	—	—	2,51	10	2
18.4	0,02/0,01	—	—	2,51	10	2
18.5	—	1,5	2,0	2,51	10	2

Варіант 19. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу *B*.

№ 19	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
19.1	0,5	—	—	41,1	100	50
19.2	(0,2)	—	—	41,1	100	50
19.3	0,5	—	—	41,1	100	50
19.4	0,1/0,01	—	—	41,1	100	50
19.5	—	0,5	1,8	41,1	100	50

Варіант 20. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу *B*.

№ 20	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
20.1	0,1	—	—	0,58	1	0,5
20.2	(0,2)	—	—	0,58	1	0,5
20.3	0,2	—	—	0,58	1	0,5
20.4	0,05/0,01	—	—	0,58	1	0,5
20.5	—	2,2	2,3	0,58	1	0,5

Варіант 21. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу *B*.

№ 21	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
21.1	0,02	—	—	344	1000	400
21.2	(0,1)	—	—	344	1000	400
21.3	0,1	—	—	344	1000	400
21.4	0,2/0,05	—	—	344	1000	400
21.5	—	0,81	2,12	344	1000	400

Варіант 22. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу *B*.

№ 22	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
22.1	0,05	—	—	64,2	120	40
22.2	(1)	—	—	64,2	120	40
22.3	0,04	—	—	64,2	120	40
22.4	0,1/0,05	—	—	64,2	120	40
22.5	—	0,021	1,65	64,2	120	40

Варіант 23. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу *B*.

№ 23	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
23.1	0,1	—	—	9,24	100	40
23.2	(0,05)	—	—	9,24	100	40
23.3	0,02	—	—	9,24	100	40
23.4	0,2/0,05	—	—	9,24	100	40
23.5	—	0,71	1,96	9,24	100	40

Варіант 24. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу *B*.

№ 24	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
24.1	0,15	—	—	62	150	100
24.2	(1,5)	—	—	62	150	100
24.3	1	—	—	62	150	100
24.4	0,2/0,05	—	—	62	150	100
24.5	—	0,065	2,3	62	150	100

Варіант 25. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу *B*.

№ 25	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
25.1	0,02	—	—	175	500	250
25.2	0,1	—	—	175	500	250
25.3	0,1	—	—	175	500	250
25.4	0,2/0,01	—	—	175	500	250
25.5	—	0,032	2,2	175	500	250

Варіант 26. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу *B*.

№ 26	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
26.1	0,05	—	—	0,91	1,2	0,4
26.2	1	—	—	0,91	1,2	0,4
26.3	0,04	—	—	0,91	1,2	0,4
26.4	0,1/0,05	—	—	0,91	1,2	0,4
26.5	—	0,16	1,8	0,91	1,2	0,4

Варіант 27. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу *B*.

№ 27	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
27.1	0,1	—	—	3,64	15	5
27.2	0,05	—	—	3,64	15	5
27.3	0,02	—	—	3,64	15	5
27.4	0,05/0,01	—	—	3,64	15	5
27.5	—	0,26	1,9	3,64	15	5

Варіант 28. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу *B*.

№ 28	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
28.1	1,5	—	—	0,67	1,0	0,5
28.2	0,15	—	—	0,67	1,0	0,5
28.3	1	—	—	0,67	1,0	0,5
28.4	0,2/0,05	—	—	0,67	1,0	0,5
28.5	—	0,47	2,2	0,67	1,0	0,5

Варіант 29. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу *B*.

№ 29	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
29.1	0,25	—	—	7,11	12	07
29.2	2,5	—	—	7,11	12	07
29.3	0,15	—	—	7,11	12	07
29.4	0,5/0,02	—	—	7,11	12	07
29.5	—	1,7	2,3	7,11	12	07

Варіант 30. За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу *B*.

№ 30	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
30.1	1,5	—	—	6,1	120	90
30.2	0,3	—	—	6,1	120	90
30.3	1,5	—	—	6,1	120	90
30.4	0,5/0,02	—	—	6,1	120	90
30.5	—	2,2	1,7	6,1	120	90

2.3 Приклад виконання контрольного завдання

За даними, наведеними у таблиці, розрахуйте стандартні інструментальні невизначеності типу B .

№ П	Вихідні параметри					
	Клас точності	U	k	$X_{\text{вим}}$	$X_{\text{макс}}$	$X_{\text{сер}}$
П.1	1,5	—	—	10	100	25
П.2	1,5	—	—	10	100	25
П.3	1,5	—	—	10	100	25
П.4	1,5/0,5	—	—	10	100	25
П.5	—	2	1,7	10	100	25

2.3.1 Для даних П.1 розрахуємо стандартну інструментальну невизначеність типу B за формулою (2.1):

$$u_B = \gamma \frac{X_{\text{макс}}}{\sqrt{3} \cdot 100} = 1,5 \cdot \frac{100}{\sqrt{3} \cdot 100} = 0,866.$$

2.3.2 Для даних П.2 розрахуємо стандартну інструментальну невизначеність типу B за формулою (2.2):

$$u_B = \delta \frac{X_{\text{вим}}}{\sqrt{3} \cdot 100} = 1,5 \cdot \frac{10}{\sqrt{3} \cdot 100} = 0,0866.$$

2.3.3 Для даних П.3 розрахуємо стандартну інструментальну невизначеність типу B за формулою (2.3):

$$u_B = \lambda \frac{(X_{\text{сер}} + X_{\text{вим}})^2}{X_{\text{сер}} \sqrt{3} \cdot 100} = 1,5 \cdot \frac{(25 + 10)^2}{25 \cdot \sqrt{3} \cdot 100} = 0,424.$$

2.3.4 Для даних П.4 розрахуємо стандартну інструментальну невизначеність типу B за формулою (2.4):

$$u_B = \left[c + d \left(\left| \frac{X_{\text{макс}}}{X_{\text{вим}}} \right| - 1 \right) \right] \frac{X_{\text{вим}}}{\sqrt{3} \cdot 100} = \left[1,5 + 0,5 \left(\left| \frac{100}{10} \right| - 1 \right) \right] \frac{10}{\sqrt{3} \cdot 100} = 0,346.$$

2.3.5 Для даних П.5 розрахуємо стандартну інструментальну невизначеність типу B за формулою (2.5):

$$u_B = \frac{U}{k} = \frac{2}{1,7} = 1,18.$$

3 ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ПРЯМИХ ОДНОРАЗОВИХ ВИМІРЮВАНЬ

3.1 Основні теоретичні відомості

Пряме вимірювання (direct measurement) – вимірювання, при якому шукане значення величини отримують безпосередньо від засобу вимірювань [9]. Прямі вимірювання – найбільш поширений і простий вид вимірювань. Ці вимірювання є складовим елементом непрямих, сумісних і сукупних вимірювань. Прямі вимірювання можна проводити шляхом одноразових і багаторазових спостережень. Найбільш поширеними на практиці є вимірювання з одноразовими спостереженнями (одноразові вимірювання), як найбільш прості, продуктивні і дешеві.

Виконання одноразових вимірювань обґрунтовують наступними факторами:

- виробничою необхідністю (руйнування зразка, неможливість повторення вимірювання, економічна доцільність і т.д.);
- можливістю нехтування випадковими похибками;
- випадкові похибки істотні, але довірча границя похибки результату вимірювання не перевищує допустимої похибки вимірювань.

За числове значення результату одноразового вимірювання приймають значення величини, отримане при вимірюванні.

Оцінювання невизначеності прямих одноразових вимірювань відбувається відповідно до базового алгоритмом GUM (пп. 3.2.3) [3].

1. Модельне рівняння для прямого вимірювання:

$$X = X_{ind} + \sum_{i=1}^N \Delta_i, \quad (3.1)$$

де X – вимірювана величина; X_{ind} – вхідна величина, що безпосередньо спостерігається на індикаторі ІВП; Δ_i – поправка на i -у складову додаткової похибки вимірювання.

2. Оцінювання вхідних величин:

За числове значення вхідної величини X_{ind} , що безпосередньо спостерігається приймають значення величини, яке отримане при одноразовому вимірюванні x_{ind} :

$$\hat{X}_{ind} = x_{ind}.$$

Припускають, що поправки на всі відомі систематичні похибки внесені, тому всі поправки на додаткові похибки, що входять в рівняння (3.1), тобто значення всіх складових Δ_i вважаємо рівними нулю:

$$\hat{\Delta}_i = 0.$$

3. Обчислення числового значення результату вимірювання.

За числове значення результату одноразового вимірювання x приймають значення величини, отримане при вимірюванні x_{ind} :

$$x = x_{ind}.$$

4. Оцінювання стандартних невизначеностей вхідних величин.

Всі стандартні невизначеності прямого одноразового вимірювання оцінюються за типом B . Стандартна невизначеність вхідної величини, що безпосередньо спостерігається буде визначатися:

а) для відкаліброваних ЗВТ – виходячи з розширеної невизначеності U_X і коефіцієнта охоплення k_X , які взяті з їх сертифікату калібрування, за формулою:

$$u_B(x_{ind}) = \frac{U_X}{k_X}. \quad (3.2)$$

При цьому число степенів свободи, яке приписують цій невизначеності дорівнюватиме:

$$v_B(x_{ind}) = \begin{cases} \infty, & \text{при } k_X \leq 2; \\ v_t, & \text{при } k_X > 2, \end{cases} \quad (3.3)$$

де v_t – число степенів свободи для коефіцієнта Стюдента t , який дорівнює значенню коефіцієнта охоплення k_X для тієї ж ймовірності ($k_X = t$) (див. Додаток 2).

б) для повірених ІВП – виходячи з границь максимально допустимої похибки θ_X за формулою:

$$u_B(x_{ind}) = \frac{\theta_X}{\alpha_X}, \quad (3.4)$$

де α_x – коефіцієнт, що відповідає закону розподілу основної похибки ЗВТ. Зазвичай у припущенні рівномірного закону розподілу основної похибки ЗВТ приймають $\alpha_x = \sqrt{3}$. При цьому число степенів свободи, яке приписують цій невизначеності $v_B(x_{ind}) = \infty$.

Додатковими похибками прямого одноразового вимірювання є похибки повторюваності, методу, оператора, а також похибки, зумовлені зміною умов вимірювання.

Якщо поправки на додаткові похибки представлені границями θ_i , то, в залежності від закону розподілу цих похибок всередині границь, пов'язані з ними стандартні невизначеності обчислюють за формулою:

$$u_B(\Delta_i) = \frac{\theta_i}{\alpha_i}, \quad (3.5)$$

де α_i – коефіцієнт, що відповідає закону розподілу Δ_i . При цьому число степенів свободи, яке приписують цим невизначеностям $v_B(\Delta_i) = \infty$.

Якщо поправки на додаткові похибки представлені СКВ S_i , то пов'язані з ними стандартні невизначеності приймають рівними цим СКВ:

$$u_B(\Delta_i) = S_i. \quad (3.6)$$

При цьому число степенів свободи, яке приписують цим невизначеностям, визначається через кількість вимірювань n_i , за допомогою яких визначалися ці СКВ на етапі складання методики виконання вимірювань:

$$v_B(\Delta_i) = n_i - 1. \quad (3.7)$$

Наприклад, СКВ повторюваності вимірюваної величини визначають на етапі розробки методики виконання вимірювань за формулою:

$$S(\Delta_r) = \sqrt{\frac{1}{n_r - 1} \sum_{q=1}^{n_r} (x_q - \bar{x})^2}, \quad (3.8)$$

де n_r – число повторних вимірювань, які проводили на етапі розробки методики.

Ця СКВ дорівнює відповідній стандартній невизначеності типу B :

$$u_B(\Delta_r) = S(\Delta_r). \quad (3.9)$$

При цьому число степенів свободи, яке приписують цій невизначеності, дорівнюватиме $\nu_B(\Delta_r) = n_r - 1$.

5. Обчислення сумарної стандартної невизначеності.

Оскільки модельне рівняння (3.1) є сумою вхідних некорельованих величин, то сумарна невизначеність вимірюваної величини (сумарна стандартна невизначеність) буде дорівнювати:

$$u_c(x) = \sqrt{u_B^2(x_{ind}) + \sum_{i=1}^N u_B^2(\Delta_i)}. \quad (3.10)$$

6. Обчислення розширеної невизначеності проводиться за формулою:

$$U = k u_c(x), \quad (3.11)$$

де k – коефіцієнт охоплення.

Якщо сумарна невизначеність вхідних величин з числом степенів свободи відмінним від нескінченності (вхідної величини, що безпосередньо спостерігається, і повторюваності) значна, то коефіцієнт охоплення k розраховують як коефіцієнт Стюдента (Додаток 3) для ймовірності 0,9545 і ефективного числа степенів свободи ν_{eff} , що обчислюється за формулою Велча-Саттерсвейта:

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(x)}{\frac{u_B^4(x_{ind})}{\nu_B(x_{ind})} + \frac{u_B^4(\Delta_r)}{n-1}}. \quad (3.12)$$

7. Бюджет невизначеності представлений в табл. 3.1 [7,8].

8. Запис повного результату вимірювання.

Повний результат вимірювання включає в себе значення вимірюваної величини і приписане їй значення розширеної невизначеності із зазначенням рівня довіри:

$$X = x \pm U(x), p = 0,9545. \quad (3.13)$$

Таблиця 3.1

Бюджет невизначеності прямих одноразових вимірювань

Вхідна величина	Значення вхідної величини	Стандартна невизначеність вхідної величини	Число степенів свободи	Коефіцієнт чутливості	Внесок невизначеності
X_{ind}	x_{ind}	$u_B(x_{ind})$	$v_B(x_{ind})$	1	$u_B(x_{ind})$
Δ_1	0	$u(\Delta_1)$	$v_B(\Delta_1)$		$u(\Delta_1)$
...	...	...	...	...	...
Δ_N	0	$u(\Delta_N)$	$v_B(\Delta_N)$	1	$u(\Delta_N)$
Вимірювана величина	Значення вимірюваної величини	Сумарна стандартна невизначеність	Ефективне число степенів свободи	Коефіцієнт охоплення	Розширена невизначеність
X	x_{ind}	(3.10)	(3.12)	k	(3.11)

При запису повного результату вимірювання слід дотримуватися таких правил округлення:

1. Числове значення розширеної невизначеності вказується не більше ніж з двома значущими цифрами.

2. Числове значення вимірюваної величини має закінчуватися десятковим знаком того ж розряду, що і округлена розширена невизначеність.

3. Якщо цифра старшого з розрядів, що відкидаються, у числовому значенні вимірюваної величини або розширеної невизначеності менше 5, то цифри числа, що залишаються, не змінюють, якщо цифра старшого розряду більша або дорівнює 5, то останню залишкову цифру збільшують на одиницю.

4. При округленні розширеної невизначеності його значення слід вказувати із округленням у бік збільшення, якщо при округленні воно зменшується більш ніж на 5%. Слід зазначити, що останнє правило працює тільки при прямих одноразових вимірюваннях при округленні значення розширеної невизначеності до однієї значущої цифри так, як зазначено в Додатку 4.

3.2 Контрольні завдання

Варіант 1. За результатом одноразового вимірювання електричної напруги V та наведеними в таблиці характеристиками інструментальної невизначеності вольтметра, U_V , k_V та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апріорно за n_r результатами вимірювань, оцініть наступні параметри: $\hat{V}$, $u_B(\hat{V})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{V})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювань електричної напруги	U_V	k_V	S_r	n_r
10,1 В	0,24 В	2,2	0,1 В	10

Варіант 2. За результатом одноразового вимірювання електричного опору R та наведеними в таблиці границею максимально допустимої похибки θ_R омметра та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апріорно за n_r результатами вимірювань, оцініть наступні параметри: $\hat{R}$, $u_B(\hat{R})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{R})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювання електричного опору	θ_R	S_r	n_r
246 Ом	1,2 Ом	1,9 Ом	5

Варіант 3. За результатом одноразового вимірювання сили електричного струму I та наведеними в таблиці характеристиками інструментальної невизначеності амперметра U_I , k_I та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апріорно за n_r результатами вимірювань, оцініть наступні параметри: $\hat{I}$, $u_B(\hat{I})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{I})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювань сили електричного струму	U_I	k_I	S_r	n_r
135,5 мА	0,2 мА	2,4	0,1 мА	5

Варіант 4. За результатом одноразового вимірювання маси m , та наведеними в таблиці границею максимально допустимої похибки θ_m ваг та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апіорно за n_r результатами вимірювань оцініть наступні параметри: $\hat{m}$, $u_B(\hat{m})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{m})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювання маси	θ_m	S_r	n_r
27,05 г	0,05 г	0,02 г	10

Варіант 5. За результатом одноразового вимірювань часу t та наведеними в таблиці характеристиками інструментальної невизначеності секундоміра U_t , k_t та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апіорно за n_r результатами вимірювань оцініть наступні параметри: $\hat{t}$, $u_B(\hat{t})$, $u_B(\Delta_r)$, $u_c(\hat{t})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювань часу	U_t	k_t	S_r	n_r
24,6 с	0,2 с	2,3	0,1 с	7

Варіант 6. За результатом одноразових вимірювань температури T та наведеними в таблиці границею максимально допустимої похибки θ_T термометра та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апіорно за n_r результатами вимірювань оцініть наступні параметри: $\hat{T}$, $u_B(\hat{T})$, $u_B(\Delta_r)$, $u_c(\hat{T})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювань температури	θ_T	S_r	n_r
146 К	1,9 К	1,2 К	5

Варіант 7. За результатом одноразового вимірювання частоти f та наведеними в таблиці характеристиками інструментальної невизначеності частотоміра, U_f , k_f та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апріорно за n_r результатами вимірювань, оцініть наступні параметри: $\hat{f}$, $u_B(\hat{f})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{f})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювань частоти	U_f	k_f	S_r	n_r
2156 Гц	1,1 Гц	2,2	0,7 Гц	5

Варіант 8. За результатом одноразового відтворення об'єму рідини V , та наведеними в таблиці границею максимально допустимої похибки θ_V мірного стакану та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апріорно за n_r результатами вимірювань, оцініть наступні параметри: $\hat{V}$, $u_B(\hat{V})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{V})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат відтворення об'єму рідини	θ_V	S_r	n_r
100,0 мл	0,2 мл	0,1 мл	10

Варіант 9. За результатами одноразового вимірювання густини рідини ρ та наведеними в таблиці характеристиками інструментальної невизначеності ареометра U_ρ , k_ρ та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апріорно за n_r результатами вимірювань, оцініть наступні параметри: $\hat{\rho}$, $u_B(\hat{\rho})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{\rho})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювань густини	U_ρ	k_ρ	S_r	n_r
815 кг/м ³	0,9 кг/м ³	1,9	0,5 кг/м ³	5

Варіант 10. За результатом одноразового вимірювання сили світла J та наведеними в таблиці границею максимально допустимої похибки θ_J люксметра та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апіорно за n_r результатами вимірювань, оцініть наступні параметри: $\hat{J}$, $u_B(\hat{J})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{J})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результати вимірювання сили світла	θ_J	S_r	n_r
27,05 кд	0,03 кд	0,02 кд	10

Варіант 11. За результатом одноразового вимірювання індуктивності L та наведеними в таблиці значеннями інструментальної невизначеності вимірювача індуктивності U_L , k_L та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апіорно за n_r результатами вимірювань, оцініть наступні параметри: $\hat{L}$, $u_B(\hat{L})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{L})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювань індуктивності	U_L	k_L	S_r	n_r
3,62 мГн	0,9 мГн	1,9	0,5 мГн	5

Варіант 12. За результатом одноразового вимірювання магнітного потоку Φ та наведеними в таблиці границею максимально допустимої похибки θ_Φ веберметра, та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апіорно за n_r результатами вимірювань оцініть наступні параметри: $\hat{\Phi}$, $u_B(\hat{\Phi})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{\Phi})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювання магнітного потоку, Вб	θ_Φ	S_r	n_r
2156	0,03	0,02	10

Варіант 13. За результатом одноразового вимірювання діаметра циліндра d та наведеними в таблиці характеристиками інструментальної невизначеності штангенциркуля, U_d , k_d та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апріорно за n_r результатами вимірювань, оцініть наступні параметри: $\hat{d}$, $u_B(\hat{d})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{d})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювань діаметра циліндра, мм	U_d , мм	k_d	S_r , мм	n_r
33,35 мм	0,02	2,0	0,01	10

Варіант 14. За результатами одноразового вимірювання тиску p та наведеними в таблиці границею максимально допустимої похибки θ_p манометра та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апріорно за n_r результатами вимірювань, оцініть наступні параметри: $\hat{p}$, $u_B(\hat{p})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{p})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювання тиску	θ_p	S_r	n_r
0,35 кПа	0,012 кПа	0,019 кПа	5

Варіант 15. За результатами одноразового вимірювання загасання атенюатора A та наведеними в таблиці характеристиками інструментальної невизначеності приладу U_A , k_A та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апріорно за n_r результатами вимірювань, оцініть наступні параметри: $\hat{A}$, $u_B(\hat{A})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{A})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювань загасання атенюатора	U_A	k_A	S_r	n_r
34,55 дБ	0,02 дБ	2,4	0,01 дБ	10

Варіант 16. За результатом одноразового вимірювання електричної напруги V та наведеними в таблиці в таблиці границею максимально допустимої похибки вольтметра θ_V та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апріорно за n_r результатами вимірювань, оцініть наступні параметри: $\hat{V}$, $u_B(\hat{V})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{V})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювань електричної напруги	θ_V	S_r	n_r
100,1 В	0,35 В	0,2 В	5

Варіант 17. За результатом одноразового вимірювання електричного опору R та наведеними в таблиці характеристиками інструментальної невизначеності омметра U_R , k_R та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апріорно за n_r результатами вимірювань, оцініть наступні параметри: $\hat{R}$, $u_B(\hat{R})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{R})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювання електричного опору	U_R	k_R	S_r	n_r
134,6 кОм	0,2 кОм	2,1	0,2 кОм	10

Варіант 18. За результатом одноразового вимірювання сили електричного струму I та наведеними в таблиці границею максимально допустимої похибки амперметра θ_I та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апріорно за n_r результатами вимірювань, оцініть наступні параметри: $\hat{I}$, $u_B(\hat{I})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{I})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювань сили електричного струму	θ_I	S_r	n_r
18,62 А	0,03 А	0,2 А	10

Варіант 19. За результатом одноразового вимірювання маси m , та наведеними в таблиці характеристиками інструментальної невизначеності ваг U_m , k_m та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апіорно за n_r результатами вимірювань оцініть наступні параметри: $\hat{m}$, $u_B(\hat{m})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{m})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювання маси	U_m	k_m	S_r	n_r
87,5 кг	0,6 кг	2,2	0,3 кг	5

Варіант 20. За результатом одноразового вимірювань часу t та наведеними в таблиці границею максимально допустимої похибки секундоміра θ_t та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апіорно за n_r результатами вимірювань оцініть наступні параметри: $\hat{t}$, $u_B(\hat{t})$, $u_B(\Delta_r)$, $u_c(\hat{t})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювань часу	θ_t	S_r	n_r
128 мс	2 мс	0,12 мс	10

Варіант 21. За результатом одноразових вимірювань температури T та наведеними в таблиці характеристиками інструментальної невизначеності термометра U_T , k_T та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апіорно за n_r результатами вимірювань оцініть наступні параметри: $\hat{T}$, $u_B(\hat{T})$, $u_B(\Delta_r)$, $u_c(\hat{T})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювань температури	U_T	k_T	S_r	n_r
37,6 °C	0,5 °C	2	0,2 °C	5

Варіант 22. За результатом одноразового вимірювання частоти f та наведеними в таблиці границею максимально допустимої похибки θ_f частотоміра та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апріорно за n_r результатами вимірювань, оцініть наступні параметри: $\hat{f}$, $u_B(\hat{f})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{f})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювань частоти	θ_f	S_r	n_r
43,12 МГц	0,2 МГц	0,1 МГц	10

Варіант 23. За результатом одноразового відтворення об'єму рідини V , та наведеними в таблиці характеристиками інструментальної невизначеності мірного стакану U_V , k_V та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апріорно за n_r результатами вимірювань, оцініть наступні параметри: $\hat{V}$, $u_B(\hat{V})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{V})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат відтворення об'єму рідини	U_V	k_V	S_r	n_r
1,0 л	0,2 л	2,1	0,1 л	5

Варіант 24. За результатами одноразового вимірювання густини рідини ρ та наведеними в таблиці границею максимально допустимої похибки ареометра θ_ρ та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апріорно за n_r результатами вимірювань, оцініть наступні параметри: $\hat{\rho}$, $u_B(\hat{\rho})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{\rho})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювань густини	θ_ρ	S_r	n_r
79,2 кг/м ³	0,4 кг/м ³	0,2 кг/м ³	10

Варіант 25. За результатом одноразового вимірювання сили світла J та наведеними в таблиці значеннями інструментальної невизначеності люксметра U_J , k_J та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апріорно за n_r результатами вимірювань, оцініть наступні параметри: $\hat{J}$, $u_B(\hat{J})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{J})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результати вимірювання сили світла	U_J	k_J	S_r	n_r
130,5 кд	0,3 кд	1,9	0,2 кд	5

Варіант 26. За результатом одноразового вимірювання індуктивності L та наведеними в таблиці границею максимально допустимої похибки вимірювача індуктивності θ_L та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апріорно за n_r результатами вимірювань, оцініть наступні параметри: $\hat{L}$, $u_B(\hat{L})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{L})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювань індуктивності	θ_L	S_r	n_r
66,23 мГн	0,08 мГн	0,05 мГн	10

Варіант 27. За результатом одноразового вимірювання магнітного потоку Φ та наведеними в таблиці значеннями інструментальної невизначеності веберметра U_Φ , k_Φ та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апріорно за n_r результатами вимірювань оцініть наступні параметри: $\hat{\Phi}$, $u_B(\hat{\Phi})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{\Phi})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювання магнітного потоку	U_Φ	k_Φ	S_r	n_r
412,6, Вб	0,3 Вб	2	0,2 Вб	5

Варіант 28. За результатом одноразового вимірювання діаметра циліндра d та наведеними в таблиці границею максимально допустимої похибки штангенциркуля θ_d та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апріорно за n_r результатами вимірювань, оцініть наступні параметри: $\hat{d}$, $u_B(\hat{d})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{d})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювань діаметра циліндра	θ_d	S_r	n_r
56,15 мм	0,01 мм	0,01 мм	5

Варіант 29. За результатом одноразового вимірювання тиску p та наведеними в таблиці характеристиками інструментальної невизначеності манометра U_p , k_p та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апріорно за n_r результатами вимірювань, оцініть наступні параметри: $\hat{p}$, $u_B(\hat{p})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{p})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювання тиску	U_p	k_p	S_r	n_r
3,5 кПа	0,14 кПа	2,3	0,11 кПа	10

Варіант 30. За результатом одноразового вимірювання загасання атенюатора A та наведеними в таблиці границею максимально допустимої похибки вимірювача θ_A та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апріорно за n_r результатами вимірювань, оцініть наступні параметри: $\hat{A}$, $u_B(\hat{A})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{A})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювань загасання атенюатора	θ_A	S_r	n_r
12,6 дБ	0,2 дБ	0,1 дБ	5

3.3 Приклади виконання практичного завдання

3.3.1 Приклад 1

За результатом одноразового вимірювання довжини ділянки l та наведеними в таблиці границею максимально допустимої похибки далекоміра θ_l та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апріорно за n_r результатами вимірювань, оцініть наступні параметри: $\hat{l}$, $u_B(\hat{l})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{l})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювання довжини ділянки	θ_l	S_r	n_r
55 м	0,7 м	0,5 м	10

1. Оцінювання вхідних величин.

За числове значення вхідної величини l , що безпосередньо спостерігається приймають значення величини, яке отримане при одноразовому вимірюванні $\hat{l}_{ind}$:

$$\hat{l}_{ind} = 55 \text{ м.}$$

2. Значення поправки на похибку повторюваності Δ_r дорівнює нулю:

$$\hat{\Delta}_r = 0.$$

3. Обчислення числового значення результату вимірювання.

За числове значення результату одноразового вимірювання довжини ділянки приймають значення величини, отримане при вимірюванні l :

$$\hat{l} = \hat{l}_{ind} = 55 \text{ м.}$$

4. Оцінювання стандартних невизначеностей вхідних величин.

Всі стандартні невизначеності прямого одноразового вимірювання оцінюються за типом B . Стандартна невизначеність вхідної величини, що безпосередньо спостерігається буде визначатися для повіреного далекоміра виходячи з границь його максимально допустимої похибки θ_l за формулою:

$$u_B(\hat{l}_{ind}) = \frac{\theta_l}{\sqrt{3}} = \frac{0,7}{\sqrt{3}} = 0,404 \text{ м.}$$

При цьому число степенів свободи, яке приписують цій невизначеності дорівнює нескінченності.

Додатковою похибкою прямого одноразового вимірювання є похибка повторюваності. Вона представлена СКВ S_r , тому пов'язану з нею стандартну невизначеність приймають рівною цьому СКВ:

$$u_B(\Delta_r) = S_r = 0,5 \text{ м.}$$

При цьому число степенів свободи, яке приписують цієї невизначеності, визначається через кількість вимірювань n_r , за допомогою яких визначалися ці СКВ на етапі складання методики виконання вимірювань:

$$\nu_B(\Delta_r) = n_r - 1 = 10 - 1 = 9.$$

5. Обчислення сумарної стандартної невизначеності.

Оскільки модель вимірювань (3.1) являє собою суму входних некорельованих величин, то сумарна невизначеність вимірюваної величини (сумарна стандартна невизначеність) буде дорівнювати:

$$u_c(\hat{l}) = \sqrt{u_B^2(\hat{l}_{ind}) + u_B^2(\Delta_r)} = \sqrt{0,404^2 + 0,5^2} = 0,643 \text{ м.}$$

6. Обчислення ефективного числа степенів свободи за формулою Велча-Саттерсвейта:

$$\nu_{eff} = \frac{\frac{u_c^4(\hat{l})}{\frac{u_B^4(\hat{l}_{ind})}{\nu_B(\hat{l}_{ind})} + \frac{u_B^4(\Delta_r)}{n-1}}}{\frac{0,643^4}{\frac{0,404^4}{\infty} + \frac{0,5^4}{9}}} = 24,6.$$

7. Обчислення коефіцієнту охоплення як коефіцієнта Стюдента
 $t_{0,9545;\nu_{eff}}$ для ймовірності 0,9545

$$t_{0,9545;24} = 2,11.$$

8. Обчислення розширеної невизначеності проводиться за формулою:

$$U = k \cdot u_c(\hat{l}) = 2,11 \cdot 0,643 = 1,36 \text{ м.}$$

9. Запис повного результату вимірювання з урахуванням рекомендацій Додатку 4:

$$l = (55 \pm 2) \text{ м, } p = 0,95.$$

10. Бюджет невизначеності представлений в табл. 3.2.

Таблиця 3.2. Бюджет невизначеності прямих одноразових вимірювань довжини ділянки

Вхідна величина	Значення вхідної величини	Стандартна невизначеність вхідної величини	Число степенів свободи	Коефіцієнт чутливості	Внесок невизначеності
l_{ind}	55 м	0,404 м	∞	1	0,404 м
Δ_r	0 м	0,5 м	9	1	0,5 м
Вимірювана величина	Значення вимірюваної величини	Сумарна стандартна невизначеність	Ефективне число степенів свободи	Коефіцієнт охоплення	Розширена невизначеність
l	55 м	0,643 м	24,6	2,11	2 м

3.3.2 Приклад 2 виконання практичного завдання

За результатами одноразового вимірювання довжини ділянки l та наведеними в таблиці характеристиками невизначеності вимірювання далекоміра U_l , k_l та СКВ повторюваності S_r , яке було визначено апріорно за n_r результатами вимірювань, оцініть наступні параметри: $\hat{l}$, $u_B(\hat{l})$, $u_B(\hat{\Delta}_r)$, $u_c(\hat{l})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань. Складіть бюджет невизначеності.

Результат вимірювань довжини ділянки	U_L	k_L	S_r	n_r
55 м	0,7 м	2,1	0,5 м	10

1. Оцінювання вхідних величин.

За числове значення вхідної величини l , що безпосередньо спостерігається приймають значення величини, яке отримане при одноразовому вимірюванні $\hat{l}_{ind}$:

$$\hat{l}_{ind} = 55 \text{ м.}$$

2. Значення поправки на похибку повторюваності Δ_r дорівнює нулю:

$$\hat{\Delta}_r = 0.$$

3. Обчислення числового значення результату вимірювання.

За числове значення результату одноразового вимірювання довжини ділянки приймають значення величини, отримане при вимірюванні l :

$$\hat{l} = \hat{l}_{ind} = 55 \text{ м.}$$

4. Оцінювання стандартних невизначеностей вхідних величин.

Всі стандартні невизначеності прямого одноразового вимірювання оцінюються за типом B . Стандартна невизначеність вхідної величини, що безпосередньо спостерігається буде визначатися для каліброваних ЗВТ – виходячи з розширеної інструментальної невизначеності U_l та коефіцієнта охоплення k_l , які вказані в сертифікаті калібрування далекоміра допустимої похибки за формулою:

$$u_B(\hat{l}_{ind}) = \frac{U_l}{k_l} = \frac{0,7}{2,1} = 0,333 \text{ м.}$$

При цьому число степенів свободи, яке приписують цій невизначеності виходячи з Додатку 2, для $k_{0,9545} = 2,1$, дорівнює $\nu = 25$.

Додатковою похибкою прямого одноразового вимірювання є похибка повторюваності. Вона представлена СКВ S_r , тому пов'язану з нею стандартну невизначеність приймають рівною цьому СКВ:

$$u_B(\hat{\Delta}_r) = S_r = 0,5 \text{ м.}$$

При цьому число степенів свободи, яке приписують цим невизначеностям, визначається через кількість вимірювань n_r , за допомогою яких визначалися ці СКВ на етапі складання методики виконання вимірювань:

$$\nu_B(\hat{\Delta}_r) = n_r - 1 = 10 - 1 = 9.$$

5. Обчислення сумарної стандартної невизначеності.

Оскільки модель вимірювань (3.1) являє собою суму вхідних некорельованих величин, то сумарна невизначеність вимірюваної величини (сумарна стандартна невизначеність) буде дорівнювати:

$$u_c(\hat{l}) = \sqrt{u_B^2(\hat{l}_{ind}) + u_B^2(\hat{\Delta}_r)} = \sqrt{0,333^2 + 0,5^2} = 0,6 \text{ м.}$$

6. Обчислення ефективного числа степенів свободи за формулою Велча-Саттерсвейта:

$$v_{eff} = \frac{u_c^4(\hat{l})}{\frac{u_B^4(\hat{l}_{ind})}{v_B(\hat{l}_{ind})} + \frac{u_B^4(\Delta_r)}{n-1}} = \frac{0,6^4}{\frac{0,333^4}{25} + \frac{0,5^4}{9}} = 18.$$

7. Обчислення коефіцієнту охоплення як коефіцієнта Стюдента
 $t_{0,9545;v_{eff}}$ для ймовірності 0,9545

$$t_{0,9545;18} = 2,149.$$

8. Обчислення розширеної невизначеності проводиться за формулою:

$$U = k \cdot u_c(\hat{l}) = 2,149 \cdot 0,6 = 1,29 \text{ м.}$$

9. Запис повного результату вимірювання з урахуванням рекомендацій Додатку 4:

$$l = (55 \pm 2) \text{ м, } p = 0,95.$$

10. Бюджет невизначеності представлений в табл. 3.3.

Таблиця 3.3. Бюджет невизначеності прямих одноразових вимірювань довжини ділянки

Вхідна величина	Значення вхідної величини	Стандартна невизначеність вхідної величини	Число степенів свободи	Коефіцієнт чутливості	Внесок невизначеності
l_{ind}	55 м	0,333 м	25	1	0,333 м
Δ_r	0 м	0,5 м	9	1	0,5 м
Вимірювана величина	Значення вимірюваної величини	Сумарна стандартна невизначеність	Ефективне число степенів свободи	Коефіцієнт охоплення	Розширена невизначеність
l	55 м	0,6 м	18	2,149	2 м

4 ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ПРЯМИХ БАГАТОРАЗОВИХ ВИМІРЮВАНЬ

4.1 Основні теоретичні відомості

Вимірювання з багаторазовими спостереженнями (багаторазові вимірювання) проводяться при підвищених вимогах до точності вимірювань. Такі вимірювання характерні для професійної метрологічної діяльності і виконуються в основному співробітниками метрологічних служб, а також при тонких наукових експериментах.

Мета обробки результатів вимірювань з багаторазовими спостереженнями полягає в зменшенні випадкової похибки результату вимірювань.

При обробці багаторазових вимірювань вирішують дві задачі:

- по-перше, визначають деяке наближене значення вимірюваної величини, зване оцінкою, яке найкращим чином відповідає отриманим результатам;

- по-друге, характеристику повторюваності вимірюваної величини визначають апостеріорно – за результатами її окремих спостережень.

Оцінювання невизначеності прямих багаторазових вимірювань проводиться відповідно до базового алгоритму GUM [3].

1. Модель прямого багаторазового вимірювання має вигляд:

$$X = X_{ind} + \sum_{i=1}^N \Delta_i, \quad (4.1)$$

де X – вимірювана величина; X_{ind} – вхідна величина, що безпосередньо спостерігається; Δ_i – поправка на i -у складову додаткової похибки вимірювання.

2. Оцінювання вхідних величин.

За числове значення вхідної величини $\hat{X}_{ind}$, що безпосередньо спостерігається, приймають середнє арифметичне значення n спостережень $x_{ind1}, x_{ind2}, \dots, x_{indn}$ цієї величини:

$$\hat{X}_{ind} = \bar{x}_{ind} = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n x_{indq}. \quad (4.2)$$

Припускають, що поправки на всі відомі систематичні похибки внесені, тому всі поправки на додаткові похибки, що входять в рівняння (4.1), тобто значення всіх складових Δ_i будемо вважати рівними нулю:

$$\hat{\Delta}_i = 0.$$

3. Обчислення числового значення вимірюваної величини.

За числове значення результату прямого багаторазового вимірювання x приймають числове значення вхідної величини $\hat{X}_{ind}$, що безпосередньо спостерігається:

$$x = \bar{x}_{ind}. \quad (4.3)$$

4. Оцінювання стандартних невизначеностей вхідних величин.

Стандартна невизначеність типу A вхідної величини, що безпосередньо спостерігається, буде визначатися за формулою:

$$u_A(\bar{x}_{ind}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{q=1}^n (x_{ind\ q} - \bar{x}_{ind})^2}. \quad (4.4)$$

Стандартна невизначеність типу B вхідної величини, що безпосередньо спостерігається, буде визначатися:

а) для відкаліброваного ІВП – виходячи з розширеної невизначеності U_X і коефіцієнта охоплення k_X , взятих з його сертифіката калібрування за формулою:

$$u_B(x_{ind}) = \frac{U_X}{k_X}. \quad (4.5)$$

При цьому число степенів свободи, яке приписують цій невизначеності дорівнюватиме:

$$v_B(x_{ind}) = \begin{cases} \infty, & \text{при } k_X \leq 2; \\ v_t, & \text{при } k_X > 2, \end{cases} \quad (4.6)$$

де v_t – число степенів свободи для коефіцієнта Стюдента t , який дорівнює значенню коефіцієнта охоплення k_X для тієї ж ймовірності ($k_X = t$) (див. рисунок Додатку 2).

б) для повіреного ІВП – виходячи з границі його максимально допустимої похибки θ_x за формулою:

$$u_B(x_{ind}) = \frac{\theta_x}{\alpha_x}, \quad (4.7)$$

де α_x – коефіцієнт, що відповідає закону розподілу основної похибки ЗВТ. Зазвичай у припущенні рівномірного закону розподілу основної похибки ЗВТ приймають $\alpha_x = \sqrt{3}$. При цьому число степенів свободи, яке приписують цій невизначеності $v_B(x_{ind}) = \infty$.

Додатковими похибками прямого багаторазового вимірювання є похибки методу, оператора, а також похибки, які зумовлені зміною умов вимірювання.

Якщо поправки на додаткові похибки представлені границями θ_i , то, в залежності від закону розподілу цих похибок всередині границь, пов'язані з ними стандартні невизначеності обчислюють за формулою:

$$u_B(\hat{\Delta}_i) = \frac{\theta_i}{\alpha_i}, \quad (4.8)$$

де α_i – коефіцієнт, що відповідає закону распределения Δ_i . При цьому число степенів свободи, яке приписують цим невизначеностям $v_B(\hat{\Delta}_i) = \infty$.

Якщо поправки на додаткові похибки представлені СКО S_i , то пов'язані з ними стандартні невизначеності приймають рівними цим СКО:

$$u_B(\hat{\Delta}_i) = S_i. \quad (4.9)$$

5. Обчислення сумарної стандартної невизначеності.

Оскільки модель вимірювання (4.1) являє собою суму входних некорельованих величин, то сумарна невизначеність вимірюваної величини (сумарна стандартна невизначеність) буде дорівнювати:

$$u_c(x) = \sqrt{u_A^2(\bar{x}_{ind}) + u_B^2(x_{ind}) + \sum_{i=1}^N u_B^2(\hat{\Delta}_i)}. \quad (4.10)$$

6. Обчислення розширеної невизначеності проводиться за формулою:

$$U = k u_c(x), \quad (4.11)$$

де k – коефіцієнт охоплення, який визначають виходячи законів розподілу вхідних величин.

Якщо сумарна невизначеність вхідних величин з числом степенів свободи відмінним від нескінченності (безпосередньо спостерігаємої вхідної величини) значна, то коефіцієнт охоплення розраховують як коефіцієнт Стюдента для ймовірності 0,9545 і ефективного числа степенів свободи, що обчислюється за формулою Велча-Саттерсвейта:

$$v_{eff} = \frac{u_c^4(x)}{\frac{u_A^4(\bar{x}_{ind})}{n-1} + \frac{u_B^4(x_{ind})}{v_B(x_{ind})}}. \quad (4.12)$$

7. Бюджет невизначеності представлений в табл. 4.1 [7].

Таблиця 4.1. Бюджет невизначеності прямих багаторазових вимірювань

Вхідна величина	Значення вхідної величини	Стандартна невизначеність вхідної величини	Число степенів свободи	Коефіцієнт чутливості	Внесок невизначеності
X_{ind}	$\bar{x}_{ind}$	$u_A(\bar{x}_{ind})$	$n-1$	1	$u_A(\bar{x}_{ind})$
		$u_B(x_{ind})$	$v_B(x_{ind})$	1	$u_B(x_{ind})$
Δ_1	0	$u(\hat{\Delta}_1)$	$v_B(\Delta_1)$		$u(\hat{\Delta}_1)$
...	...	...	...	...	...
Δ_N	0	$u(\hat{\Delta}_N)$	$v_B(\Delta_N)$	1	$u(\hat{\Delta}_N)$
Вимірювана величина	Значення вимірюваної величини	Сумарна стандартна невизначеність	Ефективне число степенів свободи	Коефіцієнт охоплення	Розширена невизначеність
X	$\bar{x}_{ind}$	(4.10)	(4.12)	k	(4.11)

4.2 Контрольні завдання

Варіант 1. За результатами багаторазових вимірювань електричної напруги та значенням інструментальної невизначеності вольтметра, що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{V}$, $u_A(\bar{V})$, $u_B(\hat{V})$, $u_c(\hat{V})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань електричної напруги, В					U_V , В	k_V
V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	0,15	2,1
10,1	10,2	10,5	10,4	10,3		

Варіант 2. За результатами багаторазових вимірювань електричного опору та значенням границі максимально-допустимої похибки омметра θ_R , що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{R}$, $u_A(\bar{R})$, $u_B(\hat{R})$, $u_c(\hat{R})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань електричного опору, Ом				θ_R , Ом
R_1	R_2	R_3	R_4	1,2
246	248	247	245	

Варіант 3. За результатами багаторазових вимірювань сили електричного струму та значенням інструментальної невизначеності амперметра, що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{I}$, $u_A(\bar{I})$, $u_B(\hat{I})$, $u_c(\hat{I})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань електричного струму, мА			U_I , мА	k_I
I_1	I_2	I_3	0,2	2,4
135,5	135,6	135,4		

Варіант 4. За результатами багаторазових вимірювань маси та значенням границі максимально-допустимої похибки ваг θ_m , що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{m}$, $u_A(\bar{m})$, $u_B(\hat{m})$, $u_C(\hat{m})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань маси, г				θ_m , г
m_1	m_2	m_3	m_4	0,03
27,05	27,06	27,04	27,07	

Варіант 5. За результатами багаторазових вимірювань часу та значенням інструментальної невизначеності секундоміра, що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{t}$, $u_A(\bar{t})$, $u_B(\hat{t})$, $u_C(\hat{t})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань часу, с					U_t , с	k_t
t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	0,2	2,3
24,6	24,8	24,4	24,2	25,0		

Варіант 6. За результатами багаторазових вимірювань температури та значенням границі максимально-допустимої похибки термометра θ_T , що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{T}$, $u_A(\bar{T})$, $u_B(\hat{T})$, $u_C(\hat{T})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань температури, К					θ_T , К
T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	1,0
146	147	148	145	149	

Варіант 7. За результатами багаторазових вимірювань електричної потужності та значенням інструментальної невизначеності ватметра, що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{P}$, $u_A(\bar{P})$, $u_B(\hat{P})$, $u_c(\hat{P})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань електричної потужності, Вт			U_p , Вт	k_p
P_1	P_2	P_3	0,003	2,0
1,234	1,235	1,236		

Варіант 8. За результатами багаторазових вимірювань прискорення вільного падіння та значенням границі максимально-допустимої похибки гравіметра θ_g , що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{g}$, $u_A(\bar{g})$, $u_B(\hat{g})$, $u_c(\hat{g})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань прискорення вільного падіння, Гал					θ_g , Гал
g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	0,042
979,71	979,73	979,75	979,69	979,67	

Варіант 9. За результатами багаторазових вимірювань кута та значенням інструментальної невизначеності кутоміру, що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{\alpha}$, $u_A(\bar{\alpha})$, $u_B(\hat{\alpha})$, $u_c(\hat{\alpha})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань кута, рад					U_α , рад	k_α
α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	0,23	2,15
85,5	85,7	85,4	85,6	85,3		

Варіант 10. За результатами багаторазових вимірювань електричної ємності та значенням границі максимально-допустимої похибки фарадометра θ_C , що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{C}$, $u_A(\bar{C})$, $u_B(\hat{C})$, $u_C(\hat{C})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань електричної ємності, пФ					θ_C , пФ
C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	1,0
146	144	148	150	152	

Варіант 11. За результатами багаторазових вимірювань магнітної індукції та значенням інструментальної невизначеності тесламетра, що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{B}$, $u_A(\bar{B})$, $u_B(\hat{B})$, $u_C(\hat{B})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань магнітної індукції, Тл			U_T , Тл	k_T
B_1	B_2	B_3	0,024	2,05
35,55	35,56	35,54		

Варіант 12. За результатами багаторазових вимірювань освітленості та значенням границі максимально-допустимої похибки люксметра θ_E , що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{E}$, $u_A(\bar{E})$, $u_B(\hat{E})$, $u_C(\hat{E})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань освітленості, лк					θ_E , лк
E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	1,0
10,1	10,4	10,2	10,3	10,1	

Варіант 13. За результатами багаторазових вимірювань діаметра циліндра d та значенням інструментальної невизначеності штангенциркуля, що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{d}$, $u_A(\bar{d})$, $u_B(\hat{d})$, $u_C(\hat{d})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань діаметра циліндра, мм					U_d , мм	k_d
d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	0,02	2,1
33,35	33,36	33,35	33,36	33,35		

Варіант 14. За результатами багаторазових вимірювань тиску та значенням границі максимально-допустимої похибки манометра θ_p , що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{p}$, $u_A(\bar{p})$, $u_B(\hat{p})$, $u_C(\hat{p})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань тиску, кПа					θ_p , кПа
p_1	p_2	p_3	p_3	p_5	0,12
0,35	0,36	0,34	0,33	0,35	

Варіант 15. За результатами багаторазових вимірювань загасання атенюатора та значенням інструментальної невизначеності вимірювача загасання, що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{A}$, $u_A(\bar{A})$, $u_B(\hat{A})$, $u_C(\hat{A})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань загасання атенюатора, дБ			U_A , дБ	k_A
A_1	A_1	A_1	0,02	2,3
34,55	34,56	34,54		

Варіант 16. За результатами багаторазових вимірювань електричної напруги та значенням границі максимально-допустимої похибки вольтметра θ_V , що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{V}$, $u_A(\bar{V})$, $u_B(\hat{V})$, $u_C(\hat{V})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань електричної напруги, В					θ_V , В
V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	0,15
10,1	10,2	10,5	10,4	10,3	

Варіант 17. За результатами багаторазових вимірювань електричного опору та значенням інструментальної невизначеності омметра, що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{R}$, $u_A(\bar{R})$, $u_B(\hat{R})$, $u_C(\hat{R})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань електричного опору, Ом				U_R , Ом	k_R
R_1	R_2	R_3	R_4	1,2	1,9
246	248	247	245		

Варіант 18. За результатами багаторазових вимірювань сили електричного струму та значенням границі максимально-допустимої похибки амперметра θ_I , що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{I}$, $u_A(\bar{I})$, $u_B(\hat{I})$, $u_C(\hat{I})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань електричного струму, мА				θ_I , мА
I_1	I_2	I_3	I_4	0,2
135,5	135,6	135,4	135,4	

Варіант 19. За результатами багаторазових вимірювань маси та значенням інструментальної невизначеності ваг, що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{m}$, $u_A(\bar{m})$, $u_B(\hat{m})$, $u_C(\hat{m})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань маси, г				U_m , г	k_m
m_1	m_2	m_3	m_4	0,03	1,65
27,05	27,06	27,04	27,07		

Варіант 20. За результатами багаторазових вимірювань часу та значенням границі максимально-допустимої похибки секундоміра θ_t , що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{t}$, $u_A(\bar{t})$, $u_B(\hat{t})$, $u_C(\hat{t})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань часу, с					θ_t , с
t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	0,2
24,6	24,8	24,4	24,2	25,0	

Варіант 21. За результатами багаторазових вимірювань температури та значенням інструментальної невизначеності термометра, що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{T}$, $u_A(\bar{T})$, $u_B(\hat{T})$, $u_C(\hat{T})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань температури, К				U_T , К	k_T
T_1	T_2	T_3	T_4	1,0	1,8
146	147	148	145		

Варіант 22. За результатами багаторазових вимірювань електричної потужності та значенням границі максимально-допустимої похибки ватметра θ_p , що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{P}$, $u_A(\bar{P})$, $u_B(\hat{P})$, $u_C(\hat{P})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань електричної потужності, Вт					θ_p , Вт
P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	0,003
1,234	1,235	1,236	1,237	1,233	

Варіант 23. За результатами багаторазових вимірювань прискорення вільного падіння та значенням інструментальної невизначеності гравіметра, що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{g}$, $u_A(\bar{g})$, $u_B(\hat{g})$, $u_C(\hat{g})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань прискорення вільного падіння, Гал				U_g , Гал	k_g
g_1	g_2	g_3	g_4	0,042	2,2
979,71	979,73	979,75	979,69		

Варіант 24. За результатами багаторазових вимірювань кута та значенням границі максимально-допустимої похибки кутоміру θ_α , що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{\alpha}$, $u_A(\bar{\alpha})$, $u_B(\hat{\alpha})$, $u_C(\hat{\alpha})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань куа, рад					θ_α , рад
α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	0,3
85,5	85,7д	85,4	85,6	85,3	

Варіант 25. За результатами багаторазових вимірювань електричної ємності та значенням інструментальної невизначеності фарадметра, що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{C}$, $u_A(\bar{C})$, $u_B(\hat{C})$, $u_C(\hat{C})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань електричної ємності, пФ				U_C , пФ	k_C
C_1	C_2	C_3	C_4	1,0	1,8
146	144	148	150		

Варіант 26. За результатами багаторазових вимірювань магнітної індукції та значенням границі максимально-допустимої похибки магнітметра θ_B , що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{B}$, $u_A(\bar{B})$, $u_B(\hat{B})$, $u_C(\hat{B})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань магнітної індукції, Тл					θ_B , Тл
B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	0,024
35,55	35,56	35,54	35,56	35,54	

Варіант 27. За результатами багаторазових вимірювань освітленості та значенням інструментальної невизначеності люксметра, що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{E}$, $u_A(\bar{E})$, $u_B(\hat{E})$, $u_C(\hat{E})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань освітленості, лк				U_E , лк	k_E
E_1	E_2	E_3	E_4	1,0	1,77
10,1	10,4	10,2	10,3		

Варіант 28. За результатами багаторазових вимірювань діаметра циліндра d та значенням границі максимально-допустимої похибки штангенциркуля, що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{d}$, $u_A(\bar{d})$, $u_B(\hat{d})$, $u_C(\hat{d})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань діаметра циліндра, мм					θ_d , мм
d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	0,02
33,36	33,35	33,36	33,35	33,36	

Варіант 29. За результатами багаторазових вимірювань тиску та значенням інструментальної невизначеності манометра, що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{p}$, $u_A(\bar{p})$, $u_B(\hat{p})$, $u_C(\hat{p})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань тиску, кПа				U_T , кПа	k_T
p_1	p_2	p_3	p_3	0,12	1,8
0,35	0,36	0,34	0,33		

Варіант 30. За результатами багаторазових вимірювань загасання атенюатора та значенням границі максимально-допустимої похибки вимірювача загасання θ_A , що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{A}$, $u_A(\bar{A})$, $u_B(\hat{A})$, $u_C(\hat{A})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань загасання атенюатора, дБ					θ_A , дБ
A_1	A_1	A_1	A_4	A_5	0,02
34,55	34,56	34,54	34,56	34,54	

4.3 Приклади виконання практичного заняття

4.3.1 Приклад 1

За результатами багаторазових вимірювань довжини стрижня та значенням інструментальної невизначеності далекоміра, що наведена в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{l}$, $u_A(\bar{l})$, $u_B(\hat{l})$, $u_c(\hat{l})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань довжини стрижня, м					U_l , м	k_l
l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	0,2	2,1
55,1	55,2	55,3	55,4	55,0		

1. Обчислення числового значення результату вимірювання.

$$l = \bar{l} = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n l_q = \frac{55,1 + 55,2 + 55,3 + 55,4 + 55,0}{5} = 55,2 \text{ м.}$$

2. Оцінювання стандартних невизначеностей вхідних величин.

Стандартна невизначеність типу A вхідної величини, що безпосередньо спостерігається, буде визначатися за формулою:

$$u_A(\bar{l}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{q=1}^n (l_q - \bar{l})^2} = \left\{ \frac{1}{5(5-1)} [(55,1 - 55,2)^2 + (55,2 - 55,2)^2 + (55,3 - 55,2)^2 + (55,4 - 55,2)^2 + (55,0 - 55,2)^2] \right\}^{0,5} = 0,0707 \text{ м.}$$

При цьому число степенів свободи, яке приписують цій невизначеності v_A дорівнюватиме $n - 1 = 5 - 1 = 4$.

Стандартна інструментальна невизначеність типу B вхідної величини, що безпосередньо спостерігається, буде визначатися виходячи з розширеної невизначеності U_l і коефіцієнта охоплення k_l , взятих з їх сертифіката калібрування за формулою:

$$u_B(\hat{l}) = \frac{U_l}{k_l} = \frac{0,2}{2,1} = 0,0952 \text{ м.}$$

При цьому, оскільки $k_x > 2$, число степенів свободи v_B , яке приписують цій невизначеності, буде дорівнювати 25 згідно з Додатками 2 та 3.

3. Обчислення сумарної стандартної невизначеності.

Сумарна невизначеність вимірюваної величини (сумарна стандартна невизначеність) буде дорівнювати:

$$u_c(l) = \sqrt{u_A^2(\bar{l}) + u_B^2(\hat{l})} = \sqrt{0,0707^2 + 0,0952^2} = 0,119 \text{ м.}$$

4. Обчислення ефективного числа степенів свободи, що обчислюється за формулою Велча-Саттерсвейта:

$$v_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\frac{u_A^4}{v_A} + \frac{u_B^4}{v_B}} = \frac{0,119^4}{\frac{0,0707^4}{4} + \frac{0,0952^4}{25}} = 21.$$

5. Коефіцієнт охоплення розраховують як коефіцієнт Стюдента $t_{0,9545; v_{eff}}$ для ймовірності 0,9545, тобто, згідно з Додатком 3 для цього випадку дорівнює 2,126.

6. Обчислення розширеної невизначеності проводиться за формулою:

$$U_{0,9545} = k_{0,9545} \cdot u_c(\hat{l}) = 2,126 \cdot 0,119 = 0,253 \text{ м.}$$

7. Повний результат вимірювання

$$l = (55,20 \pm 0,25) \text{ м, } p = 0,9545.$$

8. Бюджет невизначеності представлений в табл. 4.2.

Таблиця 4.2. Бюджет невизначеності прямих багаторазових вимірювань

Вхідна величина	Значення вхідної величини	Стандартна невизначеність вхідної величини	Число степенів свободи	Коефіцієнт чутливості	Внесок невизначеності
l_{ind}	55,2 м	0,0707 м	4	1	0,0707 м
		0,0952 м	25	1	0,0952 м
Вимірювана величина	Значення вимірюваної величини	Сумарна стандартна невизначеність	Ефективне число степенів свободи	Коефіцієнт охоплення	Розширена невизначеність
l	55,2 м	0,119 м	21	2,126	0,253 м

4.3.2 Приклад 2

За результатами багаторазових вимірювань довжини стрижня та значенням границі максимально-допустимої похибки далекоміра θ_l , що наведені в таблиці, оцініть наступні параметри: $\bar{l}$, $u_A(\bar{l})$, $u_B(\hat{l})$, $u_c(\hat{l})$, v_{eff} , $k_{0,9545}$, $U_{0,9545}$ та запишіть повний результат вимірювання для рівня довіри 0,9545 з коректним округленням числового значення та невизначеності вимірювань.

Результати вимірювань довжини стрижня, м					θ_l , м
l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	0,2
55,1	55,2	55,3	55,4	55,0	

1. Обчислення числового значення результату вимірювання.

$$l = \bar{l} = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n l_q = \frac{55,1 + 55,2 + 55,3 + 55,4 + 55,0}{5} = 55,2 \text{ м.}$$

2. Оцінювання стандартних невизначеностей вхідних величин.

Стандартна невизначеність типу A вхідної величини, що безпосередньо спостерігається, буде визначатися за формулою:

$$u_A(\bar{l}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{q=1}^n (l_q - \bar{l})^2} = \left\{ \frac{1}{5(5-1)} [(55,1 - 55,2)^2 + (55,2 - 55,2)^2 + (55,3 - 55,2)^2 + (55,4 - 55,2)^2 + (55,0 - 55,2)^2] \right\}^{0,5} = 0,0707 \text{ м.}$$

При цьому число степенів свободи, яке приписують цій невизначеності v_A дорівнюватиме $n - 1 = 5 - 1 = 4$.

Стандартна інструментальна невизначеність типу B вхідної величини, що безпосередньо спостерігається, буде визначатися виходячи з границі максимально-допустимої похибки (МРЕ) далекоміра $\theta_l = 0,2$ м у припущенні про рівномірний розподіл МРЕ у середині границь:

$$u_B(\hat{l}) = \frac{U_l}{k_l} = \frac{0,2}{\sqrt{3}} = 0,115 \text{ м.}$$

При цьому число степенів свободи v_B , яке приписують цій невизначеності, буде дорівнювати нескінченності.

3. Обчислення сумарної стандартної невизначеності.

Сумарна невизначеність вимірюваної величини (сумарна стандартна невизначеність) буде дорівнювати:

$$u_c(l) = \sqrt{u_A^2(\bar{l}) + u_B^2(\hat{l})} = \sqrt{0,0707^2 + 0,115^2} = 0,135 \text{ м.}$$

4. Обчислення ефективного числа степенів свободи, що обчислюється за формулою Велча-Саттерсвейта:

$$v_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\frac{u_A^4}{v_A} + \frac{u_B^4}{v_B}} = \frac{0,135^4}{\frac{0,0707^4}{4} + \frac{0,115^4}{\infty}} = 53,2.$$

5. Коефіцієнт охоплення розраховують як коефіцієнт Стюдента $t_{0,9545; v_{eff}}$ для ймовірності 0,9545, тобто для цього випадку дорівнює 2,048.

6. Обчислення розширеної невизначеності проводиться за формулою:

$$U_{0,9545} = k_{0,9545} \cdot u_c(\hat{l}) = 2,048 \cdot 0,135 = 0,276 \text{ м.}$$

7. Повний результат вимірювання

$$l = (55,20 \pm 0,28) \text{ м, } p = 0,9545.$$

8. Бюджет невизначеності представлений в табл. 4.2.

Таблиця 4.2. Бюджет невизначеності прямих багаторазових вимірювань

Вхідна величина	Значення вхідної величини	Стандартна невизначеність вхідної величини	Число степенів свободи	Коефіцієнт чутливості	Внесок невизначеності
l_{ind}	55,2 м	0,0707 м	4	1	0,0707 м
		0,115 м	∞	1	0,115 м
Вимірювана величина	Значення вимірюваної величини	Сумарна стандартна невизначеність	Ефективне число степенів свободи	Коефіцієнт охоплення	Розширена невизначеність
l	55,2 м	0,135 м	53,2	2,048	0,276 м

5 ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ЧУТЛИВОСТІ

5.1 Основні теоретичні відомості

Для оцінювання невизначеності вимірювань застосовують так званий модельний підхід. Його суть полягає у використанні математичної моделі вимірювань

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N), \quad (5.1)$$

що зв'язує між собою вхідні величини $X_1, X_2, \dots, X_N$ моделі вимірювань з вимірюваною (вихідною) величиною Y . При цьому за невизначеностями, які пов'язані зі вхідними величинами, обчислюють невизначеність вимірюваної величини.

Внесок невизначеності кожної вхідної величини в невизначеність вимірюваної величини (сумарну стандартну невизначеність) $u_i(y)$ визначають як добуток невизначеності вхідної величини $u(x_i)$ на коефіцієнт чутливості c_i :

$$u_i(y) = c_i u(x_i). \quad (5.2)$$

Коефіцієнти чутливості c_i це числа, що показують, як оцінка вихідної величини Y буде змінюватися зі зміною оцінок вхідних величин x_i . Їх знаходять як частинні похідні вихідної величини по кожній з вхідних величин:

$$c_i = \left. \frac{\partial Y}{\partial X_i} \right|_{x_1, x_2, \dots, x_N}. \quad (5.3)$$

Зауваження. Для обчислення коефіцієнтів чутливості треба вміти диференціювати функції багатьох змінних. Таблиця похідних, правила диференціювання для функції однієї змінної і функції багатьох змінних, приклади знаходження частинних похідних функції багатьох змінних знаходяться в Додатках 5-7.

Приклад. Визначається швидкість V транспортного засобу, що проходить відстань L за час T . Шлях, що проходить транспортний засіб $l=1000$ м, є відомим апіорі. Час проходження цього відрізка шляху вимірювався триразово секундоміром, при цьому було отримано наступні результати:

$$t_1 = 100,1 \text{ с}; \quad t_2 = 99,9 \text{ с}; \quad t_3 = 100,0 \text{ с}.$$

Треба обчислити усі коефіцієнти чутливості (для подальшого обчислювання невизначеності вимірювальної величини) .

Рішення.

Визначення швидкості V транспортного засобу, що проходить відстань L за час T має наступну математичну модель:

$$V = \frac{L}{T}.$$

Вимірювана величина V залежить від двох вхідних величин: L та T . Тобто потрібно обчислити два коефіцієнта чутливості:

- c_L (коефіцієнт чутливості швидкості транспортного засобу до зміни пройденого шляху L) ;
- c_T (коефіцієнт чутливості швидкості транспортного засобу до зміни часу T) .

При обчисленні коефіцієнтів чутливості треба взяти частинні похідні і в них підставити значення вхідних величин.

Нагадаємо, що за умовами задачі: $l = 1000$ м та $t_1 = 100,1$ с; $t_2 = 99,9$ с; $t_3 = 100,0$ с.

Середнє значення вимірювань часу дорівнює:

$$\bar{t} = \frac{100,1 + 99,9 + 100,0}{3} = 100 \text{ с}.$$

Тому в формули, що отримаємо в результаті обчислення частинних похідних будемо підставляти значення: $l = 1000$ м та $t = 100$ с.

Коефіцієнт c_L чутливості швидкості транспортного засобу до зміни пройденого шляху обчислимо як частинну похідну від функції $V = \frac{L}{T}$ за змінною L (при цьому величину T вважаємо константою):

$$c_L = \frac{\partial V}{\partial L} = \left(\frac{L}{T} \right)'_L = \frac{1}{T} \Big|_{t=100\text{с}} = 0,01\text{с}^{-1}.$$

Коефіцієнт c_T чутливості швидкості транспортного засобу до зміни часу обчислимо як частинну похідну від функції $V = \frac{L}{T}$ за змінною T (при цьому величину L вважаємо константою):

$$c_T = \frac{\partial V}{\partial T} = \left(\frac{L}{T} \right)'_T = -\frac{L}{T^2} \Big|_{l=1000\text{ м}, t=100\text{с}} = -\frac{1000}{100^2} = -0,1\text{м/с}^2.$$

5.2 Контрольні завдання

Для наведених у таблиці математичних моделей вимірювань та результатів вимірювань вхідних величин розрахуйте значення усіх коефіцієнтів чутливості.

Варіант 1.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 2,5M^3 + 3,6T^2$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення M	3,8	3,7	3,2	3,3	3,8	3,8		
Значення T	5,1	4,9	5,0	4,9	4,6			
Завдання 2	Математична модель: $Y = 7,1 \cdot S \cdot P$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення S	6,5	6,6	6,4	6,7	6,4	6,4	6,4	
Значення P	12,5	12,4	12,7	12,1	12,7			
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{8,2 \cdot H^4}{L^3}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення H	4,6	4,5	4,7	4,7	4,4	4,7	4,6	4,5
Значення L	7,7							

Варіант 2.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 3,1P^2 - 5,8M$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення P	4,7	4,5	4,8	4,9	4,6			
Значення M	5,4	4,9	5,3	5,9	5,4	5,4	5,9	
Завдання 2	Математична модель: $Y = 8,2 \cdot R \cdot H$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення R	8,5	8,4	8,3	8,7	8,4	8,5		
Значення H	15,6	15,2	15,4	15,2	15,5			
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{9,3 \cdot T^3}{V^2}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення T	2,5	2,5	2,7	2,7	2,3	2,7	2,4	
Значення V	8,3							

Варіант 3.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 6,9M + 7,1D^4$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення M	2,6	2,8	2,4	2,6	2,8	2,5	2,5	
Значення D	3,4	3,9	3,1	3,2	3,4			
Завдання 2	Математична модель: $Y = 9,3 \cdot P \cdot L$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення P	5,5	5,2	5,6	5,2	5,4	5,5	5,6	5,4
Значення L	17,5	17,2	17,5	17,3	17,7	17,2		
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{1,4 \cdot R^2}{S}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення R	15,6	15,2	15,3	15,2	15,4	15,2		
Значення S	1,7							

Варіант 4.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 8,2D^3 - 9,3H^2$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення D	5,8	5,3	5,2	5,4	5,7	5,6	5,5	5,5
Значення H	1,3	1,3	1,2	1,5	1,2			
Завдання 2	Математична модель: $Y = 1,4 \cdot S \cdot M$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення S	4,3	4,5	4,6	4,4	4,3			
Значення M	11,3	11,2	11,5	11,6	11,4	11,6		
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{2,5 \cdot L}{P^3}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення L	3,4	3,5	3,7	3,6	3,5	3,7		
Значення P	7,3							

Варіант 5.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 0,4S^2 + 2,5T^3$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення S	7,2	7,2	7,5	7,4	7,3	7,2		
Значення T	2,3	2,5	2,3	2,7	2,2	2,4	2,3	2,5
Завдання 2	Математична модель: $Y = 2,5 \cdot M \cdot V$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення M	6,5	6,6	6,4	6,7	6,4	6,4	6,4	
Значення V	18,8	18,6	18,8	18,7	18,8			
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{3,6 \cdot P^4}{L^2}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення P	4,2	4,1	4,3	4,2	4,3	4,3	4,2	
Значення L	9,4							

Варіант 6.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 2,6B - 3,7M^3$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення B	6,7	6,6	6,3	6,4	6,5			
Значення M	8,1	8,4	8,3	8,2	8,5	8,4	8,2	8,3
Завдання 2	Математична модель: $Y = 3,6 \cdot D \cdot P$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення D	12,5	12,8	12,9	12,8	12,5	12,6		
Значення P	5,3	5,7	5,4	5,6	5,3	5,2	5,3	
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{4,7 \cdot R^3}{M}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення R	5,6	5,2	5,3	5,2	5,6	5,3	5,4	5,5
Значення M	28,9							

Варіант 7.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 4,8M^3 + 5,9T^4$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення M	2,7	2,6	2,7	2,5	2,9	2,9	2,6	
Значення T	3,2	3,4	3,2	3,3	3,4			
Завдання 2	Математична модель: $Y = 4,7 \cdot S \cdot P$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення S	9,3	9,5	9,6	9,5	9,6	9,4	9,3	9,6
Значення P	14,6	14,8	14,7	14,7	14,8	14,9	14,7	
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{5,8 \cdot H^2}{L^3}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення H	6,5	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6		
Значення L	5,2							

Варіант 8.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 6,1P^2 - 7,2M^3$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення P	8,1	8,2	8,5	8,3	8,4	8,3	8,2	8,4
Значення M	6,2	6,3	6,2	6,3	6,5			
Завдання 2	Математична модель: $Y = 8,2 \cdot R \cdot H$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення R	15,5	15,6	15,3	15,2	15,6			
Значення H	7,8	7,7	7,8	7,6	7,4	7,5	7,6	
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{9,3 \cdot T^3}{V^2}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення T	24,1	24,3	24,1	24,5	24,7	24,3	24,6	
Значення V	11,2							

Варіант 9.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 9,3M + 9,4D^2$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення M	9,4	9,3	9,4	9,2	9,3	9,2		
Значення D	7,5	7,7	7,5	7,8	7,6	7,5	7,6	
Завдання 2	Математична модель: $Y = 6,9 \cdot P \cdot L$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення P	14,5	14,6	14,2	14,3	14,4	14,5	14,6	
Значення L	12,9	12,4	12,7	12,3	12,7	12,5		
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{7,2 \cdot R^4}{S}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення R	2,2	2,3	2,2	2,1	2,2	2,4	2,3	2,2
Значення S	15,2							

Варіант 10.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 1,5D^3 - 2,6H$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення D	7,8	7,6	7,5	7,7	7,9			
Значення H	3,3	3,4	3,5	3,6	3,2	3,4		
Завдання 2	Математична модель: $Y = 7,2 \cdot S \cdot M$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення S	5,2	5,1	5,3	5,4	5,5	5,4		
Значення M	16,3	16,2	16,4	16,5	16,6	16,2	16,3	16,4
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{8,3 \cdot L^3}{P^2}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення L	4,5	4,3	4,5	4,5	4,3	4,3	4,2	
Значення P	16,4							

Варіант 11.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 3,7S^2 + 4,8T^4$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення S	3,2	3,1	3,2	3,3	3,1	3,3		
Значення T	1,5	1,8	1,7	1,9	1,6			
Завдання 2	Математична модель: $Y = 8,3 \cdot M \cdot V$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення M	11,4	11,2	11,2	11,3	11,5	11,4	11,2	
Значення V	20,5	20,6	20,5	20,4	20,6			
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{9,4 \cdot P^2}{L}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення P	12,2	12,4	12,4	12,3	12,5	12,4	12,4	12,3
Значення L	21,5							

Варіант 12.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 5,9B^3 - 6,1M^2$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення B	5,8	5,9	5,7	5,8	5,8			
Значення M	7,2	7,1	7,2	7,3	7,1	7,2	7,3	
Завдання 2	Математична модель: $Y = 9,4 \cdot D \cdot P$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення D	3,6	3,7	3,8	3,7	3,7	3,9		
Значення P	25,8	25,4	25,9	25,4	25,6			
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{1,5 \cdot R}{M^3}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення R	15,6	15,7	15,5	15,8	15,4	15,6	15,8	
Значення M	2,7							

Варіант 13.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 7,2M^2 + 8,3T^3$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення M	4,2	4,3	4,4	4,5	4,2	4,2	4,3	
Значення T	5,4	5,5	5,3	5,4	5,4			
Завдання 2	Математична модель: $Y = 11,5 \cdot S \cdot P$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення S	13,3	13,4	13,5	13,5	13,5	13,3	13,4	13,4
Значення P	26,3	26,4	26,4	26,4	26,5	26,3		
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{2,6 \cdot H^4}{L^2}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення H	7,7	7,8	7,6	7,5	7,6	7,6		
Значення L	17,3							

Варіант 14.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 9,4P - 0,5M^4$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення P	12,1	12,4	12,2	12,3	12,4	12,3	12,3	12,4
Значення M	2,8	2,7	2,8	2,9	2,7	2,9		
Завдання 2	Математична модель: $Y = 2,6 \cdot R \cdot H$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення R	6,9	6,8	6,7	6,7	6,8			
Значення H	13,3	13,1	13,2	13,3	13,4	13,3		
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{3,7 \cdot T^3}{V}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення T	3,8	3,9	3,7	3,7	3,7	3,9		
Значення V	9,4							

Варіант 15.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 1,6M^3 + 2,7D^4$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення M	5,2	5,1	5,1	5,2	5,3	5,3		
Значення D	3,5	3,7	3,5	3,6	3,7	3,5	3,6	3,7
Завдання 2	Математична модель: $Y = 3,7 \cdot P \cdot L$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення P	2,5	2,6	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6	
Значення L	18,8	18,7	18,7	18,8	18,6			
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{4,8 \cdot R^2}{S^3}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення R	6,9	6,5	6,8	6,9	6,5	6,9	6,8	
Значення S	16,5							

Варіант 16.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 3,8D^3 - 4,9H^2$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення D	6,5	6,2	6,3	6,1	6,4			
Значення H	9,5	9,6	9,5	9,7	9,8	9,5	9,6	9,6
Завдання 2	Математична модель: $Y = 4,8 \cdot S \cdot M$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення S	16,1	16,5	16,2	16,5	16,3	16,4		
Значення M	8,5	8,8	8,9	8,7	8,8	8,6	8,9	
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{5,9 \cdot L}{P^2}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення L	25,1	25,3	25,2	25,3	25,4	25,1	25,3	25,1
Значення P	17,9							

Варіант 17.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 5,1S^2 + 6,2T^3$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення S	8,3	8,4	8,5	8,4	8,3	8,5	8,4	
Значення T	4,1	4,3	4,2	4,1	4,3			
Завдання 2	Математична модель: $Y = 5,9 \cdot M \cdot V$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення M	17,6	17,7	17,6	17,8	17,9	17,8	17,6	17,7
Значення V	5,1	5,2	5,5	5,4	5,5	5,1	5,2	
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{6,3 \cdot P^4}{L}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення P	1,6	1,6	1,8	1,7	1,6	1,8		
Значення L	18,4							

Варіант 18.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 7,3B^4 - 8,4M^3$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення B	1,9	1,7	1,7	1,8	1,7	1,9	1,8	1,9
Значення M	2,4	2,5	2,6	2,4	2,6	2,5		
Завдання 2	Математична модель: $Y = 6,3 \cdot D \cdot P$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення D	18,3	18,4	18,1	18,2	18,3			
Значення P	6,6	6,7	6,8	6,5	6,6	6,7	6,5	
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{7,4 \cdot R^3}{M^3}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення R	6,3	6,4	6,3	6,5	6,6	6,5	6,6	
Значення M	4,3							

Варіант 19.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 7,2M^2 + 8,3T^3$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення M	4,3	4,4	4,5	4,6	4,6	4,7		
Значення T	3,9	3,7	3,7	3,8	3,7	3,5	3,6	
Завдання 2	Математична модель: $Y = 11,5 \cdot S \cdot P$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення S	20,5	20,6	20,4	20,3	20,5	20,6	20,7	
Значення P	7,1	7,3	7,2	7,1	7,2	7,1		
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{2,6 \cdot H^4}{L^2}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення H	8,6	8,2	8,2	8,4	8,3	8,4	8,2	8,3
Значення L	9,7							

Варіант 20.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 1,7P^2 - 2,8M^3$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення P	7,4	7,3	7,2	7,4	7,2			
Значення M	4,5	4,6	4,6	4,7	4,5	4,7		
Завдання 2	Математична модель: $Y = 8,5 \cdot R \cdot H$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення R	21,7	21,9	21,8	21,7	21,7	21,6		
Значення H	2,5	2,7	2,6	2,6	2,5	2,5	2,8	2,7
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{9,6 \cdot T^4}{V^3}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення T	5,9	5,8	5,9	5,6	5,8	5,9	5,8	
Значення V	9,1							

Варіант 21.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 3,9M + 4,1D^2$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення M	10,2	10,3	10,1	10,2	10,3	10,1		
Значення D	5,1	4,9	5,2	5,2	5,1			
Завдання 2	Математична модель: $Y = 9,6 \cdot P \cdot L$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення P	6,8	7,1	6,9	6,8	7,1	6,9	6,9	
Значення L	12,5	12,7	12,8	12,6	12,8			
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{1,7 \cdot R^4}{S^2}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення R	4,6	4,7	4,8	4,9	5,1	4,8	4,9	4,9
Значення S	17,2							

Варіант 22.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 5,2D^3 - 6,3H$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення D	1,9	2,1	2,2	2,2	2,1			
Значення H	3,8	3,8	4,1	3,8	4,1	3,8	3,9	
Завдання 2	Математична модель: $Y = 1,7 \cdot S \cdot M$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення S	5,9	5,4	5,8	5,6	5,9	5,8		
Значення M	27,3	27,5	27,4	27,5	27,5			
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{2,8 \cdot L^3}{P}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення L	1,1	1,3	1,2	1,4	1,5	1,2	1,3	
Значення P	26,4							

Варіант 23.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 7,4S^2 + 8,5T^4$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення S	5,1	5,1	5,2	5,3	5,4	5,1	5,2	
Значення T	1,6	1,7	1,6	1,8	1,8			
Завдання 2	Математична модель: $Y = 2,8 \cdot M \cdot V$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення M	4,6	4,8	4,7	4,9	4,9	4,7	4,8	4,9
Значення V	28,5	28,4	28,8	28,9	28,6	28,7		
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{3,9 \cdot P^2}{L^3}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення P	2,9	2,7	2,8	2,9	2,9	2,7		
Значення L	7,6							

Варіант 24.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 9,6B^2 - 1,7M^3$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення B	7,9	7,6	7,7	7,8	7,8	7,9	7,8	7,9
Значення M	2,2	2,3	2,4	2,2	2,4			
Завдання 2	Математична модель: $Y = 3,9 \cdot D \cdot P$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення D	6,5	6,6	6,4	6,6	6,6			
Значення P	31,5	31,6	31,6	31,4	31,5	31,6		
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{4,1 \cdot R}{M^2}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення R	24,7	24,9	24,8	24,7	24,7	24,9		
Значення M	8,9							

Варіант 25.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 2,8M^3 + 3,9T^2$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення M	9,2	9,2	9,5	9,4	9,3	9,2		
Значення T	3,3	3,5	3,3	3,7	3,2	3,4	3,3	3,5
Завдання 2	Математична модель: $Y = 4,1 \cdot S \cdot P$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення S	2,5	2,6	2,4	2,7	2,4	2,4	2,4	
Значення P	28,8	28,8	28,7	28,7	28,5			
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{5,2 \cdot H^4}{L}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення H	7,2	7,1	7,3	7,2	7,5	7,2	7,3	
Значення L	36,1							

Варіант 26.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 4,1P^2 - 5,2M$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення P	2,7	2,6	2,3	2,4	2,5			
Значення M	5,1	5,4	5,3	5,2	5,5	5,4	5,2	5,3
Завдання 2	Математична модель: $Y = 5,2 \cdot R \cdot H$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення R	3,5	3,8	3,9	3,8	3,5	3,6		
Значення H	14,3	14,7	14,4	14,6	14,3	14,2	14,3	
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{4,5 \cdot T^3}{V^2}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення T	6,2	6,2	6,3	6,2	6,6	6,3	6,5	6,5
Значення V	7,25							

Варіант 27.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 6,3M + 1,4D^4$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення M	3,7	3,6	3,7	3,5	3,9	3,9	3,6	
Значення D	4,2	4,4	4,2	4,3	4,4			
Завдання 2	Математична модель: $Y = 2,4 \cdot P \cdot L$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення P	12,3	12,5	12,6	12,5	12,6	12,4	12,3	12,6
Значення L	35,6	35,8	35,7	35,7	35,8	35,9	35,7	
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{7,5 \cdot R^2}{S}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення R	21,5	21,2	21,3	21,4	21,5	21,6		
Значення S	6,4							

Варіант 28.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 8,5D^3 - 9,6H^2$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення D	1,1	1,2	1,5	1,3	1,4	1,3	1,2	1,4
Значення H	9,4	9,3	9,5	9,8	9,5			
Завдання 2	Математична модель: $Y = 7,5 \cdot S \cdot M$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення S	16,5	16,6	16,3	16,2	16,6			
Значення M	2,6	2,7	2,6	2,4	2,5	2,8	2,7	
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{8,6 \cdot L}{P^3}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення L	29,2	29,3	29,1	29,5	29,7	29,3	29,6	
Значення P	3,2							

Варіант 29.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 6,7S + 3,1T^4$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення S	8,4	8,3	8,4	8,2	8,3	8,2		
Значення T	1,5	1,7	1,5	1,8	1,6	1,5	1,6	
Завдання 2	Математична модель: $Y = 8,6 \cdot M \cdot V$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення M	18,5	18,6	18,2	18,3	18,4	18,5	18,7	
Значення V	2,9	2,4	2,7	2,3	2,7	2,5		
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{9,7 \cdot P^4}{L^2}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення P	7,2	7,3	7,2	7,1	7,2	7,4	7,3	7,2
Значення L	18,3							

Варіант 30.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 2,9B - 3,1M^4$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення B	27,4	27,3	27,2	27,4	27,2			
Значення M	1,5	1,6	1,6	1,7	1,5	1,7		
Завдання 2	Математична модель: $Y = 9,7 \cdot D \cdot P$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення D	7,7	7,9	7,8	7,7	7,7	7,6		
Значення P	18,5	18,7	18,6	18,6	18,5	18,5	18,8	18,7
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{7,1 \cdot R^3}{M}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення R	2,9	2,8	2,9	2,6	2,8	2,9	2,8	
Значення M	26,1							

5.3 Приклад виконання контрольного завдання

Для наведених у таблиці математичних моделей вимірювань та результатів вимірювань вхідних величин розрахуйте значення усіх коефіцієнтів чутливості.

Варіант 0.

Завдання 1	Математична модель: $Y = 4,2A + 5,7B^3$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення A	8,6	8,2	8,3	8,4	8,5			
Значення B	1,2	1,5	1,3	1,6				
Завдання 2	Математична модель: $Y = 15,2 \cdot D \cdot P$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення D	5,7	5,5	5,3	5,3	5,4	5,6		
Значення P	20,6	20,3	20,4	20,5	20,6	20,4	20,7	20,4
Завдання 3	Математична модель: $Y = \frac{3,5M}{D^3}$							
№ вимірюв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення M	9,4	9,2	9,4	9,3				
Значення D	2,1							

Розв'язання задачі 1.

Маємо математичну модель вимірювань: $Y = 4,2A + 5,7B^3$.

Вихідна (вимірювана) величина Y залежить від двох вхідних величин A та B : $Y = f(A, B)$. Тобто потрібно обчислити два коефіцієнта чутливості c_A і c_B . За умовами задачі:

Значення A	8,6	8,2	8,3	8,4	8,5
Значення B	1,2	1,5	1,3	1,6	

Середні значення цих величин дорівнюють:

$$\bar{A} = \frac{8,6 + 8,2 + 8,3 + 8,4 + 8,5}{5} = 8,4; \quad \bar{B} = \frac{1,2 + 1,5 + 1,3 + 1,6}{4} = 1,4.$$

Тому в формули, що отримаємо в результаті обчислення частинних похідних будемо підставляти значення: $\hat{A} = 8,4$ і $\hat{B} = 1,4$.

Коефіцієнт c_A обчислимо як частинну похідну від функції $Y = 4,2A + 5,7B^3$ за змінною A (при цьому величину B вважаємо константою):

$$c_A = \frac{\partial Y}{\partial A} = (4,2A + 5,7B^3)'_A = 4,2 \cdot 1 + 0 = 4,2.$$

Примітка 1. Таблицю похідних, основні правила диференціювання, та правила отримання частинних похідних див. у Додатках 5-7.

Примітка 2. В цьому розрахунку нам не довелося підставляти значення $a = 8,4$ і $b = 1,4$ тому, що в результаті обчислення частинної похідної зникли змінні і залишилися лише константи.

Коефіцієнт c_B обчислимо як частинну похідну від функції $Y = 4,2A + 5,7B^3$ за змінною B (при цьому величину A вважаємо константою):

$$c_B = \frac{\partial Y}{\partial B} = (4,2A + 5,7B^3)'_B = 0 + 5,7 \cdot 3B^2|_{B=1,4} = 33,516 \approx 33,5.$$

Відповідь: $c_A = 4,2$; $c_B = 33,5$.

Розв'язання задачі 2.

Маємо модельне рівняння: $Y = 15,2 \cdot D \cdot P$.

Вихідна вимірювана величина Y залежить від двох вхідних величин D та P : $Y = f(D, P)$. Тобто потрібно обчислити два коефіцієнта чутливості c_D і c_P . За умовами задачі:

Значення D	5,7	5,5	5,3	5,3	5,4	5,6		
Значення P	20,6	20,3	20,4	20,5	20,6	20,4	20,7	20,4

Середнє значення цих величин дорівнює:

$$\bar{D} = \frac{5,7 + 5,5 + 5,3 + 5,3 + 5,4 + 5,6}{6} = 5,46666 \approx 5,47;$$

$$\bar{P} = \frac{20,6 + 20,3 + 20,4 + 20,5 + 20,6 + 20,4 + 20,7 + 20,4}{8} = 20,4875 \approx 20,49.$$

Тому в формули, що отримаємо в результаті обчислення частинних похідних будемо підставляти: $d = 5,47$ і $p = 20,49$.

Коефіцієнт c_D обчислимо як частинну похідну від функції $Y = 15,2 \cdot D \cdot P$ за змінною D (при цьому величину P вважаємо константою):

$$c_D = \frac{\partial Y}{\partial D} = (15,2 \cdot D \cdot P)'_D = 15,2 \cdot 1 \cdot P|_{P=20,49} \approx 311,4.$$

Коефіцієнт c_P обчислимо як частинну похідну від функції $Y = 15,2 \cdot D \cdot P$ за змінною P (при цьому величину D вважаємо константою):

$$c_P = \frac{\partial Y}{\partial P} = (15,2 \cdot D \cdot P)'_P = 15,2 \cdot D \cdot 1 \Big|_{\hat{D}=5,47} \approx 83,1.$$

Відповідь: $c_D = 311,4$; $c_P = 83,1$.

Розв'язання задачі 3.

Маємо модель вимірювань: $Y = \frac{3,5M}{D^3}$.

Вихідна вимірювана величина Y залежить від двох вхідних величин M та D : $Y = f(M, D)$. Тобто потрібно обчислити два коефіцієнта чутливості c_M і c_D . За умовами задачі:

Значення M	9,4	9,2	9,4	9,3
Значення D	2,1			

Середнє значення цих величин дорівнює:

$$\bar{M} = \frac{9,4 + 9,2 + 9,4 + 9,3}{4} = 9,325 \approx 9,33; \quad \hat{D} = 2,1.$$

Тому в формули, що отримаємо в результаті обчислення частинних похідних будемо підставляти: $\hat{M} = 9,33$ і $\hat{D} = 2,1$.

Коефіцієнт c_M обчислимо як частинну похідну від функції $Y = \frac{3,5M}{D^3}$ за змінною M (при цьому величину D вважаємо константою):

$$c_M = \frac{\partial Y}{\partial M} = \left(\frac{3,5M}{D^3} \right)'_M = \left(\frac{3,5}{D^3} \cdot M \right)'_M = \frac{3,5}{D^3} \Big|_{\hat{D}=2,1} \approx 0,4.$$

Коефіцієнт c_D обчислимо як частинну похідну від функції $Y = \frac{3,5M}{D^3}$ за змінною D (при цьому величину M вважаємо константою):

$$c_D = \frac{\partial Y}{\partial D} = \left(\frac{3,5M}{D^3} \right)'_D = \left((3,5M) \cdot D^{-3} \right)'_D = 3,5M \cdot (-3) D^{-4} \Big|_{\hat{M}=9,33, \hat{D}=2,1} \approx -5,0.$$

Відповідь: $c_M = 0,4$; $c_D = -5$.

6 ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ НЕПРЯМИХ ВИМІРЮВАНЬ

6.1 Основні теоретичні відомості

Оцінювання невизначеності непрямих вимірювань проводиться відповідно до базового алгоритму GUM [3].

1. Математична модель непрямих вимірювань має вигляд:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N), \quad (6.1)$$

де Y – вимірювана величина; $X_1, X_2, \dots, X_N$ – вхідні величини.

2. Оцінювання вхідних величин.

Значення вхідних величин знаходять шляхом їх вимірювання з одноразовими (одиничними) або багаторазовими (повторними) спостереженнями або беруть із зовнішніх джерел.

При проведенні багаторазових вимірювань за значення i -ї вхідної величини приймають середнє арифметичне результатів ряду її окремих спостережень:

$$x_i = \bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n x_{iq}. \quad (6.2)$$

3. Обчислення оцінки результату вимірювання.

Оцінку вимірюваної величини y отримують при підстановці в модельне рівняння оцінок вхідних величин $x_1, x_2, \dots, x_N$:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N). \quad (6.3)$$

4. Обчислення стандартних невизначеностей вхідних величин.

4.1. Стандартна невизначеність вимірювання типу A i -ї вхідної величини X_i знаходиться за формулою:

$$u_A(\bar{x}_i) = \sqrt{\frac{1}{n_i(n_i - 1)} \sum_{q=1}^{n_i} (x_{iq} - \bar{x}_i)^2} \quad (6.4)$$

де n_i – кількість спостережень, які виконуються при вимірюванні X_i .

4.2. Стандартна невизначеність вимірювання типу B i -ї вхідної величини залежить від апіорної інформації про мінливість вхідної ве-

личини, яка виражена або стандартним відхиленням s ; або нижньою a^- і верхньою a^+ границями інтервалу, в межах якого знаходяться можливі її значення; або розширеною невизначеністю U .

5. Обчислення внеску невизначеності вхідної величини в невизначеність вимірюваної величини.

Внесок невизначеності кожної вхідної величини $u(x_i)$ в невизначеність вимірюваної величини $u_i(y)$ (сумарну стандартну невизначеність) визначають як добуток $u(x_i)$ на коефіцієнт чутливості c_i :

$$u_i(y) = c_i u(x_i). \quad (6.5)$$

Коефіцієнти чутливості c_i показують, як оцінка вихідної величини y буде змінюється зі зміною оцінок вхідних величин x_i . Їх знаходять як частинні похідні вихідної величини по кожній з вхідних величин (див. розділ 5):

$$c_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial Y}{\partial X_i} \bigg|_{x_1, x_2, \dots, x_N}. \quad (6.6)$$

6. Обчислення стандартної невизначеності вихідної величини (сумарної стандартної невизначеності).

Обчислення сумарної стандартної невизначеності здійснюється за формулою, яку називають законом поширення невизначеностей і коваріацій:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i) + 2r_{lm} c_l c_m u(x_l) u(x_m)}, \quad (6.7)$$

де r_{lm} – коефіцієнт кореляції між результатами вимірювань l -ї та m -ї вхідних величин, який розраховується за формулою:

$$r_{i,j} = \frac{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{q=1}^n (x_{iq} - \bar{x}_i)(x_{mq} - \bar{x}_m)}{u_A(\bar{x}_i) u_A(\bar{x}_m)}. \quad (6.8)$$

На практиці обчислення коефіцієнта кореляції можна здійснювати в програмі «Excel», використовуючи функцію COREL. Коефіцієнти кореляції повинні даватись з точністю до третьої значущої цифри, якщо вони мають абсолютні значення, близькі до одиниці [3].

При обмеженому числі спостережень n потрібно перевірити його значущість для його подальшого урахування (або ігнорування) за критерієм Стюдента:

$$\frac{|r|}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{n-2} \geq t_{p;(n-2)}, \quad (6.9)$$

де $t_{p;(n-2)}$ – коефіцієнт Стюдента для ймовірності p та числі степенів свободи $(n-2)$.

При виконанні нерівності (6.9) коефіцієнт кореляції є значущим і повинен враховуватися при оцінюванні невизначеності вимірювань.

Залежність максимального значення коефіцієнта уявної кореляції, яка може бути присутня для двох наборів некорельованих даних з однаковим числом спостережень n наведена в Додатку 8.

7. Обчислення коефіцієнта охоплення.

Коефіцієнт охоплення k являє собою множник, на який множать оцінку стандартної сумарної стандартної невизначеності u_c для отримання розширеної невизначеності U .

При наявності вагомих внесків невизначеності типу A, GUM рекомендує брати в якості коефіцієнта охоплення **коефіцієнт Стюдента** для ймовірності 0,9545 і ефективного числа степенів свободи v_{eff} :

$$k = t_{0,9545;v_{eff}}. \quad (6.10)$$

При відсутності кореляції між результатами вимірювання вхідних величин ефективне число степенів свободи визначається за формулою Велча-Саттерсвейта [3]:

$$v_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{v_i}}. \quad (6.11)$$

де v_i – число степенів свободи i -ї вхідної величини.

При присутності кореляції між результатами вимірювання вхідних величин ефективне число степенів свободи потрібно визначати за формулою, отриманою авторами [10]:

$$v_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1, i \neq l \neq m}^N \frac{u_i^4(y)}{v_i} + \frac{[u_l^2(y) + 2r_{lm}u_l(y)u_m(y) + u_m^2(y)]^2}{n-1}}. \quad (6.12)$$

8. Обчислення розширеної невизначеності.

Розширену невизначеність U отримують за формулою:

$$U(y) = k \cdot u_c(y). \quad (6.13)$$

9. Запис повного результату вимірювання.

Повний результат вимірювання включає в себе оцінку вихідної величини y і приписане їй значення розширеної невизначеності U із зазначенням рівня довіри p :

$$Y = y \pm U, p = 0,9545. \quad (6.14)$$

10. Складання бюджету невизначеності.

Всі отримані в процесі оцінювання невизначеності непрямих вимірювань результати представляють у вигляді бюджету невизначеності (табл. 6.1).

Таблиця 6.1. Бюджет невизначеності непрямих вимірювань

Вхідні величини	Значення вхідних величин	Стандартні невизначеності вхідних величин	Число степенів свободи	Коефіцієнти чутливості	Внески невизначеності
X_1	x_1	$u_A(x_1)$	$n_1 - 1$	c_1	$u_{1A}(y)$
		$u_B(x_1)$	ν_{B1}		$u_{1B}(y)$
X_2	x_2	$u_A(x_2)$	$n_2 - 1$	c_2	$u_{2A}(y)$
		$u_B(x_2)$	ν_{B2}		$u_{2B}(y)$
...	...	...	...	...	...
		...	...		...
X_N	x_N	$u_{NA}(y)$	$n_N - 1$	c_N	$u_{NA}(y)$
		$u_{NB}(y)$	ν_{BN}		$u_{NB}(y)$
Вимірювана величина	Значення вимірюваної величини	Сумарна стандартна невизначеність	Ефективне число степенів свободи	Коефіцієнт охоплення	Розширена невизначеність
Y	y	$u_c(y)$	ν_{eff}	k	U

Всі величини повинні приводитися в бюджеті із зазначенням одиниць вимірювань.

6.2 Контрольні завдання

Для наведених в таблицях завдань результатів узгоджених вимірювань двох вхідних величин X_1 та X_2 , а також математичної моделі вимірювання у вигляді функції цих вхідних величин $Y = f(X_1, X_2)$, та границь максимально-допустимої похибки вимірювання цих величин θ_1, θ_2

$Y = f(X_1, X_2)$	X_1	x_{11}	x_{12}	$\dots$	x_{1n}	θ_1
	X_2	x_{21}	x_{22}	$\dots$	x_{2n}	θ_2

визначте:

1. Середні арифметичні $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$ (6.2).

2. Оцінку вимірюваної величини $y = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ (6.3).

3. Стандартні невизначеності типу A вхідних величин: $u_A(\bar{x}_1)$, $u_A(\bar{x}_2)$ (6.4).

4. Коефіцієнт кореляції $r_{1,2}$ (6.8) та його значущість за критерієм Стьюдента (6.9).

5. Стандартні невизначеності типу B вхідних величин:
 $u_B(x_1) = \frac{\theta_1}{\sqrt{3}}; u_B(x_2) = \frac{\theta_2}{\sqrt{3}}.$

6. Коефіцієнти чутливості $c_{X_1} = \frac{\partial Y}{\partial X_1} \Big|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2}$, $c_{X_2} = \frac{\partial Y}{\partial X_2} \Big|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2}$ (6.6).

7. Внески невизначеності типу A та B вимірювання X_1 та X_2 за формулою (6.5):

$$u_{AX_1}(y) = c_{X_1} u_A(\bar{x}_1); u_{BX_1}(y) = c_{X_1} u_B(x_1); u_{AX_2}(y) = c_{X_2} u_A(\bar{x}_2); u_{BX_2}(y) = c_{X_2} u_B(x_2).$$

8. Сумарну стандартну невизначеність $u_c(y)$ (6.7) розраховують без урахування можливої кореляції між результатами вимірювання вхідних величин за формулою:

$$u_{c1}(y) = \sqrt{c_1^2 u_B^2(x_1) + c_2^2 u_B^2(x_1) + c_1^2 u_A^2(\bar{x}_1) + c_2^2 u_A^2(\bar{x}_1)},$$

та з урахуванням можливої кореляції між результатами вимірювання вхідних величин за формулою:

$$u_{c2}(y) = \sqrt{c_1^2 u_B^2(x_1) + c_2^2 u_B^2(x_1) + c_1^2 u_A^2(\bar{x}_1) + c_2^2 u_A^2(\bar{x}_1) + 2r_{1,2} c_1 c_2 u_A(\bar{x}_1) u_A(\bar{x}_2)}.$$

9. Коефіцієнт охоплення k розраховується як коефіцієнт Стюдента для ймовірності 0,9545 і ефективного числа степенів свободи $\nu_{eff} : k = t_{0,9545; \nu_{eff}}$.

За відсутністю кореляції формула для ν_{eff} має вигляд (6.11):

$$\nu_{eff} = (n-1) \frac{u_c^4(y)}{u_{AX_1}^4(y) + u_{AX_2}^4(y)}.$$

При присутності кореляції формула для ν_{eff} має вигляд (6.12):

$$\nu_{eff} = (n-1) \frac{u_c^4(y)}{[u_{AX_1}^2(y) + 2r_{1,2}u_1(y)u_2(y) + u_{AX_2}^2(y)]^2}.$$

10. Розширену невизначеність вимірювань для рівня довіри $p=0,9545$ за формулою (6.13):

$$U(y) = k \cdot u_c(y).$$

11. Запишіть повний результат вимірювання у вигляді (6.14), дотримуючись правил округлення невизначеності та числового значення вимірюваної величини:

$$Y = y \pm U, p = 0,9545.$$

12. Складіть бюджет невизначеності (табл. 6.2).

Таблиця 6.2. Бюджет невизначеності непрямих вимірювань

Вхідні величини	Значення вхідних величин	Стандартна невизначеність вхідних величин	Число степенів свободи	Коефіцієнти чутливості	Внески невизначеності
X_1	x_1	$u_A(\bar{x}_1)$	$n-1$	c_1	$u_{1A}(y)$
		$u_B(x_1)$	ν_{B1}		$u_{1B}(y)$
X_2	x_2	$u_A(\bar{x}_2)$	$n-1$	c_2	$u_{2A}(y)$
		$u_B(x_2)$	ν_{B2}		$u_{2B}(y)$
Вимірювана величина	Значення вимірюваної величини	Сумарна стандартна невизначеність	Ефективне число степенів свободи	Коефіцієнт охоплення	Розширена невизначеність
Y	y	$u_c(y)$	ν_{eff}	k	U

Варіант 1. Непрямі вимірювання електричного опору R за результатами вимірювання напруги V та електричного струму I .

$R = \frac{V}{I}$	V , В	6,7	6,6	6,5	6,8	$\theta_V = 0,1$ В
	I , мА	15,3	15,2	15,1	15,0	$\theta_I = 0,1$ мА

Варіант 2. Непрямі вимірювання електричного опору R двох паралельно з'єднаних резисторів R_1 та R_2 за результатами окремих вимірювання їх значень.

$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$	R_1 , кОм	99,8	100,0	99,9	100,1	$\theta_1 = 0,2$ кОм
	R_2 , кОм	50,1	50,2	50,0	49,9	$\theta_2 = 0,2$ кОм

Варіант 3. Непрямі вимірювання електричної потужності W за результатами вимірювання напруги V та електричного струму I .

$W = V \cdot I$	V , В	6,7	6,6	6,5	6,4	6,8	$\theta_V = 0,2$ В
	I , мА	15,3	15,2	15,1	15,0	15,4	$\theta_I = 0,2$ мА

Варіант 4. Непрямі вимірювання тиску P за результатами вимірювання сили F та площини S поршня.

$P = \frac{F}{S}$	F , Н	12,6	12,8	12,4	12,2	$\theta_F = 0,1$ Н
	S , см ²	4,9	4,8	4,7	5,0	$\theta_S = 0,1$ см ²

Варіант 5. Непрямі вимірювання довжини шляху L за результатами вимірювання швидкості V та часу T .

$L = V \cdot T$	V , м/с	10,1	10,0	9,9	10,2	$\theta_V = 0,1$ м/с
	T , с	10,1	10,2	10,0	9,9	$\theta_T = 0,1$, с

Варіант 6. Непрямі вимірювання площини прямокутної стінки S за результатами вимірювання її довжини L та висоти H .

$S = L \cdot H$	L , м	10,01	10,00	9,99	9,98	$\theta_L = 0,01$ м
	H , м	5,01	5,00	4,99	5,02	$\theta_H = 0,01$ м

Варіант 7. Непрямі вимірювання електричної напруги V двох зустрічно послідовно з'єднаних джерел електричної напруги за результатами окремих вимірювання їх значень V_1 та V_2 .

$V = V_1 - V_2$	V_1 , В	12,1	12,0	11,9	12,2	$\theta_1 = 0,1$ В
	V_2 , В	14,9	15,0	15,1	14,8	$\theta_2 = 0,1$ В

Варіант 8. Непрямі вимірювання об'єму циліндра $V_{\text{ц}}$ за результатами вимірювання його діаметра D та висоти H .

$V_{\text{ц}} = \frac{\pi D^2}{4} \cdot H$	D , см	5,9	6,0	6,1	6,2	$\theta_D = 0,1$ см
	H , см	10,0	10,1	9,9	9,8	$\theta_H = 0,1$ см

Варіант 9. Непрямі вимірювання сумарної маси m двох вантажів за результатами одночасного вимірювання їх мас m_1 та m_2 .

$m = m_1 + m_2$	m_1 , г	21,01	21,00	20,99	20,98	$\theta_1 = 0,1$ г
	m_2 , г	17,50	17,51	17,51	17,52	$\theta_2 = 0,1$ г

Варіант 10. Непрямі вимірювання електричного струму I за результатами вимірювання опору резистора R та падіння напруги V .

$I = \frac{V}{R}$	R , Ом	16,7	16,6	16,5	16,8	$\theta_V = 0,2$ Ом
	V , В	5,3	5,2	5,1	5,0	$\theta_I = 0,2$ В

Варіант 11. Непрямі вимірювання електричної потужності W за результатами вимірювання напруги V та електричного опору R .

$W = \frac{V^2}{R}$	V , В	10,7	10,6	10,5	10,4	$\theta_V = 0,2$ В
	R , кОм	5,3	5,2	5,1	5,0	$\theta_R = 0,2$ кОм

Варіант 12. Непрямі вимірювання сили F за результатами вимірювання тиску P та площини S поршня.

$F = P \cdot S$	P , Н/см ²	22,6	22,8	22,4	22,2	$\theta_P = 0,2$ Н/см ²
	S , см ²	6,9	6,8	6,7	7,0	$\theta_S = 0,2$ см ²

Варіант 13. Непрямі вимірювання площини трикутника S за результатами вимірювання довжини його основи L та висоти H .

$S = \frac{L \cdot H}{2}$	L , см	15,01	15,00	14,99	14,98	$\theta_L = 0,02$ см
	H , см	10,01	10,00	9,99	10,02	$\theta_H = 0,02$ см

Варіант 14. Непрямі вимірювання об'єму конусу V_k за результатами вимірювання діаметра його основи D та висоти H .

$V_k = \frac{\pi D^2 H}{12}$	D , см	6,9	7,0	7,1	7,2	$\theta_D = 0,2$ см
	H , см	12,0	12,1	11,9	11,8	$\theta_H = 0,2$ см

Варіант 15. Непрямі вимірювання електричної напруги V за результатами вимірювання та опору R та електричного струму I .

$V = IR$	I , мА	5,7	5,5	5,3	5,1	$\theta_I = 0,2$ мА
	R , кОм	20,2	20,4	20,6	20,7	$\theta_R = 0,2$ кОм

Варіант 16. Непрямі вимірювання маси наважки m за результатами вимірювання маси наважки з тарою m_1 і маси тари m_2 .

$m = m_1 - m_2$	m_1 , г	210,1	210,0	209,9	209,8	$\theta_1 = 0,1$ г
	m_2 , г	175,0	175,1	174,9	175,2	$\theta_2 = 0,1$ г

Варіант 17. Непрямі вимірювання електричної потужності W за результатами вимірювання електричного струму I та опору R .

$W = I^2 \cdot R$	I , мА	5,7	5,6	5,5	5,4	$\theta_I = 0,15$ мА
	R , кОм	10,3	10,2	10,1	10,0	$\theta_R = 0,15$ кОм

Варіант 18. Непрямі вимірювання площини ромба S за результатами вимірювання його діагоналей d_1 та d_2 .

$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$	d_1 , дм	12,01	12,00	11,99	11,98	$\theta_1 = 0,02$ дм
	d_2 , дм	8,01	8,00	8,0	7,98	$\theta_2 = 0,02$ дм

Варіант 19. Непрямі вимірювання електричного опору R двох послідовно з'єднаних резисторів R_1 та R_2 за результатами окремих вимірювання їх значень.

$R = R_1 + R_2$	R_1 , кОм	12,6	12,8	12,4	12,2	$\theta_1 = 0,1$ кОм
	R_2 , кОм	4,9	4,8	4,7	5,0	$\theta_2 = 0,1$ кОм

Варіант 20. Знайти коефіцієнт пружності пружини K за результатами вимірювання прикладеної до неї сили F та відповідного зменшення її довжини X .

$K = \frac{F}{X}$	F , Н	30000	30001	30002	29999	$\theta_1 = 1$ Н
	X , см	8,0	8,1	8,2	7,8	$\theta_2 = 0,2$ см

Варіант 21. Непрямі вимірювання електричної напруги V двох послідовно з'єднаних джерел електричної напруги за результатами окремих вимірювання їх значень V_1 та V_2 .

$V = V_1 + V_2$	$V_1, \text{В}$	22,1	22,0	21,9	22,2	$\theta_1 = 0,15 \text{ В}$
	$V_2, \text{В}$	4,9	5,0	5,1	4,8	$\theta_2 = 0,15 \text{ В}$

Варіант 22. Непрямі вимірювання електричного струму I за результатами вимірювання напруги V та електричного опору R

$I = \frac{V}{R}$	$V, \text{В}$	126,8	126,6	126,5	126,4	$\theta_V = 0,15 \text{ В}$
	$R, \text{кОм}$	6,3	6,2	6,1	6,0	$\theta_R = 0,15 \text{ кОм}$

Варіант 23. Непрямі вимірювання електричного опору R двох паралельно з'єднаних резисторів R_1 та R_2 за результатами окремих вимірювання їх значень.

$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$	$R_1, \text{кОм}$	9,8	10,0	9,9	10,1	$\theta_1 = 0,2 \text{ кОм}$
	$R_2, \text{кОм}$	5,1	4,9	5,0	4,9	$\theta_2 = 0,2 \text{ кОм}$

Варіант 24. Непрямі вимірювання електричної потужності W за результатами вимірювання електричного струму I та опору R .

$W = I^2 \cdot R$	$I, \text{мА}$	25,7	25,6	25,5	25,4	$\theta_I = 0,1 \text{ мА}$
	$R, \text{Ом}$	12,3	12,2	12,1	12,1	$\theta_R = 0,1 \text{ Ом}$

Варіант 25. Непрямі вимірювання сили F за результатами вимірювання тиску P та площини S поршня.

$F = P \cdot S$	$P, \text{Н/см}^2$	17,6	17,8	17,4	17,5	$\theta_P = 0,15 \text{ Н/см}^2$
	$S, \text{см}^2$	3,9	3,8	4,1	4,0	$\theta_S = 0,15 \text{ см}^2$

Варіант 26. Непрямі вимірювання об'єму циліндра $V_{\text{ц}}$ за результатами вимірювання її діаметра D та висоти H .

$V_{\text{ц}} = \frac{\pi D^2}{4} \cdot H$	D , мм	79	80	81	82	$\theta_D = 1$ мм
	H , мм	55	54	53	53	$\theta_H = 1$ мм

Варіант 27. Непрямі вимірювання площини трикутника S за результатами вимірювання її довжини його основи L та висоти H .

$S = \frac{L \cdot H}{2}$	L , мм	160,1	160,0	159,9	159,8	$\theta_L = 0,2$ мм
	H , мм	82,1	82,0	81,9	81,7	$\theta_H = 0,2$ мм

Варіант 28. Непрямі вимірювання електричної потужності W за результатами вимірювання напруги V та електричного опору R .

$W = \frac{V^2}{R}$	V , В	25,1	25,0	25,1	25,0	$\theta_V = 0,1$ В
	R , Ом	15,3	15,2	15,3	15,3	$\theta_R = 0,1$ Ом

Варіант 29. Непрямі вимірювання довжини шляху L за результатами вимірювання швидкості V та часу T .

$L = V \cdot T$	V , км/год	60,1	60,2	60,1	60,0	$\theta_V = 0,1$ км/год
	T , год	1,72	1,71	1,72	1,72	$\theta_T = 0,1$ год

Варіант 30. Непрямі вимірювання об'єму конусу $V_{\text{к}}$ за результатами вимірювання діаметра його основи D та висоти H .

$V_{\text{к}} = \frac{\pi D^2 H}{12}$	D , мм	66,9	67,0	67,1	66,9	$\theta_D = 0,15$ мм
	H , см	82,0	82,1	82,2	81,9	$\theta_H = 0,15$ мм

6.3 Приклад виконання контрольного завдання

Для наведених в таблиці результатів узгоджених вимірювань шляху L та часу T , а також математичної моделі вимірювання швидкості $V = f(L, T)$, та границь максимально-допустимої похибки вимірювання цих величин θ_L, θ_T :

$V = \frac{L}{T}$	$L, \text{ м}$	100,1	100,0	99,9	100,1	$\theta_L = 0,1 \text{ м}$
	$T, \text{ с}$	10,02	10,01	9,99	10,02	$\theta_T = 0,01 \text{ с}$

були розраховані наступні оцінки.

1. Середні арифметичні значення вхідних величин:

$$\bar{L} = \frac{1}{4} \sum_{q=1}^4 L_q = \frac{100,1 + 100,0 + 99,9 + 100,1}{4} = 100,025 \text{ м};$$

$$\bar{T} = \frac{1}{4} \sum_{q=1}^4 T_q = \frac{10,02 + 10,01 + 9,99 + 10,02}{4} = 10,01 \text{ с}.$$

2. Оцінка швидкості:

$$\hat{V} = \frac{\bar{L}}{\bar{T}} = \frac{100,025}{10,01} = 9,9925 \text{ м/с}.$$

3. Стандартні невизначеності типу A:

$$u_A(\bar{L}) = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 3} \sum_{q=1}^4 (L_q - \bar{L})^2} = 0,0479 \text{ м}.$$

$$u_A(\bar{T}) = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 3} \sum_{q=1}^4 (T_q - \bar{T})^2} = 0,00707 \text{ с}.$$

4. Коефіцієнт кореляції $r_{L,T}$ між результатами багаторазових вимірювань L і T , які наведені в таблиці, був розрахований за допомогою Excel і склав значення 0,985. Перевірка цього значення на значимість за допомогою критерія Стьюдента (6.9) показала, що:

$$\frac{|0,985|}{\sqrt{1 - 0,985^2}} \sqrt{4 - 2} = 8,1 > t_{0,9545; (4-2)} = 4,53,$$

тобто $r_{L,T}$ є значущим і кореляцію між L і T потрібно враховувати.

5. Стандартні невизначеності типу B $u_B(\hat{L})$, $u_B(\hat{T})$ якщо границя максимально-допустимої похибки вимірювання L становить $\theta_L = 0,1$ м, а границя максимально-допустимої похибки вимірювання T становить $\theta_T = 0,01$ с будуть дорівнювати:

$$u_B(L) = \frac{\theta_L}{\sqrt{3}} = \frac{0,1}{\sqrt{3}} = 0,05774 \text{ м}; \quad u_B(\hat{T}) = \frac{\theta_T}{\sqrt{3}} = \frac{0,01}{\sqrt{3}} = 0,005774 \text{ с.}$$

6. Коефіцієнти чутливості:

$$c_L = \frac{\partial V}{\partial L} = \frac{\partial \left(\frac{L}{T} \right)}{\partial L} = \frac{1}{T} = \frac{1}{10,01} = 0,0999 \text{ с}^{-1}.$$

$$c_T = \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{\partial \left(\frac{L}{T} \right)}{\partial T} = -\frac{L}{T^2} = -\frac{100,025}{10,01^2} = -0,9983 \text{ м/с}^2.$$

7. Внески невизначеності вимірювання L та T у вимірювання швидкості:

$$u_{AL}(\hat{V}) = c_L u_A(\bar{L}) = 0,0999 \cdot 0,0479 = 0,00478 \text{ м/с};$$

$$u_{BL}(V) = c_L u_B(L) = 0,0999 \cdot 0,05774 = 0,00577 \text{ м/с.}$$

$$u_{AT}(V) = c_T u_A(\bar{T}) = -0,9983 \cdot 0,00707 = -0,00706 \text{ м/с};$$

$$u_{BT}(V) = c_T u_B(T) = -0,9983 \cdot 0,00577 = -0,00576 \text{ м/с.}$$

8. Сумарна стандартна невизначеність без урахування кореляції:

$$u_{c1}(V) = \sqrt{u_{AL}^2(\hat{V}) + u_{BL}^2(\hat{V}) + u_{AT}^2(\hat{V}) + u_{BT}^2(\hat{V})} = \\ = \sqrt{0,00478^2 + 0,00577^2 + (-0,00706)^2 + (-0,00576)^2} = 0,0118 \text{ м/с.}$$

Сумарна стандартна невизначеність з урахуванням кореляції:

$$u_{c2}(V) = \sqrt{u_{AL}^2(\hat{V}) + u_{BL}^2(\hat{V}) + u_{AT}^2(\hat{V}) + u_{BT}^2(\hat{V}) + 2r_{L,T} u_{AL}(\hat{V}) u_{AT}(\hat{V})} = \\ = [0,00478^2 + 0,00577^2 + (-0,00706)^2 + (-0,00576)^2 + \\ + 2 \cdot 0,985 \cdot 0,00478 \cdot (-0,00706)]^{0,5} = 0,00853 \text{ м/с.}$$

9. Ефективне число степенів свободи без урахування кореляції:

$$v_{\text{eff}} = \frac{(n-1)u_c^4(V)}{u_{AL}^4(V) + u_{AT}^4(V)} = \frac{3 \cdot 0,0118^4}{0,00478^4 + (-0,00706)^4} = 19,3.$$

Коефіцієнт охоплення, розрахований як коефіцієнт Стюдента для ймовірності 0,9545 і ефективного числа степенів свободи 19,3 буде дорівнювати 2,14.

Ефективне число степенів свободи з урахуванням кореляції:

$$v_{eff} = \frac{(n-1)u_c^4(V)}{[u_{AL}^2(V) + u_{AT}^2(V) + 2r_{LT}u_{AL}(V)u_{AT}(V)]^2} = \frac{3 \cdot 0,00853^4}{[0,00478^2 + (-0,00706)^2 + 2 \cdot 0,985 \cdot 0,00478 \cdot (-0,00706)]^2} = 411.$$

Коефіцієнт охоплення, розрахований як коефіцієнт Стюдента для ймовірності 0,9545 і ефективного числа степенів свободи 411 буде дорівнювати 2,006.

10. Розширена невизначеність вимірювань $U(V)$ для рівня довіри $p=0,9545$ без урахування кореляції буде дорівнювати:

$$U(V) = 2,14 \cdot 0,0118 = 0,025 \text{ м/с.}$$

. Розширена невизначеність вимірювань $U(V)$ для рівня довіри $p=0,9545$ з урахуванням кореляції буде дорівнювати:

$$U(V) = 2,006 \cdot 0,00853 = 0,0171 \text{ м/с.}$$

14. Оскільки згідно з п. 4 кореляцію потрібно враховувати, повний результат вимірювання запишеться як:

$$V = (10,000 \pm 0,017) \text{ м/с, } p=0,9545.$$

15. Бюджет невизначеності для цього випадку наведений в табл. 6.2.

Таблиця 6.2. Бюджет невизначеності непрямих вимірювань швидкості

Вхідні величини	Значення вхідних величин	Стандартна невизначеність вхідних величин	Число степенів свободи	Коефіцієнти чутливості	Внески невизначеності, м/с
L	100,025 м	0,0479 м	3	0,0999 с ⁻¹	0,0478 м
		0,05774 м	∞		0,00577
T	10,01 с	0,00707 с	3	-0,9983 м/с ²	-0,00706
		0,005774 с	∞		-0,00577
Вимірювана величина	Значення вимірюваної величини, м/с	Сумарна стандартна невизначеність, м/с	Ефективне число степенів свободи	Коефіцієнт охоплення	Розширена невизначеність, м/с
V	9,9925	0,00853	411	2,01	0,0171

7 АВТОМАТИЗАЦІЯ РОЗРАХУНКІВ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ВИМІРЮВАНЬ

7.1 Основні теоретичні відомості

Спростити рутинні розрахунки оцінювання невизначеності вимірювань можна, розробивши, з урахуванням бюджету невизначеності вимірювань, програму у середовищі «Excel».

Перевагою використання програми «Excel» для автоматизації розрахунків невизначеності вимірювання є можливість безпосереднього обчислення внесків невизначеності без обчислення коефіцієнтів чутливості. Для цього використовується метод частинних прирощень, суть якого полягає у використанні формули:

$$u_i(y) = f\left[x_1, \dots, \left(x_i + \frac{u(x_i)}{2}\right), \dots, x_N\right] - f\left[x_1, \dots, \left(x_i - \frac{u(x_i)}{2}\right), \dots, x_N\right], \quad (7.1)$$

Ця формула витікає з виразу для внеску невизначеності i -ї вхідної величини в невизначеність вимірюваної величини (див. розділ 5), який визначають як добуток невизначеності вхідної величини на коефіцієнт чутливості c_i :

$$u_i(y) = c_i \cdot u(x_i). \quad (7.2)$$

Коефіцієнти чутливості – це числа, що показують, як оцінка вихідної величини y буде змінюватися зі зміною оцінок вхідних величин x_i . Їх знаходять як частинні похідні вихідної величини по кожній з вхідних величин:

$$c_i = \frac{\partial y}{\partial x_i}. \quad (7.3)$$

Замінюючи в формулі (7.3) диференціали ∂y , ∂x_i на їх прирощення Δ_y та Δ_i , цю похідну можна переписати у наступному вигляді:

$$c_i \approx \frac{\Delta_y}{\Delta_i} = \frac{f[x_1, \dots, (x_i + \Delta_i), \dots, x_N] - f[x_1, \dots, (x_i - \Delta_i), \dots, x_N]}{2\Delta_i}. \quad (7.4)$$

Якщо прийняти $\Delta_i = \frac{u(x_i)}{2}$, формула (7.2) прийме вигляд вираження (7.1).

Метод частинних прирощень ілюструється рис. 7.1.

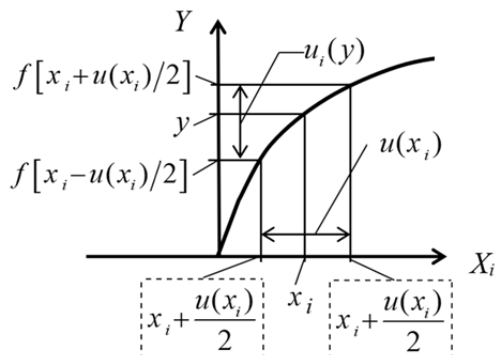


Рис. 7.1. Обчислення i -го внеску невизначеності методом частинних прирощень

З рисунка видно, що числовому значенню i -ї вхідної величини x_i відповідає значення вимірюваної величини y , а значенню невизначеності вимірювань $u(x_i)$ відповідає внесок невизначеності $u_i(y)$.

Після обчислення кожного внеску невизначеності легко розрахувати відповідний коефіцієнт чутливості за формулою:

$$c_i = \frac{u_i(y)}{u(x_i)}. \quad (7.5)$$

Розглянемо наведений в розділі 6 бюджет невизначеності прямого вимірювання величини Y , яка є функцією двох вхідних величин X_1, X_2 (табл. 7.1):

$$Y = f(X_1, X_2). \quad (7.6)$$

Кожній вхідній величині X_i відповідає її оцінка x_i , стандартні невизначеності типу A $u_A(\bar{x}_i)$ та типу B $u_B(x_i)$ з числом степенів свободи $\nu_{Ai} = n - 1$ та ν_{Bi} .

Таблиця 7.1. Бюджет невизначеності непрямих вимірювань

Вхідні величини	Значення вхідних величин	Стандартна невизначеність вхідних величин	Число степенів свободи	Коефіцієнти чутливості	Внески невизначеності
X_1	x_1	$u_A(\bar{x}_1)$	$n-1$	c_1	$u_{1A}(y)$
		$u_B(x_1)$	ν_{B1}		$u_{1B}(y)$
X_2	x_2	$u_A(\bar{x}_2)$	$n-1$	c_2	$u_{2A}(y)$
		$u_B(x_2)$	ν_{B2}		$u_{2B}(y)$
Вимірювана величина	Значення вимірюваної величини	Сумарна стандартна невизначеність	Ефективне число степенів свободи	Коефіцієнт охоплення	Розширена невизначеність
Y	y	$u_c(y)$	ν_{eff}	k	U

У цьому бюджеті є 4 внески:

- внесок типу A невизначеності вимірювання величини X_1 в невизначеність вимірювання величини Y :

$$u_{1A}(y) = f \left\{ \left[\bar{x}_1 + \frac{u_A(\bar{x}_1)}{2} \right], \bar{x}_2 \right\} - f \left\{ \left[\bar{x}_1 - \frac{u_A(\bar{x}_1)}{2} \right], \bar{x}_2 \right\}; \quad (7.7)$$

- внесок типу B невизначеності вимірювання величини X_1 в невизначеність вимірювання величини Y :

$$u_{1B}(y) = f \left\{ \left[\bar{x}_1 + \frac{u_B(x_1)}{2} \right], \bar{x}_2 \right\} - f \left\{ \left[\bar{x}_1 - \frac{u_B(x_1)}{2} \right], \bar{x}_2 \right\}; \quad (7.8)$$

- внесок типу A невизначеності вимірювання величини X_2 в невизначеність вимірювання величини Y :

$$u_{1A}(y) = f \left\{ \bar{x}_1, \left[\bar{x}_2 + \frac{u_A(\bar{x}_2)}{2} \right] \right\} - f \left\{ \bar{x}_1, \left[\bar{x}_2 - \frac{u_A(\bar{x}_2)}{2} \right] \right\}; \quad (7.9)$$

- внесок типу B невизначеності вимірювання величини X_2 в невизначеність вимірювання величини Y :

$$u_{1B}(y) = f\left\{\bar{x}_1, \left[\bar{x}_2 + \frac{u_B(x_2)}{2}\right]\right\} - f\left\{\bar{x}_1, \left[\bar{x}_2 - \frac{u_B(x_2)}{2}\right]\right\}. \quad (7.10)$$

Після знаходження цих внесків обчислюються відповідні коефіцієнти чутливості за формулою (7.5).

На основі даних з Прикладу 6.3 були розраховані наступні приклади оцінювання внесків невизначеності.

Приклад 7.1. Внесок невизначеності типу A вимірювання шляху в невизначеність вимірювання швидкості, обчислений за формулою (7.7) буде дорівнювати:

$$\begin{aligned} u_{LA}(\hat{V}) &= [\bar{L} + u_A(\bar{L})/2]/\bar{T} - [\bar{L} - u_A(\bar{L})/2]/\bar{T} = \\ &= (100,05 + 0,0479/2)/10,05 - (100,05 - 0,0479/2)/10,05 = 0,00478 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Приклад 7.2. Внесок невизначеності типу B вимірювання шляху в невизначеність вимірювання швидкості, обчислений за формулою (7.8) буде дорівнювати:

$$\begin{aligned} u_{LB}(\hat{V}) &= [\bar{L} + u_B(\hat{L})/2]/\bar{T} - [\bar{L} - u_B(\hat{L})/2]/\bar{T} = \\ &= [(100,05 + 0,05774/2)/10,05] - [(100,05 - 0,05774/2)/10,05] = 0,00577 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Приклад 7.3. Внесок невизначеності типу A вимірювання часу в невизначеність вимірювання швидкості, обчислений за формулою (7.9) буде дорівнювати:

$$\begin{aligned} u_{TA}(\hat{V}) &= \bar{L}/[(\bar{T} + u_A(\bar{T})/2)] - \bar{L}/[(\bar{T} - u_A(\bar{T})/2)] = \\ &= [100,05/(10,005 + 0,00707/2)] - [100,05/(10,005 - 0,00707/2)] = -0,00706 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Приклад 7.4. Внесок невизначеності типу A вимірювання часу в невизначеність вимірювання швидкості, обчислений за формулою (7.10) буде дорівнювати:

$$\begin{aligned} u_{TB}(\hat{V}) &= \bar{L}/[(\bar{T} + u_B(\hat{T})/2)] - \bar{L}/[(\bar{T} - u_B(\hat{T})/2)] = \\ &= [100,05/(10,005 + 0,005774/2)] - [100,05/(10,005 - 0,005774/2)] = -0,00577 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Після знаходження цих внесків обчислюються відповідні коефіцієнти чутливості за формулою (7.5):

$$c_L = \frac{u_{LA}(\hat{V})}{u_A(\bar{L})} = \frac{0,00478 \text{ м/с}}{0,0479 \text{ м}} = 0,0999 \text{ с}^{-1}; \quad c_T = \frac{u_{TA}(\hat{V})}{u_A(\bar{T})} = \frac{-0,00706 \text{ м/с}}{0,00707 \text{ м}} = -0,9983 \text{ с}^{-1}.$$

7.2 Контрольні завдання

Для наведених в таблицях 6 розділу варіантів завдань з результатами узгоджених вимірювань двох вхідних величин X_1 та X_2 , математичної моделі вимірювання у вигляді функції цих двох змінних $Y = f(X_1, X_2)$, та границями максимально-допустимої похибки вимірювання цих величин θ_1 , θ_2 , а також отриманих при виконанні цих завдань бюджетів невизначеності вимірювань, створіть в середовищі Excel програмний засіб для автоматизації оцінювання числового значення та розширеної невизначеності вимірювання заданої фізичної величини. Часто вживані функції програми “Excel” наведені в додатку 9.

7.3 Приклад виконання контрольного завдання

Для наведених в таблиці результатів узгоджених вимірювань шляху L та часу T , а також математичної моделі вимірювання швидкості $V = f(L, T)$, та границь максимально-допустимої похибки вимірювання цих величин θ_L, θ_T

$V = \frac{L}{T}$	$L, \text{ м}$	100,1	100,0	99,9	100,1	$\theta_L = 0,1 \text{ м}$
	$T, \text{ с}$	10,02	10,01	9,99	10,02	$\theta_T = 0,01 \text{ с}$

були розраховані оцінки вхідних величин $\bar{L}$, $\bar{T}$, їх стандартні невизначеності типу A $u_A(\bar{L})$, $u_A(\bar{T})$ та B $u_B(\hat{L})$, $u_B(\hat{T})$, коефіцієнт кореляції r , оцінка вимірюваної величини $\hat{V}$, сумарна стандартна невизначеність $u_c(\hat{V})$, коефіцієнт охоплення k та розширена невизначеність $U(\hat{V})$ та побудований бюджет невизначеності (табл. 7.2):

Таблиця 7.2. Бюджет невизначеності вимірювань швидкості

Вхідні величини	Значення вхідних величин	Стандартна невизначеність вхідних величин	Число степенів свободи	Коефіцієнти чутливості	Внески невизначеності, м/с
L	100,025 м	0,0479 м	3	0,0999 с ⁻¹	0,00478
		0,05774 м	∞		0,00577
T	10,01 с	0,00707 с	3	-0,9983 м/с ²	-0,00706
		0,005774 с	∞		-0,00576
Вимірювана величина	Значення вимірюваної величини, м/с	Сумарна стандартна невизначеність, м/с	Ефективне число степенів свободи	Коефіцієнт охоплення	Розширена невизначеність, м/с
V	9,9925	0,00853	411	2,01	0,0171

В Прикладі 7.5 наведено фрагмент вікна в програмі «Ексел» для бюджету вимірювання швидкості.

Приклад 7.5. Бюджет невизначеності вимірювань швидкості в Excel

	A	B	C	D	E	F
1	X_i	x_i	$u(x_i)$	v_i	c_i	$u_i(y)$
2	$L, \text{ м}$	100,025	0,0479	3	0,0999	0,00478
3			0,0577	100000	0,0999	0,00577
4	$T, \text{ с}$	10,01	0,00707	3	-0,09983	-0,00706
5			0,0577	100000	-0,09983	-0,00576
6	Y	y	$u_c(y)$	v_{eff}	$k_{0,9545}$	$U(y)$
7	$V, \text{ м/с}$	9,9925	0,00853	411	2,01	0,0171
8						
9	$T_q, \text{ с}$	$L, \text{ м}$	$\theta_T, \text{ с}$	$\theta_L, \text{ м}$	r	0,9847
10	10,02	100,1	0,01	0,1	$\frac{ r }{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{n-2}$	8
11	10,01	100			$t_{p,(n-2)}$	4,52655
12	9,99	99,9				
13	10,02	100,1				

Зміст комірок програми

Комірки	Зміст комірок
B2	=CPЗНАЧ(B10:B13)
B4	=CPЗНАЧ(A10:A13)
B7	= B2 / B4
C2	= СТАНДОТКЛОНА(B10:B13)/КОРЕНЬ(4)
C3	= D10/КОРЕНЬ(3)
C4	= СТАНДОТКЛОНА(A10:A13)/КОРЕНЬ(4)
C5	= C10/КОРЕНЬ(3)
C7	= КОРЕНЬ(F2^2+F3^2+F4^2+F5^2+2*F9*F2*F4)
D2	= 3
D3	= 1000000
D4	= 3
D5	= 1000000
D7	= C7^4/((F2^2+F4^2+2*F9*F2*F4)^2/D4+F3^4/D3+F5^4/D5)
E2	= F2/C2
E3	= F3/C3
E4	= F4/C4
E5	= F5/C5
E7	= СТЬЮДЕНТ.ОБР.2X(1-0,9545;D7)
F2	= (B2+C2/2)/B4-(B2-C2/2)/B4
F3	= (B2+C3/2)/B4-(B2-C3/2)/B4
F4	= B2/(B4+C4/2)-B2/(B4-C4/2)
F5	= B2/(B4+C5/2)-B2/(B4-C5/2)
F7	= E7*C7
F9	=КОРРЕЛ(A10:A13;B10:B13)
F10	= ABS(F9)/КОРЕНЬ(1-F9^2)*КОРЕНЬ(D2-1)
F11	= СТЬЮДЕНТ.ОБР.2X(1-0,9545;D2-1)

8 ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ВИМІРЮВАНЬ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

8.1 Основні теоретичні відомості

Метод Монте-Карло (ММК) є чисельною реалізацією закону розповсюдження розподілів (ЗРР). Суть ЗРР зображена на рис. 8.1 [4,11].

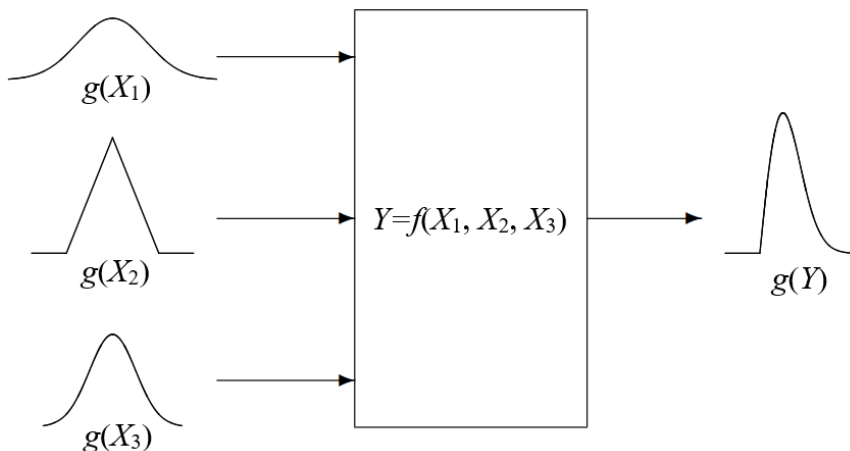


Рис. 8.1. Суть закону розповсюдження розподілів

ЗРР базується на використанні PDF вхідних величин для подальшого розрахунку PDF вихідної величини. Маючи PDF вихідної величини, можна визначити його математичне сподівання, що використовується як оцінка вихідної величини, і стандартне відхилення, яке використовується як стандартна невизначеність цієї оцінки. Крім того, PDF вихідної величини може бути використана для отримання інтервалу її охоплення, який відповідає заданій ймовірності.

Основні етапи оцінювання невизначеності вимірювань на основі ЗРР включають формулювання вимірювальної задачі, розповсюдження розподілів і отримання остаточного результату.

Формулювання вимірювального завдання включає:

- 1) завдання вихідної (вимірюваної) величини Y ;

2) виявлення вхідних величин $X_1, X_2, \dots, X_N$, від яких залежить вихідна величина Y ;

3) складання моделі вимірювання $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$, що визначає взаємозв'язок Y з вхідними величинами $X_1, X_2, \dots, X_N$;

4) приписування PDF вхідним величинам $g(X_1), g(X_2), \dots, g(X_N)$ (або спільного PDF величинам, які не є незалежними) на основі наявної інформації.

Розповсюдження PDF через модель передбачає визначення PDF вихідної величини $g(Y)$ на основі PDF вхідних величин $g(X_1), g(X_2), \dots, g(X_N)$ і моделі вимірювання $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$, яка використовується.

Отримання остаточного результату передбачає використання PDF вихідної величини $g(Y)$ для визначення:

- 1) оцінки математичного сподівання величини $E(Y)$ як оцінки y ;
- 2) оцінки стандартного відхилення величини Y у вигляді стандартної невизначеності $u(y)$, яка є асоційованою з y ;
- 3) інтервалу охоплення для величини Y , який відповідає заданій ймовірності охоплення p .

ММК, як чисельна реалізація ЗРР, полягає у виконанні операцій, наведених на (рис. 8.2) [11].

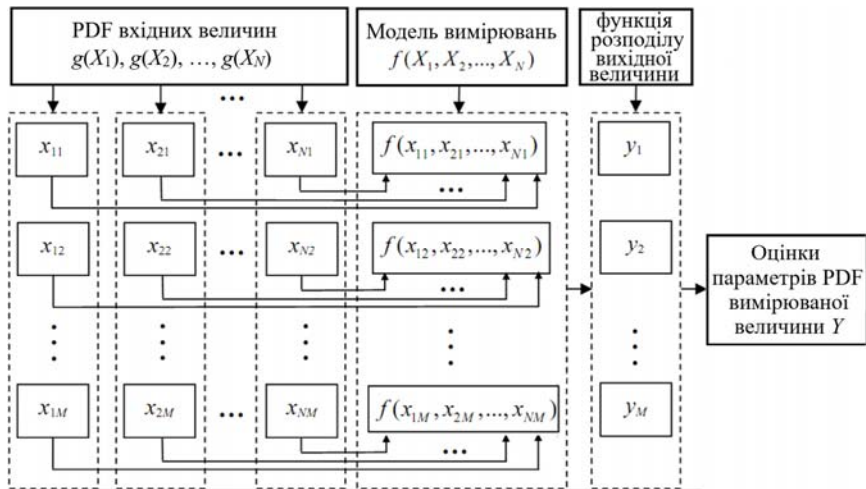


Рис. 8.2. Алгоритм реалізації метода Монте-Карло

1. Задають PDF для вхідних величин $g(X_1), g(X_2), \dots, g(X_N)$. Сподівання та стандартні відхилення цих PDF відповідають числовим значенням вхідних величин $x_1, x_2, \dots, x_N$ та їх стандартним невизначеностям $u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_N)$. Для корельованих вхідних величин задається спільна PDF із заданою матрицею невизначеності.

2. Генерують N наборів випадкових чисел $x_{1q}, x_{2q}, \dots, x_{Nq}$, об'ємом $M \geq 10^6$ кожний, що відповідають заданим в п.1 PDF вхідних величин.

3. Для встановленої моделі $f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ призводять перетворення кожної реалізації випадкових чисел $x_{1q}, x_{2q}, \dots, x_{Nq}$ ($q=1, 2, \dots, M$) для вхідних величин $X_1, X_2, \dots, X_N$ у відповідні реалізації вимірюваної величини $y_q = f(x_{1q}, x_{2q}, \dots, x_{Nq})$.

4. Ранжуванням отриманих реалізацій вимірюваної величини отримують набір значень $y_1, y_2, \dots, y_M$, що відповідає дискретному представленню функції розподілу $G_Y(\xi)$ для Y .

5. Використовують отримані значення $G_Y(\xi)$ для визначення оцінок:

- математичного сподівання $E(y)$:

$$E(y) = \frac{1}{M} \sum_{q=1}^M y_q ; \quad (8.1)$$

- стандартної невизначеності $u(y)$:

$$u(y) = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{q=1}^M (y_q - \bar{y})^2} ; \quad (8.2)$$

- розширеної невизначеності U_p , яка відповідає половині ширини імовірісно-симетричного інтервалу охоплення для заданого рівня довіри p :

$$U_p = \frac{1}{2} \left[y_{\frac{M(1+p)}{2}} - y_{\frac{M(1-p)}{2}} \right], \quad (8.3)$$

де $y_{\frac{M(1+p)}{2}}$ та $y_{\frac{M(1-p)}{2}}$ відповідно $\frac{M(1+p)}{2}$ та $\frac{M(1-p)}{2}$ члени ранжованого масиву даних вихідної величини $y_1, y_2, \dots, y_M$ (рис. 8.3);

- коефіцієнта охоплення:

$$k = \frac{U_p}{u(y)}. \quad (8.4)$$

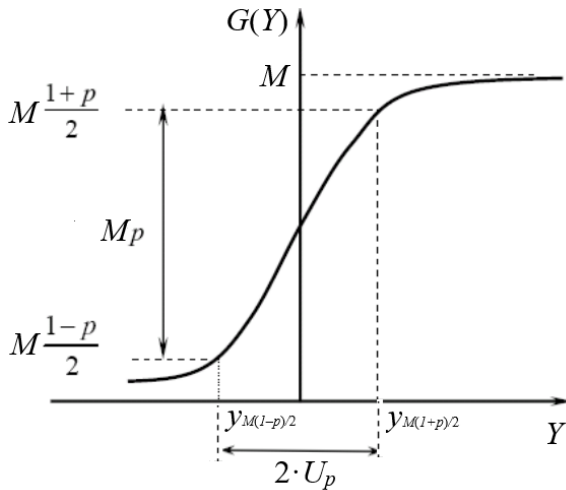


Рис. 8.3. Визначення інтервалу охоплення методом Монте-Карло

ММК дозволяє отримати однозначне представлення PDF вимірюваної величини для заданої моделі вимірювань і заданих PDF її вхідних величин. Вибір PDF вхідних величин на основі апіорної інформації про випадкову змінну наведений в Додатку 10.

8.2 Контрольні завдання

Для отриманих при виконанні варіантів завдань 6 розділу числових значень вхідних величин $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$, стандартних невизначеностей цих величин $u_A(\bar{x}_1)$, $u_A(\bar{x}_2)$, $u_B(x_1)$, $u_B(x_2)$, коефіцієнту кореляції $r_{1,2}$, а також заданих кількості спостережень n та математичної моделі вимірювань $Y = f(X_1, X_2)$, розрахуйте методом Монте-Карло за допомогою веб-додатку NIST Uncertainty Machine [12]:

- числове значення вимірюваної величини y ;
- сумарну стандартну невизначеність (стандартну невизначеність вимірюваної величини $u_c(y)$);
- розширену невизначеність для рівня довіри 0,9545 $U_{0,9545}$;
- коефіцієнт охоплення $k_{0,9545}$;
- наведіть рисунок PDF вимірюваної величини.

8.3 Приклад виконання контрольного завдання

Для отриманих при виконанні «Прикладу виконання контроль-ного завдання» 6 розділу (п. 6.3) числових значень шляху $\bar{L}=100,025$ м; та часу $\bar{T}=10,01$, стандартних невизначеностей цих величин $u_A(\bar{L})=0,0479$ м, $u_A(\bar{T})=0,00707$ с, $u_B(\hat{L})=0,05774$ м, $u_B(\hat{T})=0,005774$ с, коефіцієнта кореляції $r_{1,2}=0,985$ та заданої ма-тематичної моделі вимірювань швидкості $V = \frac{L}{T}$, розрахуймо мето-дом Монте-Карло числове значення y , стандартну $u(y)$ та розши-рену $U(y)$ невизначеності вимірювання заданої фізичної величини для рівня довіри 0,9545.

Для виконання цього завдання будемо використовувати веб-додаток NIST Uncertainty Machine [12]. Для цього математичну мо-дель вимірювань швидкості перепишемо у наступному вигляді:

$$V = \frac{L + \varepsilon_L}{T + \varepsilon_T},$$

де ε_L , ε_T – поправки на випадкові похибки вимірювання шляху L та часу T , математичне сподівання яких дорівнює 0. Цим поправ-кам приписується закони розподілу Стюдента з нульовими центром, коефіцієнтами масштабу $u_A(\bar{L})$ і $u_A(\bar{T})$, відповідно, а також числом степенів свободи $n-1$.

Оцінкам шляху L та часу T приписується рівномірний закон розподілу з математичними сподіваннями $\bar{L}$ і $\bar{T}$ та стандартними відхиленнями $u_B(\hat{L})$ і $u_B(\hat{T})$.

Порядок виконання завдання

1. В пункті 1 веб-додатку введіть кількість вхідних величин – 4 та їх параметри:

Величина x0: закон розподілу: “неперервний рівномірний розпо-діл (математичне сподівання 100.025, стандартне відхилення 0.05774)”;

Величина x1: закон розподілу: “t-розподіл (центр 0; коефіцієнт масштабу 0.0479; число ступенів вільності 3)”;

Величина x2: закон розподілу: “неперервний рівномірний розподіл (математичне сподівання 10.01, стандартне відхилення 0.005774)”;

Величина x3: закон розподілу: “t-розподіл (центр 0; коефіцієнт масштабу 0.00707; число ступенів вільності 3)”.

Кореляції: увімкнені, на перехресті X1-X3: 0.985

Student Copula (No. degrees of freedom) 3

2. В пункті 2 веб-додатку виберіть опції:

Кількість реалізацій отриманої величини: 5000000.

Симетричні інтервали покриття: включено.

3. Напишіть визначення отриманої величини:

$(x0+x1)/(x2+x3)$

1. Виберіть вхідні значення & Виберіть розподіли

Кількість вхідних величин: 4

Назви вхідних величин:

x0	x1	x2	x3
x0	Неперервний рівномірний розподіл (математичне споді	100.025	0.05774
x1	t-розподіл Стюдента(Центр, коефіцієнт масштабу, чис	0	0.0479
x2	Неперервний рівномірний розподіл (математичне споді	10.01	0.005774
x3	t-розподіл Стюдента(Центр, коефіцієнт масштабу, чис	0	0.00707

Кореляції ☒

	x0	x1	x2	x3
x0	1	0	0	0
x1		1	0	0.985
x2			1	0
x3				1

Student Copula (No. of degrees of freedom) 3

2. Виберіть Опції

Кількість реалізацій отриманої величини: 5000000

Сід генератора випадкових чисел(Випадкове початкове значення): 91

Симетричні інтервали покриття ☒

3. Напишіть визначення отриманої величини

Визначення отриманої величини (R-вираз):

$(x0+x1)/(x2+x3)$

4. Нажміть кнопку «Запустіть обчислення».

5. З вкладки “Результати 1”

математичне сподівання	= 9.99251
Стандартне відхилення	= 0.00923
медіана	= 9.99251
mad	= 0.00865
Інтервали покриття	
99% (9.9678, 10.017)	k = 2.7
95% (9.97474, 10.0103)	k = 1.9
90% (9.9777, 10.0073)	k = 1.6

запишіть:

- значення вимірюваної величини: 9,99251 м/с
- сумарна стандартна невизначеність: 0,00923 м/с.
- розширені невизначеності:

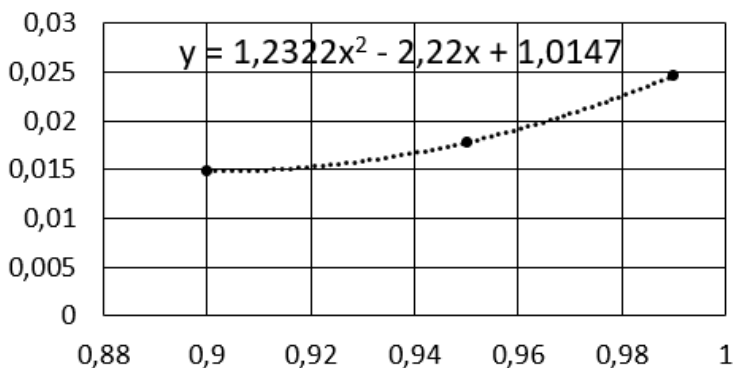
$$U_{0,99} = (10,017 - 9,9678)/2 = 0,0246 \text{ м/с};$$

$$U_{0,95} = (10,0103 - 9,97474)/2 = 0,01778 \text{ м/с};$$

$$U_{0,9} = (10,0073 - 9,9777)/2 = 0,0148 \text{ м/с}.$$

6. За отриманими даними будемо в Excel залежність $U_p = f(p)$:

Залежність $U_p = f(p)$



та за допомогою функції «Лінія тренду» апроксимуємо цю залежність поліномом 2-го ступеня:

$$U_p = a_0 + a_1 p + a_2 p^2,$$

де $a_0 = 1,0147$; $a_1 = -2,22$; $a_2 = 1,2322$.

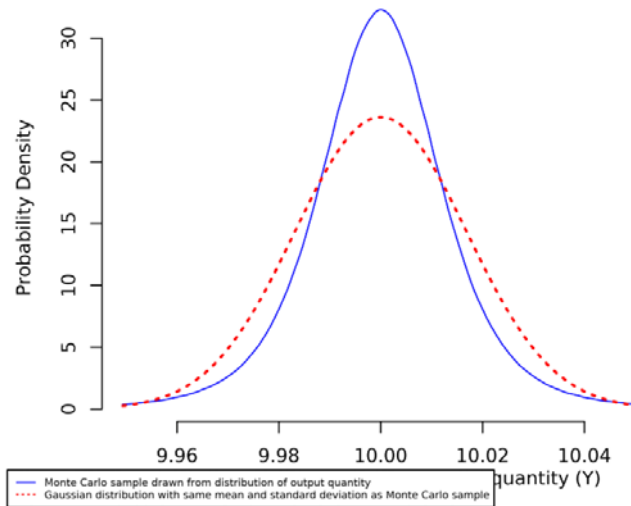
Підставляючи в поліном значення $p = 0,9545$, отримуємо:

$$U_{0,9545} = 0,018331 \text{ м/с.}$$

7. Розрахуймо коефіцієнт охоплення:

$$k_{0,9545} = \frac{U_{0,9545}}{u_c} = \frac{0,018331}{0,00923} = 1,986.$$

8. Наведіть рисунок PDF вимірюваної величини:



9. Якщо не враховувати кореляцію (у веб-додатку Кореляції – вимкнені), то отримаємо такі результати:

математичне сподівання	= 9.99253
Стандартне відхилення	= 0.0168
медіана	= 9.99252
mad	= 0.0142
Symmetrical coverage intervals	
99% (9.94193, 10.0431)	k = 3
95% (9.96113, 10.0239)	k = 1.9
90% (9.96763, 10.0174)	k = 1.5

- значення вимірюваної величини: 9,99253 м/с
сумарна стандартна невизначеність: 0,0168 м/с.

- розширені невизначеності:

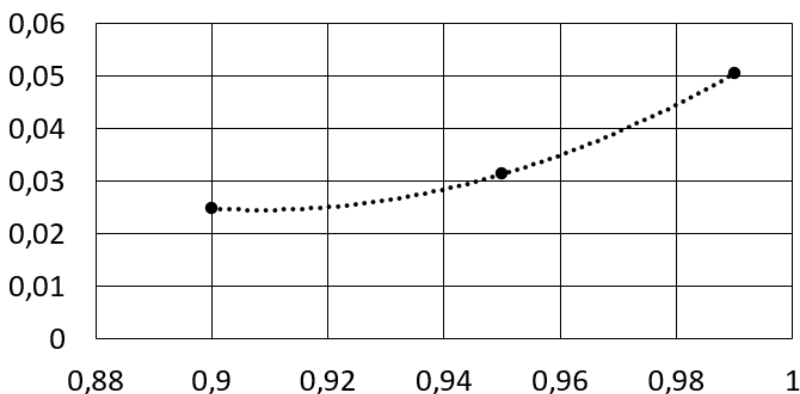
$$U_{0,99} = (10,0431 - 9,94193)/2 = 0,050585 \text{ м/с};$$

$$U_{0,95} = (10,0239 - 9,96113)/2 = 0,031385 \text{ м/с};$$

$$U_{0,9} = (10,0174 - 9,96763)/2 = 0,024885 \text{ м/с}.$$

10. За отриманими даними будемо в Excel залежність $U_p = f(p)$:

Залежність $U_p = f(p)$



та за допомогою функції «Лінія тренду» апроксимуємо цю залежність поліномом 2-го ступеня:

$$U_p = a_0 + a_1 p + a_2 p^2,$$

де $a_0 = 3,2329$; $a_1 = -7,0644$; $a_2 = 3,8889$.

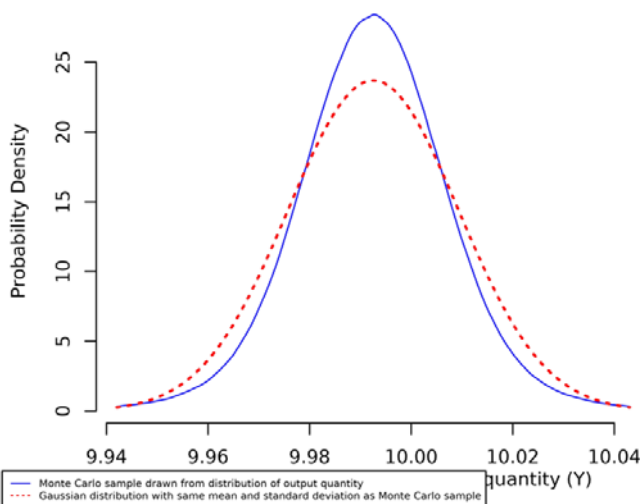
Підставляючи в поліном значення $p = 0,9545$, отримуємо:

$$U_{0,9545} = 0,032991 \text{ м/с}.$$

11. Розрахуймо коефіцієнт охоплення:

$$k_{0,9545} = \frac{U_{0,9545}}{u_c} = \frac{0,032991}{0,0168} = 1,96375.$$

12. Наведіть рисунок PDF вимірюваної величини:



13. Наведемо порівняльну таблицю значень вимірюваної величини, сумарних стандартних невизначеностей, розширених невизначеностей та коефіцієнтів охоплення для ймовірностей 0,9545 для методів GUM та ММК з урахуванням та без урахування кореляції, а також відносне відхилення значень розширених невизначеностей, розрахованих за методикою GUM та ММК без урахування та з урахуванням кореляції, яке обчислене за формулою:

$$\delta_U = 100 \cdot (U_{\text{б/кор}} - U_{\text{кор}}) / U_{\text{кор}}.$$

	GUM з кореляцією	GUM без кореляції	ММК з кореляцією	ММК без кореляції
$\hat{V}$, м/с	9,9925	9,9925	9,99251	9,99253
$u_c(\hat{V})$, м/с	0,00853	0,0118	0,00923	0,0168
$U_{0,9545}$, м/с	0,0171	0,03291	0,01833	0,03299
k	2,01	2,14	1,986	1,964
δ_U , %		- 48		- 44

ДОДАТКИ

Додаток 1

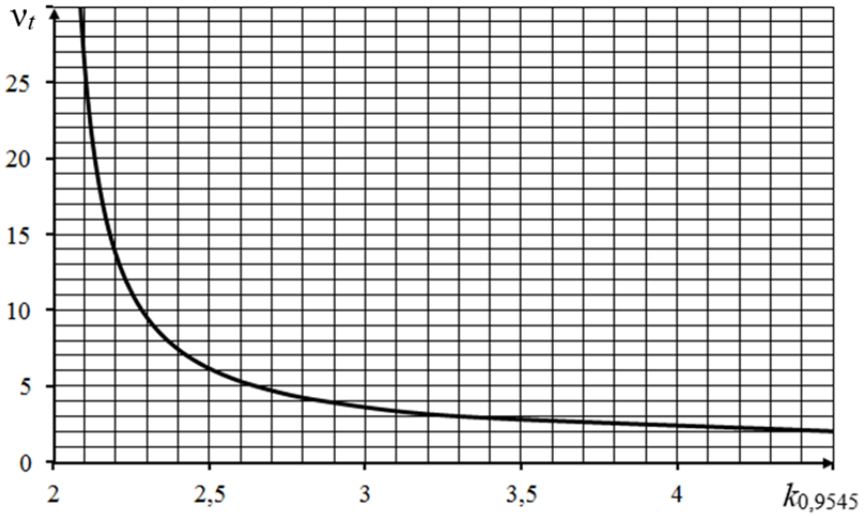
Формули для розрахунку стандартної інструментальної невизначеності через клас точності ЗВТ

Приклад позначення класу точності	Вид та позначення нормованої похибки	Формула для розрахунку стандартної невизначеності типу <i>B</i>
1,0	Зведена, γ	$u_B = \gamma \frac{X_{\text{макс}}}{\sqrt{3} \cdot 100}$
①,0	Відносна, δ	$u_B = \delta \frac{X_{\text{вим}}}{\sqrt{3} \cdot 100}$
$\nabla 1,0$	Зведена до довжини нерівномірної шкали, λ	$u_B = \lambda \frac{(X_{\text{сер}} + X_{\text{вим}})^2}{X_{\text{сер}} \sqrt{3} \cdot 100}$
2,0/0,1	Відносна, c/d	$u_B = \left[c + d \left(\left \frac{X_{\text{макс}}}{X_{\text{вим}}} \right - 1 \right) \right] \frac{X_{\text{вим}}}{\sqrt{3} \cdot 100}$

В таблиці використані позначення: $X_{\text{вим}}$ – виміряне значення (показання ЗВТ), $X_{\text{макс}}$ – максимальне значення вимірюваної величини; $X_{\text{сер}}$ – значення вимірюваної величини, що відповідає геометричній середині істотно нерівномірної шкали.

Додаток 2

Залежність числа степенів свободи коефіцієнта Стюдента для ймовірності 0,9545, який відповідає значенню коефіцієнта охоплення



Залежність числа степенів свободи коефіцієнта Стюдента для ймовірності 0,95, який відповідає значенню коефіцієнта охоплення

Додаток 3

Значення коефіцієнтів Стьюдента для ймовірності 0,9545 та ефективного числа степенів свободи v_{eff}

v_{eff}	$t_{0,9545;v_{eff}}$	v_{eff}	$t_{0,9545;v_{eff}}$	v_{eff}	$t_{0,9545;v_{eff}}$	v_{eff}	$t_{0,9545;v_{eff}}$	v_{eff}	$t_{0,9545;v_{eff}}$
1,0	13,968	3,0	3,307	5,0	2,649	7	2,429	35	2,074
1,1	11,203	3,1	3,245	5,1	2,633	8	2,366	40	2,064
1,2	9,364	3,2	3,188	5,2	2,617	9	2,320	45	2,0572
1,3	8,074	3,3	3,137	5,3	2,603	10	2,284	50	2,051
1,4	7,131	3,4	3,089	5,4	2,589	11	2,255	55	2,046
1,5	6,418	3,5	3,045	5,5	2,575	12	2,231	60	2,0433
1,6	5,864	3,6	3,005	5,6	2,562	13	2,219	65	2,040
1,7	5,424	3,7	2,967	5,7	2,550	14	2,195	70	2,036
1,8	5,067	3,8	2,932	5,8	2,539	15	2,181	75	2,034
1,9	4,773	3,9	2,900	5,9	2,527	16	2,169	80	2,032
2,0	4,527	4,0	2,869	6,0	2,517	17	2,158	85	2,030
2,1	4,318	4,1	2,841	6,1	2,506	18	2,149	90	2,028
2,2	4,140	4,2	2,814	6,2	2,496	19	2,140	95	2,027
2,3	3,985	4,3	2,789	6,3	2,487	20	2,133	100	2,025
2,4	3,850	4,4	2,766	6,4	2,478	21	2,126	200	2,013
2,5	3,732	4,5	2,743	6,5	2,469	22	2,120	300	2,008
2,6	3,627	4,6	2,722	6,6	2,460	23	2,115	400	2,006
2,7	3,534	4,7	2,702	6,7	2,452	24	2,110	500	2,005
2,8	3,450	4,8	2,684	6,8	2,444	25	2,105	1000	2,003
2,9	3,375	4,9	2,666	6,9	2,436	30	2,087	∞	2,000

Додаток 4

Особливості округлення розширеної невизначеності до однієї значущої цифри

Значення, що округлюють $\cdot 10^n$, $n=0,-1,-2,\dots$	1,06-2,11-3,16-4,22-5,27-6,32-7,37-8,43-9,48- 2,10 3,15 4,21 5,26 6,31 7,36 8,42 9,47 10,5
Округлене значення $\cdot 10^n$, $n=0,-1,-2,\dots$	2 3 4 5 6 7 8 9 10

Додаток 5

Таблиця похідних основних елементарних функцій

$(C)' = 0$	$(e^x)' = e^x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x)' = 1$	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^2)' = 2x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Додаток 6

Основні правила диференціювання

Нехай $C = \text{const}$, $u = u(x)$, $v = v(x)$, тоді:

1. $C' = 0$ (Похідна сталої дорівнює нулю).

2. $(Cu)' = C(u)'$ (Сталий множник можна виносити за знак похідної).

3. Якщо існують похідні $u'(x)$ та $v'(x)$, то похідна від суми (різниці) функцій $u(x)$ і $v(x)$ дорівнює:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

4. Похідна від добутку двох функцій дорівнює:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

5. Якщо існують похідні $u'(x)$ та $v'(x)$ і $v \neq 0$, то похідна від частки цих функцій дорівнює:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

6. Похідна складної функції

$$\{y[u(x)]\}' = [y(u)]' \cdot [u(x)]'.$$

Додаток 7

Частинні похідні функції двох змінних

Означення. *Частинною похідною за змінною x функції $z = f(x; y)$ називається похідна за x , обчислена за припущенням, що y – стала.*

Означення. *Частинною похідною за y функції $z = f(x; y)$ називається похідна за y , обчислена за припущенням, що x – стала.*

Приклад 1. Знайти частинні похідні функції $z = 4x^2 + 8y^4 - 10xy$.

Розв'язання.

Маємо функцію z , що залежить від двох змінних x та y . Можна обчислити 2 частинних похідних: частинну похідну за змінною x (припускаючи, що y є константа) та частинну похідну за змінною y (припускаючи, що x є константа).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (4x^2 + 8y^4 - 10xy)'_x = \left| \begin{array}{l} x - \text{змінна} \\ y = c(\text{const}) \\ (c)' = 0; \\ (c \cdot f(x))' = c \cdot (f(x))' \end{array} \right| = 4 \cdot 2x + 0 - 10y \cdot 1 = 8x - 10y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (4x^2 + 8y^4 - 10xy)'_y = \left| \begin{array}{l} y - \text{змінна} \\ x = c(\text{const}) \\ (c)' = 0; \\ (c \cdot f(y))' = c \cdot (f(y))' \end{array} \right| = 0 + 8 \cdot 4y^3 - 10x \cdot 1 = 32y^3 - 10x.$$

Приклад 2. Знайти частинні похідні функції $y = 12m^4 p^3 + \frac{8m^5}{p^3}$.

Розв'язання.

Маємо функцію y , що залежить від двох змінних m та p . Можна обчислити 2 частинних похідних: частинну похідну за змінною m (припускаючи, що p є константа) та частинну похідну за змінною p (припускаючи, що m є константа).

$$\frac{\partial y}{\partial m} = \left(12m^4 p^3 + \frac{8m^5}{p^3} \right)'_m = \left| \begin{array}{l} m - \text{змінна} \\ p = c(\text{const}) \\ (c)' = 0; \\ (c \cdot f(m))' = c \cdot (f(m))' \end{array} \right| = 12p^3 \cdot 4m^3 + \frac{8}{p^3} \cdot 5m^4 =$$

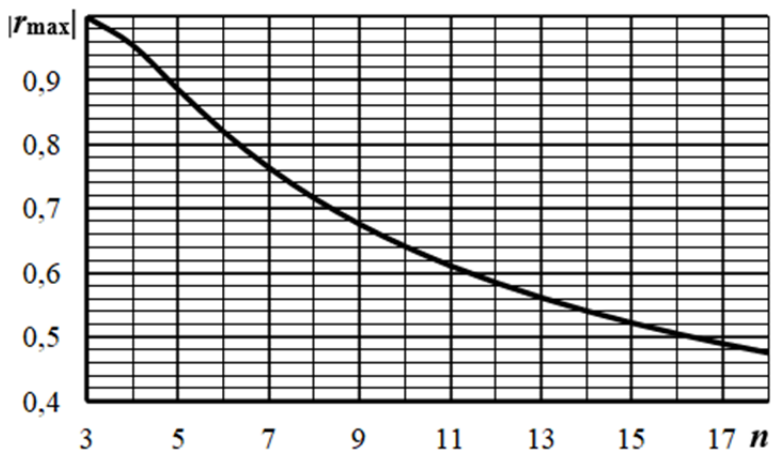
$$= 48p^3m^3 + \frac{40m^4}{p^3};$$

$$\frac{\partial y}{\partial p} = \left(12m^4p^3 + \frac{8m^5}{p^3} \right)'_p = \left| \begin{array}{l} p - \text{змінна} \\ m = c(\text{const}) \\ (c)' = 0; \\ (c \cdot f(p))' = c \cdot (f(p))' \end{array} \right| = 12m^4 \cdot 3p^2 + 8m^5 \cdot (-3)p^{-4} =$$

$$= 36m^4p^2 - \frac{24m^5}{p^4}.$$

Додаток 8

Визначення максимального значення коефіцієнта
увної кореляції для ймовірності 0,9545 в залежності для двох
наборів некорельованих даних з однаковим числом спостережень n



Розрахункова формула

$$|r_{\max}| = \sqrt{\frac{1}{\frac{n-2}{t_{p;(n-2)}^2} + 1}}$$

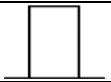
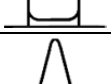
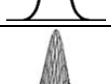
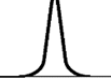
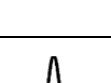
Додаток 9

Часто вживані функції програми “Еxcel”

Найменування функції	Позначення кирилицею	Позначення латиницею
Арккосинус	ACOS	ACOS
Арксинус	ASIN	ASIN
Арктангенс	ATAN	ATAN
Дисперсія	ДИСП	VAR
Кількість чисел в списку	СЧЁТ	COUNT
Корінь квадратний	КОРЕНЬ	SQRT
Косинус	COS	COS
Коефіцієнт кореляції	КОРРЕЛ	CORREL
Коефіцієнт Стьюдента	СТЬЮДРАСПОБР СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х	TINV
Логарифм десятковий	LOG10	LOG10
Логарифм натуральний	LN	LN
Логарифм за заданою основою	LOG	LOG
Максимум	МАКС	MAX
Мінімум	МИН	MIN
Модуль враження	ABS	ABS
Найбільше значення з множини даних	НАИБОЛЬШИЙ	<u>LARGE</u>
Визначник матриці	МОПРЕД	MDETERM
Округлення	ОКРУГЛ	NROUND
Пі	ПИ()	PI()
Синус	SIN	SIN
СКВ	СТАНДОТКЛОН	STDEV
Середнє арифметичне	СРЗНАЧ	AVERAGE
Ступінь числа	СТЕПЕНЬ	POWER
Сума	СУМ	SUM
Сума квадратів	СУМКВ	SUMSQ
Сума квадратів відхилень від середнього	КВАДРОТКЛ	DEVSQ
Тангенс	TAN	TAN
кспонента	EXP	EXP

Додаток 10

Інформація про випадкову змінну та вигляд відповідної PDF

Інформація про величину	Розподіл ймовірностей	
Нижня и верхня границі: a, b	Рівномірний $R(a, b)$	
Неточно відомі нижня та верхня границі: $a \pm d, b \pm d$	Криволінійно-трапецеїдальний $CTrap(a, b, d)$	
Сума двох рівномірно розподілених величин с границями (a_1, b_1) и (a_2, b_2)	Трапецеїдальний $CTrap(a, b, \beta)$; $a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2,$ $\beta = (b_1 - a_1) - (b_2 - a_2) / (b - a)$	
Сума двох рівномірно розподілених величин с границями (a_1, b_1) і (a_2, b_2) та рівною шириною $(b_1 - a_1) = (b_2 - a_2)$	Трикутний $T(a, b)$; $a = a_1 + a_2,$ $b = b_1 + b_2$	
Гармонічне коливання між нижньою (a) та верхньою (b) границями	Арксинусний (U-подібний) $U(a, b)$	
Найкраща оцінка x та її стандартна невизначеність $u(x)$	Нормальний (Гаусів) $N(x, u^2(x))$	
Найкраща оцінка x векторної величини та її відповідна матриця невизначеності U_x	Багатовимірний нормальний (Гаусів) $N(x, U_x)$	
Вибірка незалежних спостережень $x_1, \dots, x_n$ з нормального розподілу з невідомими математичним сподіванням та дисперсією	t -розподіл (Стюдента); $t_{n-1}(\bar{x}, s^2/n); \bar{x} = \sum_{j=1}^n x_j / n$ $s^2 = \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 / (n-1)$	
Найкраща оцінка x , розширена невизначеність U_p , коефіцієнт охоплення k_p , число ефективних степенів свободи v_{eff}	t -розподіл (Стюдента); $t_{v_{eff}}(x, (U_p/k_p)^2)$	
Найкраща оцінка x невід'ємної величини	Експонентний $Ex(1/x)$	
Число q підрахованих об'єктів у вибірці	Гамма-розподіл $G(q+1, 1)$	

Список літератури

1. ДСТУ EN ISO/IEC 17025:2019 Загальні вимоги до компетентності випробувальних та калібрувальних лабораторій (ISO/IEC 17025:2017, IDT).
2. ДСТУ ISO/IEC Guide 98-1:2018 Невизначеність вимірювань. Частина 1. Вступ до подання невизначеності у вимірюванні (ISO/IEC Guide 98-1:2009, IDT).
3. ДСТУ ISO/IEC Guide 98-3:2018 Невизначеність вимірювань. Частина 3. Настанова щодо подання невизначеності у вимірюванні (GUM:1995) (ISO/IEC Guide 98-3:2008, IDT).
4. ДСТУ ISO/IEC Guide 98-3/Suppl 1:2018 Невизначеність вимірювань. Частина 3. Настанова щодо подання невизначеності у вимірюванні. Додаток 1. Поширення розподілів за методом Монте-Карло (ISO/IEC Guide 98-3:2008/Suppl 1:2008; Cor. 1: 2009, IDT).
5. ДСТУ ISO/IEC Guide 98-4:2018 Невизначеність вимірювань. Частина 4. Роль невизначеності вимірювань під час оцінювання відповідності (ISO/IEC Guide 98-4:2012, IDT).
6. ДСТУ ISO/TS 21749:2013 Невизначеність вимірювання в метрологічній практиці. Повторні вимірювання та ієрархічні експерименти (ISO/TS 21749:2005, IDT).
7. Захаров І.П. Порівняльний аналіз характеристик точності вимірювань (монографія). Харків: Оберіг, 2019, 100 с.
8. Павленко Ю.Ф., Захаров І.П. Забезпечення єдності вимірювань, частина 1. Навчальний посібник. Харків: Оберіг, 2023, 176 с.
9. JCGM 200:2012 International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM), ISO/IEC, 2012, 108 p.
10. Zakharov, I.P., Botsiura, O.A., Nyezshmakov, P.I. (2021). Expanded uncertainty evaluation taking into account the correlation between estimates of input quantities. Ukrainian Metrological Journal, (1), 4-8.
11. Zakharov I.P., Vodotyka S.V. Application of Monte Carlo simulation for the evaluation of measurements uncertainty // Metrology and Measurement systems, 2008, vol., XV, Number 1 p. 118 – 123.
12. <https://uncertainty.nist.gov/>.

ЗМІСТ

Перелік умовних позначень та скорочень	3
Вступ.....	4
1 Оцінювання характеристик розсіювання показань індикуючих вимірювальних приладів	6
1.1 Основні теоретичні відомості.....	6
1.2 Контрольні завдання	9
1.3 Приклад виконання контрольного завдання.....	19
2 Оцінювання інструментальної стандартної невизначеності..	20
2.1 Основні теоретичні відомості.....	20
2.2 Контрольні завдання	23
2.3 Приклад виконання контрольного завдання.....	33
3 Оцінювання невизначеності прямих одноразових вимірювань	34
3.1 Основні теоретичні відомості.....	34
3.2 Контрольні завдання	39
3.3 Приклади виконання контрольного завдання.....	49
4 Оцінювання невизначеності прямих багаторазових вимірювань	54
4.1 Основні теоретичні відомості.....	54
4.2 Контрольні завдання	58
4.3 Приклади виконання контрольного завдання.....	68
5 Обчислення коефіцієнтів чутливості	72
5.1 Основні теоретичні відомості.....	72
5.2 Контрольні завдання	74
5.3 Приклад виконання контрольного завдання.....	89
6 Оцінювання невизначеності непрямих вимірювань	92
6.1 Основні теоретичні відомості.....	92
6.2 Контрольні завдання	96
6.3 Приклад виконання контрольного завдання.....	104
7 Автоматизація оцінювання невизначеності вимірювань.....	107
7.1 Основні теоретичні відомості.....	107
7.2 Контрольні завдання	111
7.3 Приклад виконання контрольного завдання.....	112

8	Оцінювання невизначеності вимірювань методом Монте-Карло.....	114
8.1	Основні теоретичні відомості.....	114
8.2	Контрольні завдання	118
8.3	Приклад виконання контрольного завдання.....	119
	Додатки	125
	Список літератури	134

Підписано до друку 11.11.2025 р.
Формат 60х84/16. Папір офсет. Друк офсет.
Умов. друк. арк. 5,81. Обл.-вид. арк. 5,3. Тираж 100 прим.
Віддруковано в ФО-П Єфименко С.А.