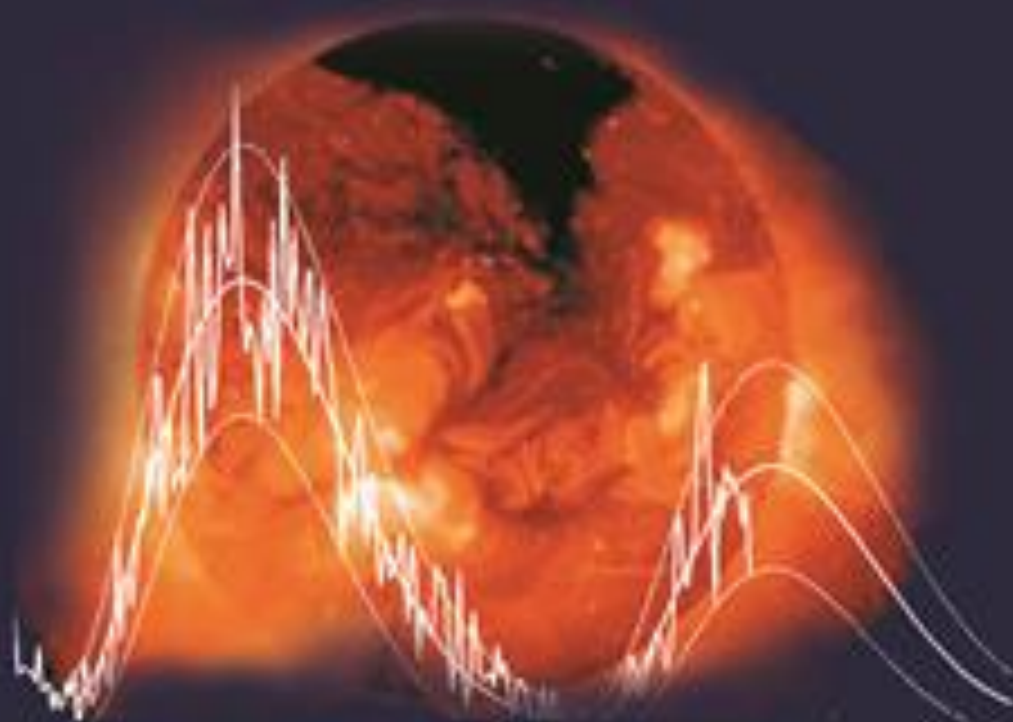


Л.О. Кіріченко, Т.А. Радівілова

ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ
САМОПОДІБНИХ І
МУЛЬТИФРАКТАЛЬНИХ
ЧАСОВИХ РЯДІВ



Харків 2019

Л.О. Кіріченко, Т.А. Радівілова

ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

САМОПОДІБНИХ І МУЛЬТИФРАКТАЛЬНИХ ЧАСОВИХ РЯДІВ

МОНОГРАФІЯ

Харків 2019

УДК 004.6:004.75

ББК 32.973.2

К43

Рекомендовано Вченою радою Харківського національного університету радіоелектроніки, протокол № 7 від 17.12.2018 р.

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Михальов О.І., д.т.н., проф., завідувач кафедри інформаційних технологій та систем Національної металургійної академії України,

Політанський Л.Ф., д.т.н., проф., завідувач кафедри радіотехніки та інформаційної безпеки Чернівецького національного університету ім. Юрія Федьковича.

КІРІЧЕНКО Л.О., РАДІВІЛОВА Т.А.

Фрактальний аналіз самоподібних і мультифрактальних часових рядів – Харків, ХНУРЕ, 2019. - 106 с.

ISBN 978-617-77-22-82-2

В роботі запропоновано та досліджено сукупність методів оцінювання показника Херста. Особливу увагу приділено дослідженню адитивних випадкових моделей, що складаються з трендової, циклічної та фрактальної складових. Для таких процесів розроблено алгоритми оцінювання показника Херста фрактальної складової. Крім того, проведені дослідження, в результаті яких побудовано низку корисних алгоритмів обробки інформаційних потоків з мультифрактальними властивостями. В монографії запропонована сукупність взаємозв'язаних методів комплексного оцінювання параметрів фрактальних стохастичних процесів для аналізу часових рядів невеликих обсягів.

Монографія може бути корисною для науковців, які досліджують самоподібні властивості стохастичних процесів, а також для магістрантів, аспірантів, студентів та фахівців в області інформаційних систем і математичного моделювання.

ISBN 978-617-77-22-82-2

DOI: 10.30837/978-617-77-22-82-2

© Кіріченко Л.О., Радівілова Т.А.

© Харківський національний університет
радіоелектроніки

ЗМІСТ

Вступ	5
РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ, ХАРАКТЕРИСТИКИ І МОДЕЛІ САМОПОДІБНИХ І МУЛЬТИФРАКТАЛЬНИХ СТОХАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ.....	6
1.1 Основні поняття і властивості самоподібних стохастичних процесів.....	6
1.1.1 Самоподібний стохастичний процес з неперервним часом.....	6
1.1.2 Самоподібний стохастичний процес процес із дискретним часом.....	7
1.1.3 Довгострокова залежність і важкі хвости розподілів.....	8
1.2 Мультифрактальні процеси.....	9
1.2.1. Закони розподілу та моментні характеристики мультифрактальних процесів.....	10
1.2.2 Характеристики мультифрактальних множин.....	11
1.3 Деякі моделі самоподібних і мультифрактального процесів	12
1.3.1 Моделі фрактального броунівського руху	13
1.3.2 Моделі, засновані на α -стійких розподілах.....	14
1.3.3 Каскадні моделі мультифрактальних процесів.....	16
Література до розділу 1.....	20
РОЗДІЛ 2. ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРА САМОПОДІБНОСТІ ДЛЯ СТАЦІОНАРНИХ СТОХАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ	22
2.1 Метод нормованого розмаху	22
2.2 Метод змінювання дисперсії.....	23
2.3 Метод детрендованого флуктуаційного аналізу.....	24
2.4 Метод із використанням дискретного вейвлет-перетворення.....	25
2.4.1 Дискретне вейвлет-перетворення одновимірного сигналу.....	25
2.4.2. Властивості вейвлет-коефіцієнтів самоподібних процесів.....	27
2.4.3 Метод оцінювання показника Херста на основі дискретного вейвлет-перетворення.....	28
2.5 Статистичні характеристики оцінок показника Херста	30
2.5.1 Опис чисельного експерименту.....	30
2.5.2 Порівняльний аналіз середніх значень і середньоквадратичних відхилень оцінок параметра Херста.....	30
2.5.3 Порівняльний аналіз вибірових законів розподілу і кореляції оцінок параметра Херста.....	33
2.5.4 Часові витрати виконання методів оцінювання.....	34
Висновки за розділом 2.....	36
Література до розділу 2.....	36
РОЗДІЛ 3. ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРА САМОПОДІБНОСТІ ДЛЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ СТОХАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ	39
3.1 Попереднє дослідження структури самоподібного часового ряду на основі R/S-аналізу	39
3.1.1 Перевірка гіпотези про наявність самоподібності.....	39
3.1.2 Визначення інтервалів довгостроковій залежності і видалення короткостроковій залежності.	40
3.2 Застосування методу детрендованого флуктуаційного аналізу для часових рядів з трендовими компонентами.....	42
3.3 Вейвлет-оцінювання параметра Херста для рядів із істотними трендовими та циклічними компонентами.....	45

3.3.1	Визначення діапазону коректного оцінювання показника Херста за наявністю трендових і періодичних компонент.....	45
3.3.2	Вейвлет-оцінювання показника Херста на основі попереднього аналізу спектра вейвлет-енергії.....	48
3.4	Комплексний підхід до оцінювання фрактальних властивостей самоподібних часових рядів	50
	Висновки за розділом 3.....	51
	Література до розділу 3.....	51
	РОЗДІЛ 4. ОЦІНЮВАННЯ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СТОХАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ.....	53
4.1	Мультифрактальні характеристики математичних моделей фрактальних випадкових процесів	53
4.2	Мультифрактальний флуктуаційний аналіз.....	56
4.3	Метод максимумів модулів вейвлет-перетворення.....	59
4.4	Порівняльний аналіз оцінок мультифрактальних характеристик, отриманих різними методами..	62
4.4.1	Оцінювання монофрактальних реалізацій.....	62
4.4.2	Оцінювання біфрактальних реалізацій.....	63
4.4.3	Оцінювання реалізацій детермінованого біноміального каскаду.....	65
4.4.4	Оцінювання реалізацій стохастичного біноміального каскаду.....	67
4.5	Визначення властивостей монофрактальності і мультифрактальності за вибірковими фрактальними характеристиками.....	69
4.6	Комплексний підхід до оцінювання мультифрактальних властивостей часових рядів малої довжини.....	71
	Висновки за розділом 4.....	71
	Література до розділу 4.....	72
	РОЗДІЛ 5. ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ РЕАЛЬНИХ ДАНИХ.....	73
5.1	Оцінювання показника Херста за часовими рядами.....	73
5.1.1	Дослідження самоподібних властивостей реалізацій інфокомунікаційних трафіків.....	73
5.1.2	Дослідження фрактальних властивостей нестационарних кумулятивних часових рядів з декількома циклічними складовими і наявністю короткострокової залежності.....	75
5.1.3	Фрактальний аналіз електроенцефалограм для станів неспання і сну.....	76
5.1.4	Застосування фрактального аналізу для виявлення розладнання фінансових часових рядів..	78
5.2	Мультифрактальний аналіз часових рядів.....	81
5.2.1	Прогнозування кризових явищ для фрактальних фінансових часових рядів.....	81
5.2.2	Дослідження фрактальних біомедичних сигналів.....	84
5.2.3	Аналіз самоподібних і мультифрактальних властивостей сигналів, пов'язаних з природними явищами.....	89
5.2.4	Аналіз самоподібних і мультифрактальних властивостей часових рядів активностей спільнот в соціальних мережах.....	96
5.3	Перевірка гіпотези про наявність моно- і мультифрактальних властивостей.....	100
	Висновки за розділом 5.....	101
	Література до розділу 5.....	103

ВСТУП

В даний час стало загально визнаним, що багато інформаційних, біологічних, фізичних, технологічних процесів мають складну фрактальну структуру. Сьогодні фрактальний аналіз використовується для моделювання, аналізу та контролю складних систем в різних областях науки і техніки: в телекомунікаціях – для запобігання перевантаженням комп'ютерних мереж; в геології – для прогнозування сейсмічної активності та цунамі; в біології та медицині – для діагностики захворювань та фізіологічного стану за записами електрокардіограми (ЕКГ) та електроенцефалограми (ЕЕГ); в економіці – для прогнозування кризових ситуацій та оцінки ризику за фінансовими рядами; в фізиці – для дослідження турбулентності та термодинамічних процесів і т. д. Незважаючи на безліч публікацій, пов'язаних з практичним застосуванням фрактального аналізу, в даний час не існує універсального підходу до оцінки фрактальних характеристик, особливо для нестационарних часових рядів невеликої довжини.

В монографії запропонована сукупність взаємозв'язаних методів комплексного оцінювання параметрів фрактальних стохастичних процесів для аналізу часових рядів невеликих обсягів.

В першому розділі монографії розглянуті основні поняття, властивості та характеристики самоподібних і мультифрактальних стохастичних процесів і часових рядів; представлені основні моделі фрактальних процесів. В другому розділі розглядаються основні методи визначення показника Херста; запропоновано підхід до оцінки параметру самоподібності за стаціонарними часовими рядами, який забезпечує незміщену інтервальну оцінку параметру самоподібності. В третьому розділі запропоновано та досліджено методи оцінювання показника Херста для часових рядів зі значними трендовими та циклічними складовими; розроблено комплексний метод оцінки параметру самоподібності для стаціонарних та нестационарних коротких часових рядів. В четвертому розділі досліджено методи мультифрактального аналізу та розроблено комплексний метод оцінки мультифрактальних характеристик для часових рядів малої довжини. В п'ятому розділі приведені результати практичного застосування запропонованих методів фрактального аналізу в різних областях досліджень.

Інформація про авторів



Людмила Олегівна Кіріченко – д.т.н., професор Харківського національного університету радіоелектроніки; пр. Науки 14, 61166, Харків, Україна; e-mail: lyudmyla.kirichenko@pure.ua.

Основні області наукових досліджень: самоподібні та мультифрактальні часові ряди, фрактальний аналіз, вейвлет-аналіз, детерміновані хаотичні системи.



Тамара Анатоліївна Радівілова – к.т.н., доцент Харківського національного університету радіоелектроніки; пр. Науки 14, 61166, Харків, Україна; e-mail: tamara.radivilova@gmail.com.

Основні області наукових досліджень: самоподібні та мультифрактальні часові ряди, телекомунікаційні системи, управління трафіком, інформаційна безпека.

РОЗДІЛ 1

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ, ХАРАКТЕРИСТИКИ ТА МОДЕЛІ САМОПОДІБНИХ І МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО СТОХАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

В даний час стало загальноновизнаним, що багато інформаційних, біологічних, фізичних і технологічних процесів мають складну фрактальну структуру. Фрактальний аналіз використовується для моделювання, аналізу та контролю складних систем в різних областях науки і техніки. Зокрема, в геології - для прогнозування сейсмічної активності і цунамі, визначення віку геологічних порід; в біології та медицині - для діагностики захворювань і фізіологічного стану за записами ЕКГ і ЕЕГ, при дослідженні мутацій і змін на генетичному рівні; в економіці - для прогнозування кризових ситуацій і оцінювання ризику за фінансовими рядами; у фізиці - для дослідження турбулентності і термодинамічних процесів. Цей список далеко не повний.

Процеси, що мають фрактальні властивості, можна розділити на дві групи: самоподібні (монофрактальні) і мультифрактальні. Мультифрактальні об'єкти є статистично неоднорідними самоподібними об'єктами. Для мультифрактальних часових рядів статистична неоднорідність об'єкта виражається в неоднорідності розподілу даних ряду, тобто наявності важких хвостів щільності розподілу ймовірностей часового ряду. У порівнянні з самоподібними, мультифрактальні процеси проявляють більш складну скейлінгову поведінку.

1.1 Основні поняття і властивості самоподібних випадкових процесів

Основні поняття і визначення самоподібних випадкових процесів були приведені в роботах [Leland, 1993; Taqqu, 1995; Taqqu, 1997; Willinger, 1997; Mandelbrot, 1983; Федер, 1991].

1.1.1 Самоподібний стохастичний процес з неперервним часом

Стохастичний процес $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$ з неперервною змінною часу називається самоподібним у вузькому сенсі з параметром H , $0 < H < 1$, якщо для будь-якого дійсного значення $a > 0$ скінченновимірні розподіли для $X(at)$, $t \in \mathbb{R}$ ідентичні розподілам процесу $a^{-H}X(at)$, $t \in \mathbb{R}$. Тобто якщо для будь-яких $k \geq 1$, $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ і будь-яких $a > 0$ виконується:

$$\text{Law} \{X(t_2), \dots, X(t_k)\} = \text{Law} \{a^{-H} (X(at_1), a^{-H} X(at_2), \dots, a^{-H} X(at_k))\} \quad (1.1)$$

Коротко рівняння (1.1) можна записати у вигляді:

$$\text{Law} \{X(t), t \in \mathbb{R}\} = \text{Law} \{a^{-H} X(at), t \in \mathbb{R}\}, \quad (1.2)$$

де позначення $\text{Law} \{\cdot\}$ означає скінченновимірні закони розподілів випадкового процесу. Параметр H , званий параметром Херста, являє собою міру самоподібності стохастичного процесу.

Стохастичний процес $X(t)$ є статистично самоподібним або самоподібним в широкому сенсі, якщо процес $a^{-H}X(at)$ має наступні математичне очікування $M[X(t)]$, дисперсію $D[X(t)]$ і автокореляційну функцію $r_x(t, s)$:

$$M[X(t)] = \frac{M[X(at)]}{a^H}$$

$$D[X(t)] = \frac{D[X(at)]}{a^{2H}}$$

$$r_x(t, s) = \frac{r_x(at, as)}{a^{2H}}.$$

Легко показати, поклавши $a = 1/t$, що для самоподібного процесу виконується рівність:

$$\text{Law}\{X(t)\} = \text{Law}\left\{\left(\frac{1}{t}\right)^{-H} X(1)\right\} = \text{Law}\{t^H X(1)\}. \quad (1.3)$$

З огляду на (1.2), початкові моменти самоподібного випадкового процесу можна виразити як

$$M[|X(t)|^q] = M[|t^H X(1)|^q] = t^{qH} M[|X(1)|^q] = C(q) \cdot t^{qH}, \quad (1.4)$$

де величина $C(q) = M[|X(1)|^q]$.

Важливим класом випадкових процесів, що часто зустрічаються в різних областях природознавства і техніки, є випадкові процеси, які мають стаціонарні прирости. Випадковий процес $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, що має стаціонарні прирости, є самоподібним, якщо

$$\text{Law}\{X(t + \Delta t) - X(t)\} = \text{Law}\{X(t) - X(0)\}, \quad \forall t, \Delta t \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

Такі процеси мають математичне очікування, яке дорівнює 0; дисперсія визначається як $M[X^2(t)] = \sigma^2 |t|^{2H}$, а кореляційна функція залежить тільки від моментів часу t і s :

$$M\{X(t), X(s)\} = \frac{\sigma^2}{2} \left\{ |t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H} \right\}. \quad (1.6)$$

1.1.2 Самоподібний стохастичний процес з дискретним часом

Розглянемо поняття самоподібності для процесів з дискретним часом. Нехай $X = (X_1, X_2, \dots)$ – відрізок стаціонарного в широкому сенсі випадкового процесу з дискретним часом $t \in N = \{1, 2, \dots\}$. Припустимо, процес X має автокореляційну функцію такого вигляду:

$$r(k) \sim k^{-\beta} L_1(k), \quad k \rightarrow \infty, \quad (1.7)$$

де $0 < \beta < 1$ і L_1 – функція, яка повільно змінюється на нескінченності, тобто $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L_1(tx)}{L_1(t)} = 1$ для всіх $x > 0$.

Позначимо через $X^{(m)} = \{X_1^{(m)}, X_2^{(m)}, \dots\}$ усереднений по блокам довжини m процес X , компоненти якого визначаються рівністю

$$X_t^{(m)} = \frac{1}{m} (X_{t-m+1} + \dots + X_t), \dots \quad (1.8)$$

Такий ряд називається агрегованим. Позначимо через $r_m(k)$ і D_m коефіцієнт кореляції і дисперсію процесу $X^{(m)}$ відповідно. Процес X називається строго самоподібним в широкому сенсі з параметром $H = 1 - (\beta / 2)$, $0 < \beta < 1$, якщо

$$r_m(k) = r(k), k \in Z_+, m \in \{2, 3, \dots\},$$

тобто, процес не змінює свій коефіцієнт кореляції після усереднення по блокам довжини m .

Процес X називається асимптотично самоподібним в широкому сенсі з параметром $H = 1 - (\beta / 2)$, $0 < \beta < 1$, якщо

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m(k) = r(k), k \in N.$$

Процес X називається самоподібним у вузькому сенсі з параметром $H = 1 - (\beta / 2)$, $0 < \beta < 1$, якщо справедливо вираз

$$\text{Law} \{m^{1-H} X^{(m)}\} = \text{Law} \{X\}, m \in N. \quad (1.9)$$

1.1.3 Довгострокова залежність і важкі хвости розподілів

Поняття повільно спадаючої залежності має ключове значення в теорії самоподібних процесів і описує довгострокову пам'ять процесу: майбутнє процесу визначається його минулим, причому з убуваючим ступенем впливу в міру того, як минуле віддалене від теперішнього. Таким чином, процес з тривалою пам'яттю як би "забуває" свою відносно давнє минуле в міру просування часу в майбутнє.

Процес X має повільно спадаючу залежність, якщо виконується відношення (1.7). Таким чином, процеси з повільно спадаючою залежністю характеризуються автокореляційною функцією, яка убуває гіперболічно (за степеневим законом) при збільшенні тривалості затримки. Можна показати, що з (1.7) випливає несумованість автокореляційної функції, тобто $\sum_k r(k) = \infty$. На відміну від процесів з повільно спадаючою залежністю, процеси з швидко спадаючою залежністю мають експоненційно спадаючу автокореляційну функцію виду

$$r(k) \sim \rho^k, k \rightarrow \infty, 0 < \rho < 1, .$$

і, як наслідок, сумованість автокореляційної функції: $0 < \sum_k r(k) < \infty$.

Дискретні самоподібні процеси мають повільно спадної автокореляційної функцією агрегованого процесу $X^{(m)}$ при $m \rightarrow \infty$, На відміну від поширених стохастичних моделей для яких виконується

$$r_m(k) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad k \in N.$$

Задання автокореляційної функції у вигляді (1.7) рівносильно визначенню процесу з наступною дисперсією:

$$\sigma^2 \sim am^{-\beta}, \quad m \rightarrow \infty,$$

де a - кінцева позитивна константа, яка не залежить від m ; $0 < \beta < 1$. Тобто довгострокова залежність має на увазі властивість самоподібності в широкому сенсі зі значенням показника $H > 0.5$ і навпаки.

Більшість процесів, що володіють довгостроковою залежністю, мають важкі хвости одновимірної функції розподілу ймовірностей. Випадкова величина X має розподіл з важким хвостом, якщо

$$P[X > x] \sim c \cdot x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (1.10)$$

де величина α , $0 < \alpha < 2$, називається параметром форми; c - деяка позитивна константа.

На відміну від розподілів з легкими хвостами, такими як експоненціальне або гаусівське, які мають експоненціальне убуття хвоста, випадкові величини з важким хвостом мають хвости, що спадають за степеневим (гіперболічним) законом. При $0 < \alpha < 2$ випадкові величини мають нескінченну дисперсію, а при $0 < \alpha \leq 1$ ще й мають нескінченне математичне очікування. Основна властивість випадкової величини, розподіленої з важким хвостом, полягає в тому, що вона проявляє високу мінливість. Іншими словами, її вибірка представляє собою в основному відносно невеликі значення, проте також містить і достатню кількість дуже великих значень.

Параметр Херста H являє собою ключову міру самоподібності і міру тривалості довгостроковій залежності стохастичного процесу. В разі $0.5 < H < 1$ говорять про персистентну (яка підтримується) поведінку процесу, або про те, що процес має тривалу пам'ять. Іншими словами, якщо протягом деякого часу в минулому спостерігалися позитивні збільшення процесу, тобто відбувалися прирости, то і надалі в середньому буде відбуватися збільшення. Інакше кажучи, ймовірність того, що процес на $i+1$ кроці відхиляється від середнього в тому ж напрямку, що і на i кроці настільки велика, наскільки параметр H близький до 1. Таким чином, персистентні стохастичні процеси виявляють чітко виражені тенденції зміни при відносно малому шумі.

В разі $0 < H < 0.5$ кажуть про антиперсистентний процес. Тут високі значення процесу слідує за низькими, і навпаки. Іншими словами, ймовірність того, що на $i+1$ кроці процес відхиляється від середнього в протилежному напрямку (по відношенню до відхилення на i кроці) настільки велика, наскільки параметр H близький до 0. При $H = 0.5$ відхилення процесу від середнього є дійсно випадковими і не залежать від попередніх значень, що відповідає випадку звичайного броунівського руху.

1.2 Мультифрактальні процеси

Мультифрактальні міри були введені Б. Мандельбротом [Mandelbrot, 1974] для опису розподілу турбулентної дисипації. З тих пір мультифрактальні структури були виявлені в безлічі природних і технічних процесів і використовуються для моделювання та дослідження турбулентних процесів, телекомунікаційних потоків, фінансових ринків, медичних даних, геофізичних процесів тощо.

Мультифрактальність – це концепція, яка, з деякими незначними змінами, може бути в рівній мірі добре застосована до функцій і заходів, детермінованим або стохастичним. В описі основних понять і

властивостей мультифрактальних процесів існує кілька підходів: глобальний, при якому основні визначення і властивості виводяться через властивості моментів випадкових процесів [Calvet, 1997; Riedi, 2002; Kantelhardt, 2008; Abry 2009]; локальний, що описує локальні масштабні і сингулярні властивості фрактальних реалізацій і функцій, заснований на властивостях локальних експонент Гельдера [Feder, 1988; Riedi, 2002; Kantelhardt, 2002; Abry 2009]; і підхід, заснований на властивостях фрактальних і мультифрактальних мір (множин) [Mandelbrot, 2001; Riedi, 2002; Abry 2009].

1.2.1. Закони розподілу та моментні характеристики мультифрактальних процесів

На відміну від самоподібних процесів (1.2) мультифрактальні процеси мають більш різноманітну скейлінгову поведінкою [Riedi, 2002]:

$$\text{Law}\{X(at)\} = \text{Law}\{M(a) \cdot X(t)\}, \dots, \quad (1.11)$$

де $M(a)$ – незалежна від $X(t)$ випадкова функція.

У разі самоподібного процесу $M(a) = a^H$. Для мультифрактальних процесів узагальнений показник Херста $H(a) = \log_a M(a)$ є випадковою функцією аргументу a . Співвідношення (1.11) можна переформулювати наступним чином:

$$\text{Law}\{X(at)\} = \text{Law}\{a^{H(a)} \cdot X(t)\}, \quad (1.12)$$

Властивість мультифрактальності (1.12) встановлює досить жорсткі обмеження на закони розподілу випадкових функцій $M(a)$ і $X(t)$. Для випадкової скейлінгової функції $M(a)$ має виконуватися така умова:

$$\text{Law}\{M(ab)\} = \text{Law}\{M_1(a) \cdot M_2(b)\}, \quad (1.13)$$

де $M_1(a)$ і $M_2(a)$ незалежні і мають той же закон розподілу, що і $M(a)$.

Для мультифрактального процесу $X(t)$ має слідувати, що якщо виконується умова $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$, то відношення (1.12) тягне за собою наступне:

$$\text{Law}\left\{\frac{X(a_2 t)}{X(a_1 t)}\right\} = \text{Law}\left\{\frac{X(a_3 t)}{X(a_2 t)}\right\}.$$

З цих властивостей випливає визначальна властивість мультифрактального процесів [Calvet, 1997; Mandelbrot, 2001; Riedi, 2002]: процес $X(t)$ є мультифрактальним, якщо виконується наступне відношення:

$$\mathbb{M}\left[|X(t)|^q\right] = c(q) \cdot t^{\tau(q)+1}, \quad \forall t \in \Gamma, \quad \forall q \in \mathbb{Q}, \quad (1.14)$$

де $c(q)$ і $\tau(q)$ – деякі детерміновані функції. Величини Γ і \mathbb{Q} є інтервалами ненульовий довжини на дійсній осі, і $0 \in \Gamma$, $[0, 1] \subset \mathbb{Q}$.

Мультифрактальні процеси, таким чином, мають глобальний скейлінг, в тому сенсі, що його моменти задовольняють скейлінговому співвідношенню (1.14). Функція $\tau(q)$ називається скейлінговою

експонентою мультифрактального процесу. З (1.14) випливають деякі властивості функції $\tau(q)$: $\tau(0) = -1$; $\tau(1) = 0$, $\tau(q)$ - опукла функція.

Узагальнений показник Херста $h(q)$ пов'язаний з функцією $\tau(q)$ співвідношенням [Kantelhardt, 2002]:

$$\tau(q) = qh(q) - 1. \quad (1.15)$$

Самоподібні процеси є підкласом мультифрактальних. Для самоподібних процесів скейлінгова експонента лінійна: $\tau(q) = Hq - 1$ і значення $\frac{\tau+1}{q}$ при $q = 2$ збігається зі значенням показника самоподібності H .

1.2.2 Характеристики мультифрактальних множин

Самоподібність фрактальних об'єктів полягає в збереженні структури об'єкта при зміні масштабу. Розглянемо основні характеристики мультифрактальної множини [Божокін, 2001]. Нехай в загальному випадку мультифрактальний об'єкт займає деяку обмежену область в d -мірному Евклідовому просторі і визначає собою множину з $N \rightarrow \infty$ точок. Розіб'ємо всю область на кубічні комірки з ребром ε і об'ємом ε^d . Розглянемо узагальнену статистичну суму $Z(q, \varepsilon)$, що характеризується показником ступеня q , який може приймати будь-які значення в інтервалі $-\infty < q < +\infty$:

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon), \quad (1.16)$$

де $p_i(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i(\varepsilon)}{N}$; $n_i(\varepsilon)$ – кількість точок, що потрапило в комірку з номером i ; $N(\varepsilon)$ – сумарна кількість зайнятих комірок, яка залежить від розміру комірки ε .

Ймовірності p_i характеризують відносну заселеність комірок. У загальному випадку мультифрактальна множина характеризується деякою нелінійною функцією $\tau(q)$, що визначає поведінку статистичної суми $Z(q, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$Z(q, \varepsilon) \propto \varepsilon^{\tau(q)}. \quad (1.17)$$

Функція $\tau(q)$ зазвичай називається скейлінговою експонентою і визначається як

$$\tau(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Z(q, \varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \quad (1.18)$$

У разі однорідної фрактальної множини з фрактальною розмірністю D у всіх зайнятих комірках міститься однакова кількість точок, тобто, $p_i(\varepsilon) = p(\varepsilon) = 1/N(\varepsilon)$, і узагальнена статистична сума набуває вигляду:

$$Z(q, \varepsilon) = N^{1-q}(\varepsilon) = \varepsilon^{-D(1-q)},$$

а функція $\tau(q) = (q-1)D$ є лінійною. Якщо розподіл точок по комірках не однаково, то фрактальна множина є неоднорідною, тобто мультифрактальною, і $\tau(q)$ є нелінійною функцією. При $q \rightarrow +\infty$ основний внесок в узагальнену статистичну суму вносять комірки, які містять найбільшу кількість

частинок n_i і, отже, характеризуються найбільшою ймовірністю заповнення p_i . Навпаки, при $q \rightarrow -\infty$ основний внесок в суму дають самі розріджені комірки з малими значеннями p_i . Таким чином, функція $\tau(q)$ показує, наскільки неоднорідним є досліджувана множина точок.

Функція мультифрактального спектра (спектра сингулярностей) $f(\alpha)$ в даному випадку вводить наступним чином. Залежність ймовірності від розміру комірки $p_i(\varepsilon)$ має степеневий характер

$$p_i(\varepsilon) \propto \varepsilon^{\alpha_i}, \quad (1.19)$$

де α_i є певний показник ступеня, взагалі кажучи різний, для різних комірок (показник сингулярності). Для однорідного фракталу всі показники ступеня α_i однакові і дорівнюють фрактальній розмірності D .

Функція мультифрактального спектра $f(\alpha)$ характеризує розподіл ймовірностей різних значень α_i . Якщо величина $n(\alpha)d\alpha$ є ймовірністю того, що α_i знаходиться в інтервалі $(\alpha, \alpha + d\alpha)$, тобто являє собою число комірок i , що володіють однаковою мірою $p_i(\varepsilon)$ з $\alpha_i \in (\alpha, \alpha + d\alpha)$, Тоді

$$n(\alpha) \approx \varepsilon^{-f(\alpha)}. \quad (1.20)$$

Таким чином, функція $f(\alpha)$ являє собою фрактальну розмірність деякої однорідної фрактальної підмножини ξ_α з початкової множини ξ , що характеризується однаковими ймовірностями заповнення комірок $p_i(\varepsilon) \approx \varepsilon^\alpha$.

З огляду на вираження (1.16) і (1.20), узагальнену статистичну суму $Z(q, \varepsilon)$ можна виразити через функцію мультифрактального спектра $f(\alpha)$ наступним чином:

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) \approx \int d\alpha n(\alpha) \varepsilon^{q\alpha} \approx \int d\alpha \varepsilon^{q\alpha - f(\alpha)}.$$

Формально перехід від змінних $\{q, \tau(q)\}$ до змінних $\{\alpha, f(\alpha)\}$ може бути здійснений за допомогою наступних перетворень Лежандра:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{d\tau}{dq}, \\ f(\alpha) = q \frac{d\tau}{dq} - \tau \end{array} \right. \quad \text{і} \quad \left\{ \begin{array}{l} q = \frac{df}{d\alpha}, \\ \tau(q) = \alpha \frac{df}{d\alpha} - f. \end{array} \right. \quad (1.21)$$

1.3 Деякі моделі самоподібних і мультифрактального процесів

Для аналізу і порівняння методів оцінювання, а також розробки нових, необхідно моделювати часові реалізації самоподібних і мультифрактального процесів.

1.3.1 Моделі фрактального броунівського руху

Фрактальний (узагальнений) броунівський рух (ФБР) було вперше запропоновано і досліджено Б. Мандельброт [Mandelbrot, 1968]. Надалі клас моделей, заснованих на ФБР, отримав подальший розвиток у багатьох роботах [Feder, 1988].

При звичайному випадковому блуканні частинки, для будь-якої пари моментів часу t і t_0 , приріст ΔX координати частинки задається виразом

$$X(t) - X(t_0) \sim \xi |t - t_0|^H,$$

де $H = 1/2$; ξ - випадкова величина зі стандартним нормальним розподілом.

Узагальнений броунівський рух $B_H(t)$ вводиться шляхом заміни показника $H = 1/2$ на дійсне число з інтервалу $[0,1]$. ФБР також може бути отримано зі звичайного броунівського руху взяттям інтеграла:

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H+0.5)} \int_{-\infty}^t (t-u)^{H-0.5} dB(u),$$

де $\Gamma(x)$ - гамма-функція. Таким чином, значення $B_H(t)$ в момент часу t залежить від усіх попередніх ($u < t$) приростів $dB(u)$ простого броунівського руху. Прирости цього процесу називаються фрактальним гаусівським шумом (ФГШ). ФГШ має нульове математичне очікування і дисперсію, що залежить від часу: $D(B_H(t) - B_H(t_0)) = D[\xi] \cdot |t - t_0|^{2H}$.

Кореляційна функція ФГШ з дискретним часом має вигляд $r(k) = \frac{1}{2} [(k+1)^{2H} - 2k^{2H} + (k-1)^{2H}]$.

Можна показати, що $r(k) \sim H(2H-1)|k|^{-\beta}$, $k \rightarrow \infty$, $0 < H < 1$, $\beta = 2 - 2H$, а також, що усереднений процес $X^{(m)}$ має такі ж розподіли, як і процес X для всіх $0 < H < 1$. Таким чином ФГШ є строго самоподібним процесом.

Методи побудови моделей самоподібних часових рядів на основі ФБР для випадку дискретного часу розглянуті, зокрема, в роботах [Feder, 1988; Кроновер, 2000]. Моделі, одержувані з використанням цих методів, мають певні недоліки, одним з яких є заниження (завищення) ступеня самоподібності процесу при малих або великих теоретичних значеннях параметра Херста і невеликій довжині реалізації [Feder, 1988; Jeong, 1998; Шелухин, 2008].

Широко використовуваним на практиці методом побудови моделей ФБР є метод послідовного випадкового складання Фосса. Наведемо покроковий алгоритм його реалізації [Feder, 1988]. Вихідні значення координат $X(t_i)$ в моменти часу $t_i = 0, 1/2, 1$ дорівнюють нулю. На першому кроці до значень координат $X(t_1), X(t_2), X(t_3)$ додаються випадкові числа, вибрані з нормального розподілу з нульовим середнім і початковою дисперсією σ_1^2 . Середні значення часу на кожному інтервалі розглядаються як додаткові вузли на осі часу; значення координати в них оцінюються інтерполяцією. На наступному кроці до всіх координат $X(t_i)$ ($t_i = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$) додаються випадкові числа з нульовим середнім значенням і зменшеною дисперсією $\sigma_2^2 = \frac{\sigma_1^2}{2^{2H}}$. На n -ному кроці алгоритму ми

отримуємо значення реалізації ФБР для $1+2^n$ значень часу t_i . Дисперсія доданків n -го покоління

$$\text{дорівнює } \sigma_n^2 = \frac{\sigma_{n-1}^2}{2^{2H}} = \frac{\sigma_0^2}{2^{2Hn}}.$$

Іншим поширеним методом побудови моделей ФБР для дискретного часу є метод Селлан-Мейера, який використовує біртогональні вейвлети [Meyer, 1995; Sellan, 1995]. В цьому випадку побудова реалізації ФБР здійснюється за допомогою дискретного вейвлет-перетворення, де деталізуючі вейвлет-коефіцієнти на кожному рівні є незалежними нормально розподіленими випадковими величинами; апроксимуючі вейвлет-коефіцієнти отримані за допомогою фрактального процесу авторегресії і ковзного середнього FARIMA:

$$B_H(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_H(t-k) S_k^{(H)} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-jH} \Psi_H(2^j t - k) \varepsilon_{j,k} - b_0,$$

де Ψ_H – біртогональна базова вейвлет-функція; Φ_H – відповідна Ψ_H скейлинг-функція; $S_k^{(H)}$ – стаціонарний гаусівський процес FARIMA з параметром дрібного диференціювання $d = H - 0.5$; $\varepsilon_{j,k}$ – незалежні стандартні нормальні випадкові величини; b_0 – константа, така, що $B_H(0) = 0$.

В роботі [Кириченко 2009] було проведено дослідження фрактальних властивостей реалізацій моделей ФБР, отриманих як за методом послідовного випадкового складання (метод Фосса), так і по методу вейвлет-перетворення (метод Селлан-Мейера). Наведені результати свідчать, що модель ФБР, реалізована за допомогою вейвлет-перетворення, більш коректно відображає ступінь самоподібності для вибірок з діапазоном довжини 200-10000 значень. Однак слід зазначити, що час генерації даної моделі в середньому на порядок більше часу генерації ФБР за методом Фосса. Надалі будуть приведені результати чисельних експериментів, де реалізації фрактального процесу отримані за допомогою методу Селлан-Мейера. На рис.1.1 представлені реалізації ФБР і ФГШ, побудовані при значеннях показника Херста $H = 0.3, 0.5, 0.8$.

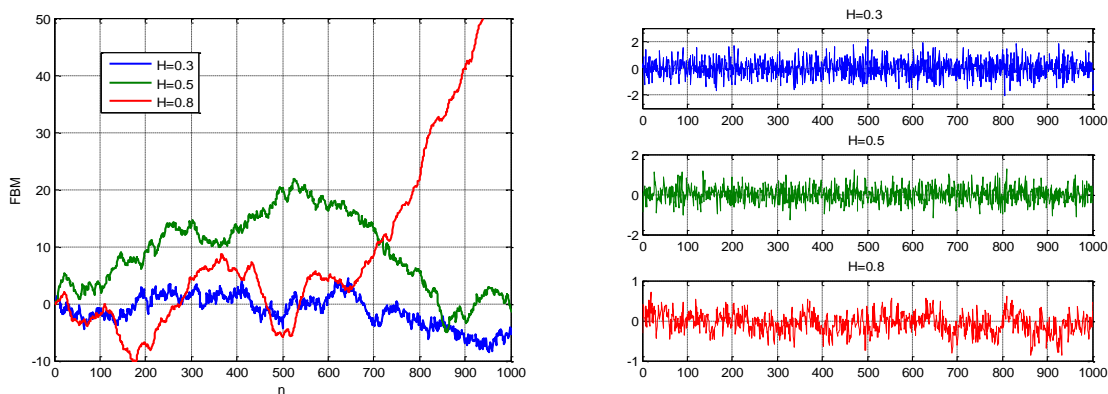


Рисунок 1.1 – Реалізації ФБР (зліва) і ФГШ (справа) для різних значень H

1.3.2 Моделі, засновані на α -стійких розподілах

Випадкова величина X називається α -стійкою, якщо для будь-яких двох позитивних чисел a, b знайдуться позитивні числа c, d такі, що

$$\text{Law}(aX_1 + bX_2) = \text{Law}(cX + d), \quad (1.22)$$

де $\text{Law}(\cdot)$ позначає закон розподілу, X_1 і X_2 – незалежні випадкові величини; $\text{Law}(X_1) = \text{Law}(X_2) = \text{Law}(X)$.

Якщо виконується (1.22), то існує таке $\alpha \in (0, 2]$, яке не залежить від a і b , що для величини c в (1.22) виконується рівність $c^\alpha = a^\alpha + b^\alpha$.

У загальному випадку, для α -стійких розподілів в явному вигляді може бути записана тільки характеристична функція $\varphi(t) = \mathbb{M}[e^{itX}]$. Характеристична функція стійкої випадкової величини з параметрами $0 < \alpha \leq 2$, $\sigma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ і $\mu \in \mathbb{R}$ має вигляд:

$$\ln \varphi(t) = \begin{cases} -\sigma^\alpha |t|^\alpha \left(1 - i\beta \text{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\mu t, & \alpha \neq 1, \\ -\sigma |t| \left(1 + i\beta \text{sign}(t) \frac{2}{\pi} \ln |t|\right) + i\mu t, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Параметр α називається індексом стійкості або характеристичним показником і визначає, наскільки виражений важкий хвіст розподілу. При $0 < \alpha < 2$ випадкові величини мають нескінченну дисперсію, а при $0 < \alpha \leq 1$ ще й мають нескінченне математичне очікування. Параметр зсуву β задає ступінь асиметричності розподілу, при $\beta = 0$ розподіл симетричний. Величина σ (масштабний параметр) виражає ступінь розкиду значень відносно середнього значення. Параметр μ при $\alpha > 1$ є математичним сподіванням X . [Borak, 2005].

Стохастичний процес $X(t)$ є α -стійким ординарним рухом Леві, якщо він має стаціонарні незалежні α -стійкі прирости. Такий процес є самоподібним з параметром $H = 1/\alpha$.

$$\text{Law}\{X(at)\} = a^{\frac{1}{\alpha}} \text{Law}\{X(t)\}. \quad (1.23)$$

Він використовується в моделюванні і дослідженні випадкових процесів з двох причин. Першою причиною є те, що рух Леві є узагальненням ординарного броунівського руху. Математичне обґрунтування такого узагальнення виходить із застосування головних властивостей стійких законів ймовірності. З точки зору граничної теореми, стійкі розподіли є природним узагальненням широко відомих гаусівських розподілів. Друга причина важливості руху Леві криється в його властивості масштабної інваріантності, тобто самоподібності. Більш того, прирости руху Леві не тільки самоподібні, а ще мають розподіли з великими хвостами.

В роботі [Соболев, 2012] розглянуто моделювання реальних часових рядів на основі руху Леві. В основу моделювання покладено алгоритм, запропонований в роботі [Chamber, 1976]. Пізніші модифікації алгоритму наведені в [Mittnik, 1999].

Алгоритм стартує з моделювання двох вибірок випадкових величин: однієї (γ_i) – рівномірно розподіленою на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ і інший (W_i) -

Алгоритм стартує від моделювання двох вибірок випадкових величин: однієї (γ_i) Рівномірно розподіленою на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ і другий (W_i) - незалежної від неї найпростішої експоненціально розподіленою. для випадку $\alpha \neq 1$ розраховується величина:

$$X_i = S_{\alpha,\beta} \frac{\sin(\alpha(\gamma_i + B_{\alpha,\beta}))}{(\cos \gamma_i)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\cos(\gamma_i - \alpha(\gamma_i + B_{\alpha,\beta}))}{W_i} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}, \quad (1.24)$$

де $S_{\alpha,\beta} = \left(1 + \beta^2 \tan^2 \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right)^{\frac{1}{2\alpha}}$, $B_{\alpha,\beta} = \frac{\arctan(\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2})}{\alpha}$.

Для випадку $\alpha = 1$ формула (1.24) зводиться до виразу

$$X_i = \frac{2}{\pi} \left(\left(\frac{\pi}{2} + \beta\gamma_i \right) \tan \gamma_i - \beta \ln \left(\frac{\frac{\pi}{2} W_i \cos \gamma_i}{\frac{\pi}{2} + \beta\gamma_i} \right) \right). \quad (1.25)$$

Формули (1.24-1.25) моделюють значення стандартних стійких випадкових величин $S_\alpha(1, 0, 0)$, Проте легко перейти до загального випадку $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, використовуючи співвідношення

$$Y_i = \begin{cases} \sigma X_i + \mu, & \alpha \neq 1 \\ \sigma X_i + \frac{2}{\pi} \beta \sigma \ln \sigma + \mu, & \alpha = 1 \end{cases}.$$

На рис.1.2 наведені модельні часові реалізації та відповідні щільності розподілів симетричних α – стійких випадкових величин $S_\alpha(1, 0, 0)$ для значень параметра $\alpha = 0.8, 1.2, 1.8$.

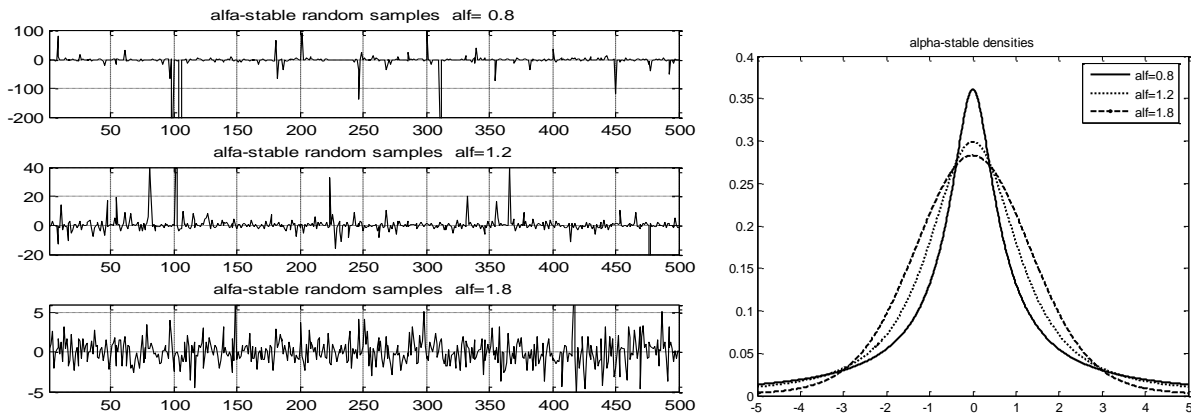


Рисунок 1.2 - Модельні реалізації та щільності розподілів для $S_\alpha(1, 0, 0)$

1.3.3 Каскадні моделі мультифрактальних процесів

Основними математичними моделями мультифрактального процесів є каскадні процеси [Feder, 1988; Riedy, 2002]. Мультиплікативні каскади спочатку були введені А.Н. Колмогоровим для опису нерегулярного розподілу швидкості дисипації енергії турбулентного потоку. Подальше інтенсивне вивчення і розвиток каскадних моделей було викликано роботами Б. Мандельброта [Mandelbrot, 1974; Calvet, 1997].

Детерміновані каскади

Найпростішою моделлю мультифрактального процесу з заданими властивостями є детермінований біноміальний мультиплікативний каскад [Feder, 1988; Riedy, 2002; Kantelhardt, 2008]. При його побудові початковий одиничний інтервал $[0, 1]$ з мірою $\mu_0 = 1$ ділиться на два рівних інтервалу

$[0, 1/2]$ і $[1/2, 1]$, яким приписуються вагові коефіцієнти p_1 і $p_2 = 1 - p_1$ відповідно, тобто на 1-му кроці ми отримуємо такі міри підінтервалів: $\mu_1[0, 1/2] = p_1$ і $\mu_1[1/2, 1] = 1 - p_1$. Потім з кожним з отриманих підінтервалів проводиться аналогічна процедура. В результаті на другому кроці є 4 підінтервала з відповідними мірами $\mu_2[0, 1/4] = p_1 p_1$, $\mu_2[1/4, 1/2] = p_1 p_2$, $\mu_2[1/2, 3/4] = p_2 p_1$, $\mu_2[3/4, 1] = p_2 p_2$.

На n -му кроці підінтервал $[t_j, t_j + 2^{-n}]$, де $t_j = 0, 2^{-n}, \dots, 1 - 2^{-n}$ має міру $\mu_k[t_j, t_j + 2^{-n}] = p_1^{n-\phi_0} p_2^{n-\phi_1}$, де ϕ_0 – частка 0 в двійковому поданні t , ϕ_1 – частка одиниць в двійковому поданні t . При числі кроків $n \rightarrow \infty$ і $p_1 \neq p_2$ ми приходимо до граничної міри, що є неоднорідною фрактальною множиною. На кожному n -у кроці міра всього початкового відрізка залишається незмінною $\sum_j \mu_n[t_j, t_j + 2^{-n}] = 1$. Такі каскади називаються консервативними.

На малюнку 1.3 зліва представлені теоретичні скейлінгові експоненти $\tau(q)$ для значень $p_1 = \{0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$, а праворуч показані реалізації біноміального каскаду при значеннях $p_1 = 0.6$ (вгорі) і $p_1 = 0.8$ (внизу). Число ітерацій $n = 10$, тобто довжина реалізації дорівнює 2^{10} значень. Очевидно, що зі збільшенням початкового вагового коефіцієнта p_1 збільшується неоднорідність часового ряду.

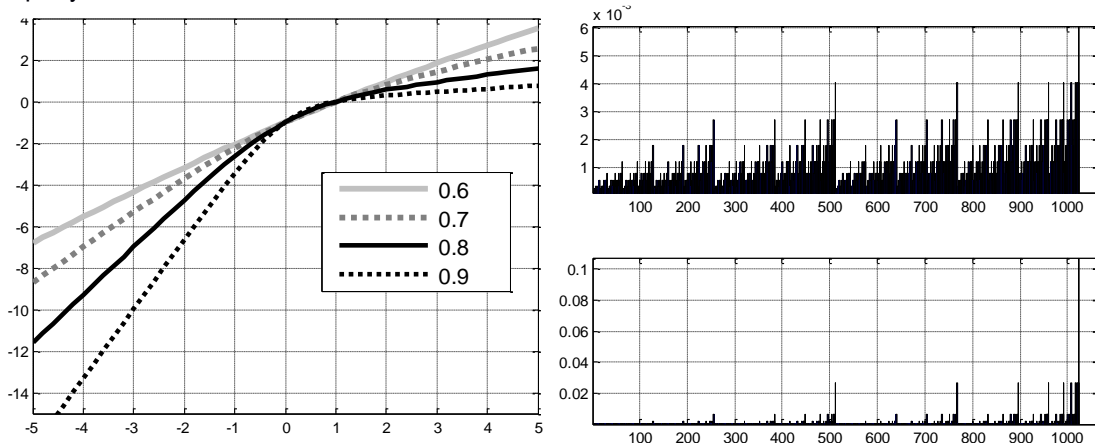


Рисунок 1.3 - Скейлінгові експоненти і реалізації детермінованого біноміального каскаду

Стохастичні каскади

Властивості детермінованого каскаду повністю визначаються величиною p_1 . При побудові стохастичних каскадів ваговими коефіцієнтами є незалежні значення деякої заданої випадкової величини W [Riedy, 2002]. У цьому випадку на n -му кроці підінтервал довжини 2^{-n} можна позначити як $I(k_1 \dots k_n)$, де $k_1 \dots k_n$ – послідовність 0 і 1. Цей підінтервал буде мати міру

$$\mu_n(I(k_1 \dots k_n)) = 2^{-n} \prod_{i=1}^n W(k_1 \dots k_i) = 2^{-n} \text{Exp} \left\{ \sum_{i=1}^n w(k_1 \dots k_i) \right\}, \quad (1.26)$$

де всі $W(k_1 \dots k_i) = \text{Exp} \{w(k_1 \dots k_i)\}$ є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, такими що $M[W] = 1$. Доведено, що така процедура сходиться майже напевно до стохастичною мультифрактальному міру за умови

$$M[W \cdot \ln W] < 1. \quad (1.27)$$

Важливою властивістю мультиплікативних каскадів є їхня властивість самоподібності:

$$\mu(I(k_1 \dots k_n)) \doteq 2^{-1} W \mu(I(k_1 \dots k_{n-1})). \quad (1.28)$$

З (1.26) і (1.28) слід скейлінгове співвідношення

$$M \left[\mu(0, 2^{-n})^q \right] = 2^{-nq} M \left[W^q \right]^n M \left[\mu(0, 1)^q \right],$$

яке дозволяє визначити скейлінгову експоненту $\tau(q)$.

Щоб обчислити скейлінгову експоненту $\tau(q)$, робляться такі спрощення [Molchan, 1996; Riedi, 2002]:

– замість граничної міри μ_∞ розглядається міра μ_n на n -ому кроці;

– при обчисленнях передбачається, що процес має ергодичні властивості і середнє величин μ_n^q за станом замінюється середнім за реалізаціями.

При зроблених припущеннях

$$\tau(q) = -\log_2 M[W^q] + q - 1. \quad (1.29)$$

Для існування нетривіальної граничної міри μ_∞ потрібно виконання умови $\tau'(1) > 0$, що збігається з (1.27).

При побудові стохастичних каскадів ваговими коефіцієнтами є незалежні значення деякої заданої випадкової величини W . Випадкова величина вибирається таким чином, щоб математичне очікування суми вагових коефіцієнтів на кожній ітерації дорівнювало одиниці. Якщо вибрати випадкову величину, визначену на інтервалі $[0, 1]$, то сума коефіцієнтів на кожній ітерації буде дорівнювати одиниці.

В цьому випадку першим двом інтервалам будуть приписані вагові коефіцієнти w_1 і $1 - w_1$ відповідно. На другому кроці додаються два нових незалежних випадкових значення w_2 і w_3 . Вийде 4 інтервалу з ваговими коефіцієнтами $w_1 w_2$, $w_1(1 - w_2)$, $(1 - w_1)w_3$ і $(1 - w_1)(1 - w_3)$. При $n \rightarrow \infty$ ми приходимо до граничної міри, що є неоднорідною фрактальною множиною.

В роботі [Kirichenko, 2012] в якості випадкової величини, що породжує вагові коефіцієнти, розглянута випадкова величина, що має бета-розподіл. Бета-розподілом з параметрами $a > 0$, $b > 0$, називається розподіл з щільністю ймовірностей

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a, b)} (1-x)^{b-1}, & x \in (0, 1), \\ 0, & x \notin (0, 1) \end{cases},$$

де $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$ – бета-функція. Для бета-розподілу з однаковими значеннями

параметрів $a = b$, у якого функція щільності розподілу симетрична, можна аналітично визначити скейлінгову експоненту $\tau(q)$ [Riedy, 2002]:

$$\tau(q) = -\log_2 \frac{\text{Beta}(\alpha+q, \alpha)}{\text{Beta}(\alpha, \alpha)} - 1 \quad (1.30)$$

На рис. 1.4 (а) наведені різні типи щільності розподілу ймовірностей для симетричного бета-розподілу при значеннях $a = \{0.5, 1, 1.5, 3\}$. При значеннях параметрів $a = b = 1$ ми отримуємо

випадкову величину, що має рівномірний розподіл на інтервалі $[0,1]$. На рис. 1.4 (б) представлені графіки скейлінгових експонент для відповідних значень параметра a симетричного бета-розподілу.

Очевидно, що зі збільшенням значення параметра a відбувається ослаблення мультифрактальних властивостей часового ряду. На рис. 1.5 показані відповідні реалізації біноміальних каскадів.

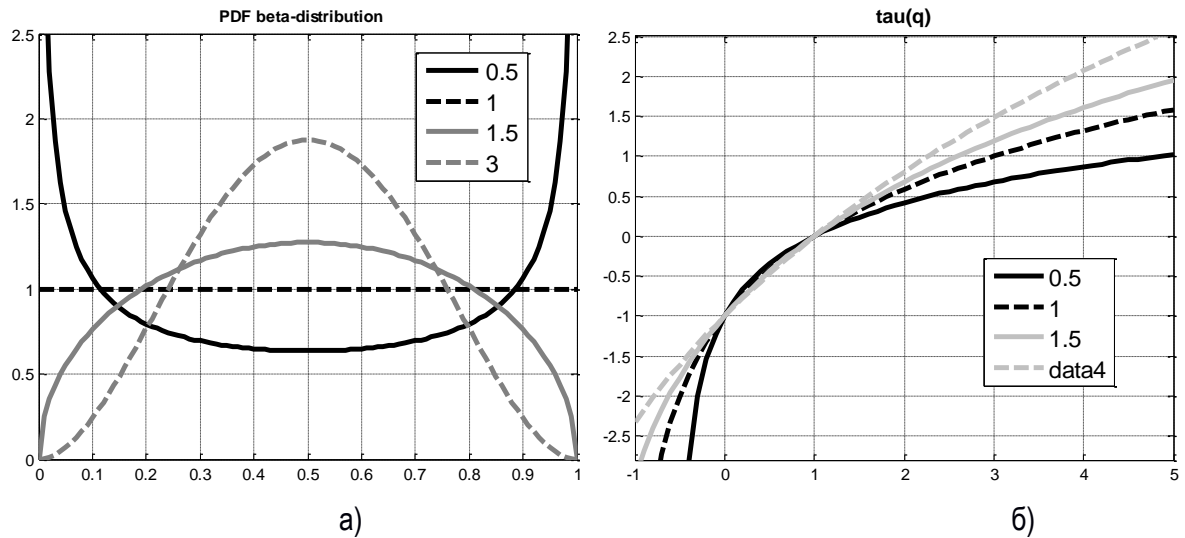


Рисунок 1.4 – Щільності розподілу (а) і скейлінгові експоненти $\tau(q)$ для різних значень параметра a симетричного бета-розподілу

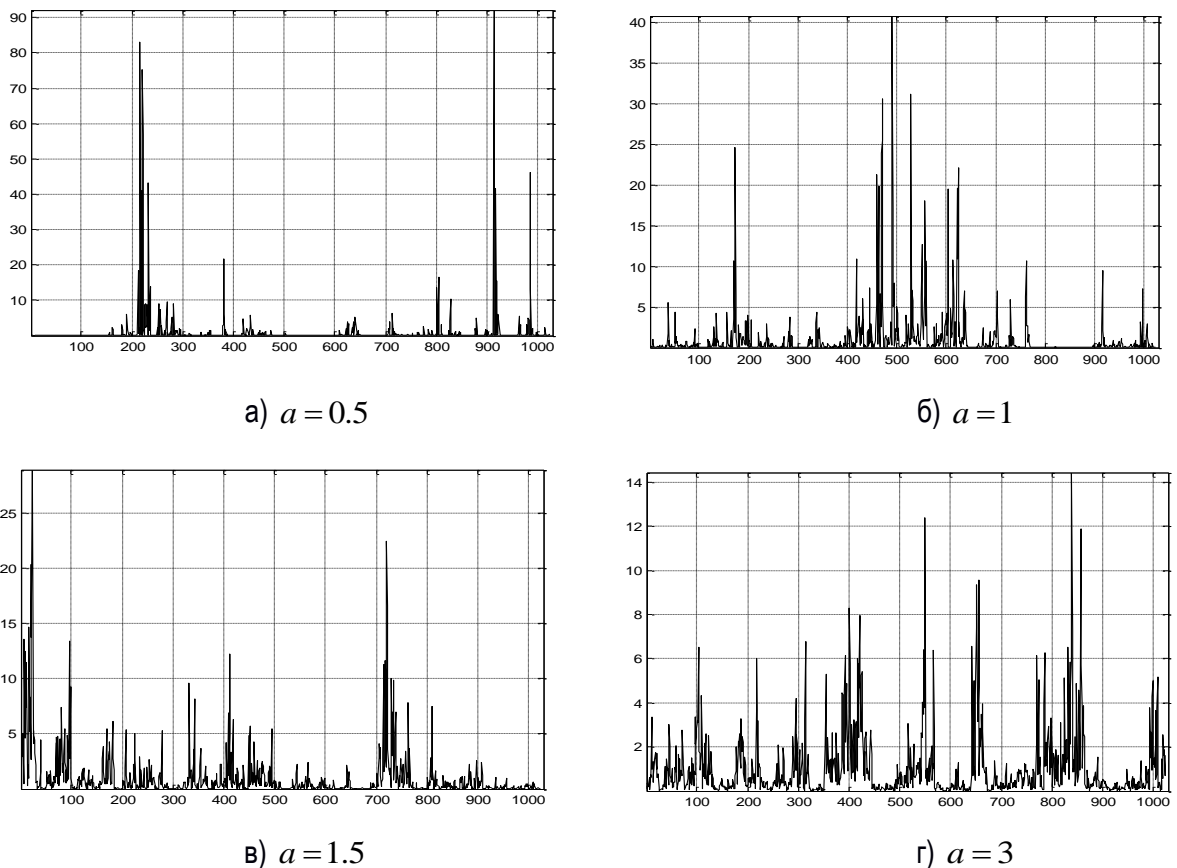


Рисунок 1.5 – Реалізації біноміального каскаду для різних значень a

У разі симетричного бета-розподілу мультифрактальні властивості каскаду повністю визначаються параметром a . Показник Херста H , враховуючи формулу (1.15), в цьому випадку дорівнює

$$H = \frac{\tau(2)+1}{2} = -\log_2 \frac{\text{Beta}(\alpha+q,\alpha)}{2 \text{Beta}(\alpha,\alpha)}.$$

Література до розділу 1

- [Abry, 2009] Abry, P., Goncalves, P., Vehe J.L. Scaling, Fractals and Wavelets. London : John Wiley & Sons, 2009. – 464 p.
- [Borak, 2005] Borak, S., Hardle, W., Weron, R.. Stable distributions. In Statistical tools for finance and insurance. Berlin: Springer, 2005. pp. 21-44.
- [Calvet, 1997] Calvet, L., Fisher, A., Mandelbrot, B. Large deviation and the distribution of price changes. Cowles Foundation Discussion Paper, Yale: University, №1165, 1997. pp. 1–28.
- [Chamber, 1976] Chambers, J.M., Mallows, C.L., Stuck, B.W. A method for simulating stable random variables, Journal of the American Statistical. Association, Vol. 71, 1976. pp.340-344.
- [Feder, 1988] Feder, J. Fractals. Plenum, New York, 1988.
- [Jeongy, 1998] Jeongy, H.-D. J., McNickle, D., Pawlikowski, K. A Comparative Study of Generators of Synthetic Self-Similar Teletraffic. Department of Computer Science and Management, University of Canterbury, 1998.
- [Kantelhardt, 2002] Kantelhardt, J.W., Zschiegner, S.A., Bunde, A., Havlin, S., Koscielny-Bunde, E., Stanley, H.E. Multifractal detrended fluctuation analysis of non-stationary time series. Physica A., vol. 316, 2002. pp. 87–114.
- [Kantelhardt, 2008] Kantelhardt J. W. Fractal and Multifractal Time Series. [Электронный ресурс]: 2008.– Режим доступа: <http://arxiv.org/abs/0804.0747>.
- [Kirichenko, 2012]. Kirichenko, L., Radivilova, T., Kayali, E. Modeling telecommunications traffic using the stochastic multifractal cascade process Problems of Computer Intellectualization. Kiev–Sofia: ITHEA, 2012. pp. 55–63.
- [Leland, 1993] Leland, W.E., Taqqu, M. S., Willinger, W., Wilson, D. V. Statistical analysis of high time-resolution Ethernet LAN traffic measurements. Computing Science and Statistics, vol. 25, 1993. pp. 146–155.
- [Mandelbrot, 1968] Mandelbrot, B., Van Ness J. W. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. SIAM Review, Vol. 10, №4, 1968. pp. 422–437.
- [Mandelbrot, 1974] Mandelbrot, B. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier. Mathematical Sciences Department, IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, 1974.
- [Mandelbrot, 1983] Mandelbrot, B., Freeman, W. H. The Fractal Geometry of Nature. San Francisco, 1983.
- [Mandelbrot, 2001] Mandelbrot, B. Scaling in financial prices: II. Multifractals and the star equation. Quantitative Finance, Vol. 1, 2001. pp. 124–130.
- [Meyer, 1995] Meyer, Y., Sellan, F., Taqqu, M. S. Wavelets, generalized white noise and fractional integration: the synthesis of fractional Brownian motion. The Journal of Fourier Analysis and Applications, Vol. 5, №5, 1995. pp. 465–494.
- [Mittnik, 1999] Mittnik, S., Doganoglu, T., and Chenyao, D. Computing the probability density function of the stable Paretian distribution, Mathematical and Computer Modelling, Vol. 29, 1999. pp.235-240

- [Molchan, 1996] Molchan, G. M. Scaling Exponents and Multifractal Dimensions for Independent Random Cascades. *Commun. Math. Phys.*, Vol.179, 1996. pp.681–702.
- [Riedi, 2002] Riedi, Rudolf H. Multifractal processes, in Doukhan P., Oppenheim G., Taqqu M.S. (Eds.), *Long Range Dependence: Theory and Applications*, 2002. pp. 625–715.
- [Sellan, 1995] Sellan, F. Synthèse de mouvements browniens fractionnaires à l'aide de la transformation par ondelettes. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série I*, Vol. 321, 1995. pp.351–358.
- [Taqqu, 1995] Taqqu, M.S., Teverovsky, V., Willinger, W. Estimators for long-range dependence: an empirical study. *Fractals*, № 3(4), 1995. pp. 785–798.
- [Taqqu, 1997] Taqqu, M., Willinger, M., Sherman, R. Proof of a Fundamental Result in Self-Similar Traffic Modeling. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, № 5(2), 1997.
- [Willinger, 1997] Willinger W., Taqqu M. S., Sherman, R., and Wilson, D.V. Self-Similarity through high-variability: statistical analysis of ethernet LAN traffic at the source level. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, № 5(1), 1997. pp. 43–62.
- [Божокін, 2001] Божокін, С.В., Паршин, Д.А. Фракталы и мультифракталы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
- [Кириченко, 2009] Кириченко, Л.О., Дейнеко, Ж. В. Оценивание самоподобия стохастического временного ряда методом вейвлет-анализа. *Радіоелектронні і комп'ютерні системи*, № 4 (38), 2009. сс. 99–105.
- [Кроновер, 2000] Кроновер, Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории, М.: Постмаркет, 2000. 352 с.
- [Соболев, 2012] Соболев, В.І., Кіриченко, Л.О., Мережкін, Д.Г. Моделювання часових рядів за допомогою α -стійкого процесу Леві. Вибір і обробка інформації, №37 (113), 2012. сс.19-25.
- [Шелухин, 2008] Шелухин, О. И., Осин, А. В., Смольский, С. М. Самоподобие и фракталы. Телекоммуникационные приложения, М. : Физматлит, 2008. 368 с.

РОЗДІЛ 2

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРА САМОПОДІБНОСТІ ДЛЯ СТАЦІОНАРНИХ СТОХАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

На практиці оцінювання показника Херста є досить складним завданням, оскільки в реальних умовах для такого оцінювання необхідно використовувати скінченні набори даних, механізм генерації яких найчастіше невідомий. В даному розділі наведені результати порівняльного аналізу статистичних характеристик оцінок, отриманих різними методами за стаціонарними модельними даними малої довжини.

У загальному випадку оцінку показника Херста можна представити таким чином:

$$\hat{H}_{meth} = f(method, parameters, N),$$

де *method* – метод оцінювання показника Херста; *parameters* – параметри даного методу; *N* – довжина часового ряду.

2.1 Метод нормованого розмаху

Даний метод був запропонований Г. Херстом для вирішення завдань, пов'язаних з накопиченням водних ресурсів [Hurst, 1951; Hurst, 1955] і отримав подальший розвиток в роботах Б. Мандельброта [Mandelbrot, 1969; Mandelbrot, 1972; Mandelbrot, 1979], В.Феллера [Feller, 1951], Е. Федера [Feder, 1988], Е. Петерса [Петерс, 2004]. В даний час метод нормованого розмаху є найвідомішим і популярним методом фрактального аналізу [Clegg, 2006; Willinger 1 996]. Він широко використовується в телекомунікаційних технологіях, при дослідженні самоподібних властивостей інформаційних трафіків [Шелухин, 2008; Шелухин, 2011], в вивченні динаміки фінансових ринків [Петерс, 2004; Ширяєв, 1998], дослідженнях геофізичних і радіо сигналів [Feder, 1988; Доля, 2006], і т.д .

Оцінювання параметра Херста *методом нормованого розмаху* засноване на тому, що для випадкового процесу, який має довгострокову залежність (1.7) при великих значеннях τ виконується наступне співвідношення:

$$M \left[\frac{R(\tau)}{S(\tau)} \right] = (c \cdot \tau)^H, \quad (2.1)$$

де c – деяка постійна величина;

$R(\tau)$ – розмах кумулятивного ряду $x^{cum}(t, \tau)$;

$S(\tau)$ – середнє квадратичне відхилення вихідного ряду.

Побудуємо покроковий алгоритм знаходження H за часовим рядом.

1. Для розрахунку необхідно перетворити вхідний ряд $X(t)$, $t = 1, \dots, N$ шляхом знаходження першої різниці: $x(t) = X(t+1) - X(t)$. Якщо вхідний ряд вже є ряд приростів, даний крок пропускається.

2. Отриманий ряд ділиться на A суміжних підперіодів довжини τ , так що $A \cdot \tau = 2^N$. Позначимо кожен підперіод I_a з врахуванням того, що $a = 1, 2, 3, \dots, A$. Для кожного I_a довжини τ визначається

середнє значення: $\bar{x}(\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} x(t)$.

3. Часовий ряд накопичених відхилень від середнього значення $x^{cum}(t, \tau)$ для кожного підперіоду I_a визначається як:

$$x^{cum}(t, \tau) = \sum_{i=1}^t x(i) - \bar{x}(\tau), \quad t = \overline{1, \tau}.$$

4. Для кожного підперіоду I_a визначається розмах кумулятивного ряду $R(\tau) = \max(x^{cum}(t, \tau)) - \min(x^{cum}(t, \tau))$, $t = \overline{1, \tau}$, і вибіркове стандартне відхилення ряду приростів

$$S(\tau) = \sqrt{\frac{1}{\tau-1} \sum_{t=1}^{\tau} (x(t) - \bar{x})^2}.$$

5. Нормований розмах протягом кожного I_a підперіоду дорівнює $\frac{R(\tau)}{S(\tau)}$. Середнє значення R/S

для довжини τ визначається як $\frac{R}{S}(\tau) = (1/A) \sum_{a=1}^A \frac{R_a(\tau)}{S_a(\tau)}$.

6. Довжина τ збільшується до наступного більш високого значення. Використовуються значення τ , що включають початкові та кінцеві точки часового ряду, і кроки 1-6 повторюються до $\tau = N$.

7. Будується лінійна регресія методом найменших квадратів на $\log(\tau)$, як незалежної змінної, і $\log(R/S)$, як залежною змінною (рис. 2.1). Тангенс кута нахилу прямої є оцінкою показника Херста H .

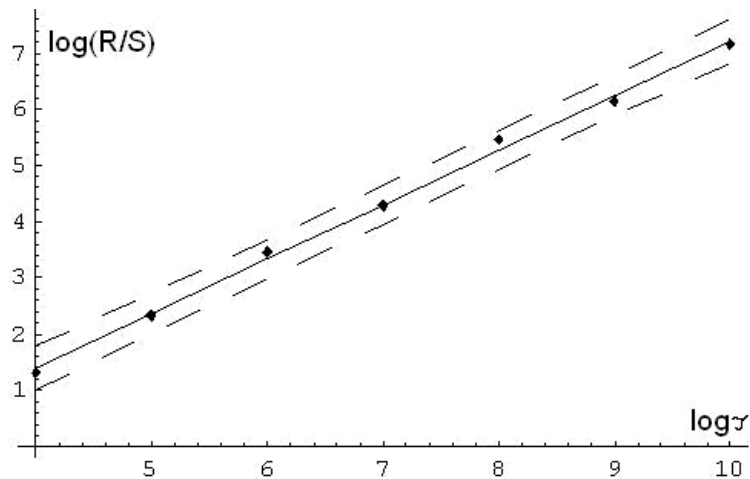


Рисунок 2.1 – Залежність $\log(R/S)$ від $\log(\tau)$, отримана методом нормованого розмаху

2.2 Метод змінювання дисперсії

Метод змінювання дисперсії агрегованого ряду безпосередньо впливає з визначення і властивостей самоподібного випадкового процесу (1.4) і визначення агрегованого часового ряду (1.8). Найбільшого поширення даний метод отримав при аналізі самоподібних властивостей телекомунікаційного трафіку [Шелухин, 2008; Шелухин, 2011; Willinger 1996].

Під агрегуванням ряду $x(t)$ довжиною τ за шкалою часу з параметром m розуміється перехід до такого процесу $x^{(m)}$, що $x_k^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=km-m+1}^{km} x(t)$, $k = \overline{1, \tau/m}$. Оцінювання параметра Херста методом

змінування дисперсії засноване на тому, що для самоподібного процесу $X(t)$ дисперсія агрегованих часових серій x^m при великих значеннях m підпорядковується наступному співвідношенню:

$$\text{Var}[x^{(m)}] = \frac{\text{Var}[x]}{(c \cdot m)^\beta}, \quad (2.2)$$

де параметр самоподібності $H = 1 - \beta/2$.

Побудуємо покроковий алгоритм знаходження H за часовим рядом.

1. Для розрахунку необхідно перетворити вхідний ряд $X(t)$, $t=1, \dots, N$, шляхом знаходження першої різниці: $x(t) = X(t+1) - X(t)$. Якщо вихідний ряд вже є ряд приростів, даний крок пропускається.

2. Отриманий ряд агрегується за мінімальним рівнем агрегації ΔT за формулою (1.8). Виходить агрегована еквідистантна реалізація, яка містить m елементів, $x^{(m)} = \{x(\Delta T), x(2\Delta T), \dots, x(m\Delta T)\}$.

3. Для отриманого ряду обчислюється вибіркова дисперсія

$$\text{Var}[x^{(m)}] = \frac{1}{m-1} \sum_{t=1}^m (x(t) - \bar{x})^2. \quad (2.3)$$

4. Рівень агрегації збільшується вдвічі: $\Delta T = 2\Delta T$. Для отриманого ряду обчислюється вибіркова дисперсія, і кроки 1-3 повторюються.

5. Будується лінійна регресія методом найменших квадратів на $\log(m)$, як незалежної змінної, і $\log[\text{Var}(x)]$, як залежної змінної (рис. 2.2). Тангенс кута нахилу лінії є оцінкою величини β . Параметр Херста визначається як $H = 1 - \frac{\beta}{2}$

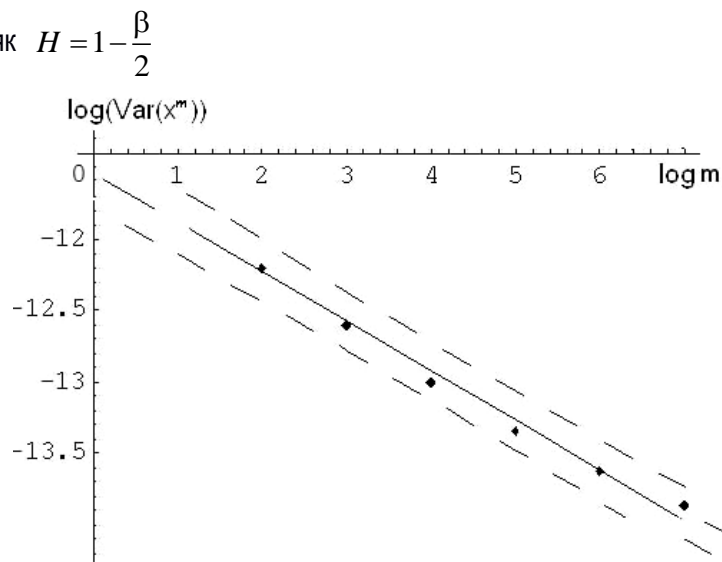


Рисунок 2.2 – Залежність $\text{Var}[x^{(m)}]$ від $\log(m)$, отримана методом змінювання дисперсії

2.3 Метод детрендованого флуктуаційного аналізу (ДФА)

Даний метод спочатку був запропонований для аналізу тривалих кореляцій в структурі серцевого ритму [Peng, 1994; Penzel, 2007]. В даний час ДФА є одним з найбільш широко використовуваних методів дослідження тривалих кореляцій в нестационарних процесах [Kantelhardt, 2001; 2002; 2008],

зокрема, в дослідженнях динаміки біологічних систем за експериментальними даними [Hoyer, 1997; Gu, 2006]. В останні роки ДФА активно використовується у фрактальному аналізі фінансових рядів для прогнозування кризових ситуацій [Cont, 2004; Ganchuk, 2006; Ramires, 2008].

Метод ДФА заснований на скейлінговому співвідношенні флуктуаційної функції $F(\tau)$ випадкового процесу, який володіє довгостроковою залежністю, і довжини сегмента ряду τ :

$$F(\tau) = (c \cdot \tau)^H \quad (2.4)$$

Побудуємо покроковий алгоритм знаходження H за часовим рядом.

1. Для розрахунку необхідно перетворити вхідний ряд $X(t)$, $t=1, \dots, N$, шляхом знаходження першої різниці: $x(t) = X(t+1) - X(t)$. Якщо вхідний ряд вже є ряд приростів, даний крок пропускається. Ряд $x(t)$ бажано привести до нульового середнього: $X^*(t) = X(t) - \bar{X}(t)$.

2. Будується кумулятивний ряд $Y^{cum}(k) = \sum_{t=1}^k X^*(t)$.

3. Ряд $Y^{cum}(t)$ розбивається на N сегментів довжиною τ , які не перетинаються; для кожного сегмента $Y^{cum}(t)$ обчислюється флуктуаційна функція

$$F^2(\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} (Y^{cum}(t) - Y_m(t))^2, \quad (2.5)$$

де $Y_m(t)$ – локальний m -поліноміальний тренд в межах даного сегмента.

4. Функція $F(\tau)$ усереднюється за усім рядом $Y^{cum}(t)$:

$$F(\tau) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i^2(\tau)}. \quad (2.6)$$

5. Значення τ збільшується і кроки 3-4 повторюються. Слід зазначити, що максимальна довжина сегмента не повинна перевищувати значення $N/4$, інакше побудова буде містити значні похибки [Kantelhardt, 2001; Павлов, 2007; Павлов, 2008].

6. Будується лінійна регресія методом найменших квадратів на $\log(\tau)$, як незалежної змінної, і $\log F(\tau)$, як залежної змінної (рис. 2.3). Тангенс кута нахилу прямої є оцінкою показника Херста.

2.4 Метод з використанням дискретного вейвлет-перетворення

2.4.1 Дискретне вейвлет-перетворення одновимірного сигналу

Вейвлет-перетворення одновимірного сигналу – це його представлення у вигляді узагальненого ряду або інтеграла за системою базисних функцій $\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$, отриманих за материнським вейвлетом $\psi(t)$, що володіє певними властивостями за рахунок операцій зсуву в часі b і зміни часового масштабу a . Дискретне вейвлет-перетворення (ДВП) будується за допомогою кратномасштабного аналізу, основна ідея якого полягає в поданні сигналу у виді сукупності його послідовних наближень [Смоленцев, 2005; Малла, 2005].

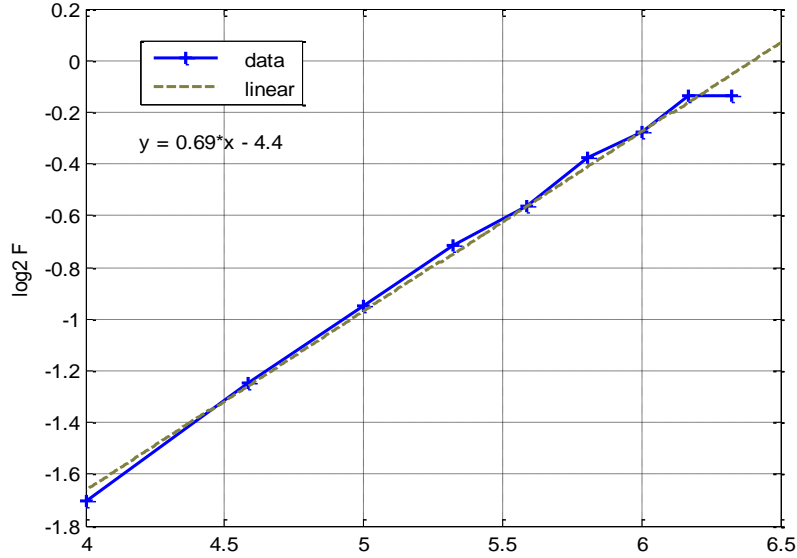


Рисунок 2.3 – Залежність $\log F(\tau)$ від $\log(\tau)$, отримана методом ДФА

Кратномасштабний аналіз полягає в розбитті досліджуваного сигналу $X(t)$ на дві складові: апроксимуючу і деталізуючу, з подальшим аналогічним дробленням апроксимуючої до заданого рівня декомпозиції сигналу N . В результаті декомпозиції сигнал $X(t)$ представляється у вигляді суми апроксимуючої компоненти $\text{approx}_N(t)$ і деталізуючих компонент $\text{detail}_j(t)$:

$$X(t) = \text{approx}_N(t) + \sum_{j=1}^N \text{detail}_j(t) = \sum_{k=1}^{N_a} \text{apr}(N, k) \varphi_{Nk}(t) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{N_j} \text{det}(j, k) \psi_{jk}(t),$$

де ψ – материнський вейвлет, φ – відповідна йому скейлінг-функція, N – обраний максимальний рівень розкладання, $\text{apr}(N, k) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \varphi_{Nk}(t) dt$ – апроксимуючі вейвлет-коефіцієнти рівня N ,

$\text{det}(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \psi_{jk}(t) dt$ – деталізуючі вейвлет-коефіцієнти рівня j , N_j – кількість деталізують коефіцієнтів на рівні j , N_a – кількість апроксимуючих коефіцієнтів на рівні N .

Величина вейвлет-енергії на заданому рівні вейвлет-розкладання j визначається як $E_j = \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \text{det}^2(j, k)$. Набір величин E_j для кожного рівня розкладання становить спектр вейвлет-енергії ряду. Повна вейвлет-енергія спектра є сумою енергій кожного рівня $E_{\text{tot}} = \sum_{j=1}^N E_j$. Відносна вейвлет-енергія показує розподіл енергії за рівнями розкладання: $p_j = \frac{E_j}{E_{\text{tot}}}$.

Однією з важливих характеристик вейвлет-функції $\psi(t)$ є наявність нульових моментів високого порядку: $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0$, $k = \overline{0, p-1}$. Число нульових моментів p характеризує здатність вейвлет-

перетворення аналізувати дрібномасштабні флуктуації та особливості високого порядку, ігноруючи регулярні поліноміальні складові ступеня $m < p$.

2.4.2. Властивості вейвлет-коефіцієнтів самоподібних процесів

Головним інструментом для дослідження самоподібних процесів, є обробка вейвлет-коефіцієнтів, отриманих на різних масштабах. Отриманий в результаті ДВП ряд коефіцієнтів має певні властивості, що дозволяють вивчати поведінку випадкових процесів, що мають властивості самоподібності. Аналізуючи властивості вейвлет-коефіцієнтів для самоподібних процесів зі стаціонарними приростами, можна показати застосування властивостей вейвлет-коефіцієнтів для досліджень інших процесів з довгостроковою залежністю [Abry, 2009].

Властивість 1. Якщо випадковий процес $X(t)$ є самоподібним процесом зі стаціонарними приростами (1.5), то деталізуючі коефіцієнти $dX(j, k)$, $k = 1 \div N_j$ на кожному рівні розкладання j є самоподібними, що означає рівність законів розподілу для ряду вейвлет-коефіцієнтів на кожному рівні розкладання з деяким масштабом:

$$\begin{aligned} & \text{Law}\{d_x(j, 0), d_x(j, 1), \dots, d_x(j, N_j - 1)\} = \\ & = 2^{j\left(H+\frac{1}{2}\right)} \text{Law}\{d_x(0, 0), d_x(0, 1), \dots, d_x(0, N_j - 1)\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

де $dX(j, k)$ – k -й деталізує коефіцієнт рівня розкладання j ; N_j – кількість вейвлет-коефіцієнтів на відповідному рівні розкладання; H – показник Херста.

Ця властивість деталізуючих коефіцієнтів впливає з самоподібності процесу, що визначається властивістю масштабування (стиснення / розтягування) самих материнських вейвлетів. Якщо певний процес є самоподібним, тобто $X(2^j u) \doteq 2^{jH} X(u)$, то:

$$\begin{aligned} d_x(j, k) &= \int X(u) \psi(2^j u - k) 2^{j/2} du = \int 2^{-j/2} X(2^{-j} u) \psi(u - k) du \doteq \\ &\doteq 2^{-j\left(H+\frac{1}{2}\right)} \int X(u) \psi(u - k) du = 2^{-j\left(H+\frac{1}{2}\right)} d_x(0, k). \end{aligned}$$

Властивість 2. Вейвлет-коефіцієнти, які отримані в результаті декомпозиції процесу зі стаціонарними приростами, є стаціонарними на кожному масштабі 2^j . Це властивість впливає з властивості вейвлет-функцій $\int \psi(t) dt = 0$, яка гарантує стаціонарність коефіцієнтів для процесів зі стаціонарними приростами.

Властивість 3. Якщо існують моменти p -го порядку, то для вейвлет-коефіцієнтів, отриманих в результаті декомпозиції процесу $X(t)$, виконується рівність:

$$M |d_x(j, k)|^p = M |d_x(0, k)|^p 2^{-jp\left(H+\frac{1}{2}\right)} \quad (2.8)$$

Як наслідок, для процесів зі скінченною дисперсією, що найчастіше зустрічається на практиці, вираз (2.8) перетворюється в наступну форму:

$$M |d_x(j, k)|^2 = M |d_x(0, k)|^2 2^{-j(2H+1)} \quad (2.9)$$

Властивість 4. У разі, якщо $X(t)$ є самоподібним процесом зі стаціонарними приростами, кореляційна функція вейвлет-коефіцієнтів рівня j зменшується відповідно до співвідношення:

$$M(d_x(j,k)d_x(j,k+n)) \sim n^{2(H-m)}, \quad n \rightarrow \infty,$$

де m - число нульових моментів материнського вейвлета ψ .

Властивість 5. Для різних рівнів розкладання $j_1 \neq j_2$ кореляція деталізуючих коефіцієнтів цих рівнів $M(d_x(j_1,k)d_x(j_2,k+n)) = 0$ для всіх n .

Властивість 6. Деталізуючі коефіцієнти ДВП на кожному рівні розкладання j мають нормальний розподіл з нульовим математичним очікуванням.

Всі перераховані властивості вейвлет-розкладання широко використовуються для аналізу реальних часових рядів на практиці.

2.4.3 Метод оцінювання показника Херста на основі дискретного вейвлет-перетворення

Метод оцінювання показника Херста на основі ДВП є відносно новим і не придбав ще масового застосування, оскільки для його коректного використання необхідно володіти математичним апаратом вейвлет-аналізу. Основний розвиток метод отримав в роботах французьких дослідників Р. Абрю і Р. Фландрин [Абрю, 1998; Абрю, 2000; Абрю 2009; Фландрин, 2002]. В даний час застосовується при аналізі самоподібного трафіку [Шелухин, 2008; Шелухин, 2011].

Метод оцінювання ступеня самоподібності H базується на властивостях 1-6 деталізуючих вейвлет-коефіцієнтів, отриманих в результаті декомпозиції часового ряду. Побудуємо покроковий алгоритм знаходження H по часовому ряду.

1. Для вихідного ряду $X(t)$, $t = 1, 2, \dots, n$ за допомогою заданого набору вейвлет-функцій виконуємо вейвлет-декомпозицію з максимальним рівнем розкладання $N_{\max} = [\log_2 n]$, де операція $[\cdot]$ позначає взяття цілої частини.

2. На кожному рівні розкладання j обчислюємо суму квадратів вейвлет-коефіцієнтів. Відповідно до формули (2.17) показник Херста знаходиться зі скейлінгового співвідношення

$$\frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \det^2(j, k) \propto 2^{(2H+1)j}, \quad (2.10)$$

де $\det(j, k)$ – деталізуючі вейвлет-коефіцієнти рівня j ; N_j – кількість деталізуючих коефіцієнтів на рівні j .

3. Кожному номеру рівня розкладання j ставиться у відповідність логарифм величини $\frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \det^2(j, k)$. Апроксимуємо обчислені значення вейвлет-коефіцієнтів методом найменших квадратів, отримуємо лінійну залежність, тангенс кута нахилу відповідної прямої визначає значення оцінки показника Херста.

На рис. 2.4 представлений типовий спектр вейвлет-енергії самоподібного процесу (вгорі) і залежність $\log_2(E_j)$ від номера рівня розкладання j (внизу).

З причини нелінійності, отриманої на етапі обчислення лінії регресії, яка утворюється через функції логарифмування, відбувається зміщення математичного очікування оцінки показника Херста. Властивості 5-6 деталізуючих коефіцієнтів вейвлет-розкладання, які полягають в некорельованості і нормальності, дозволяють визначити величину зміщення аналітично і ввести поправочні коефіцієнти для кожного рівня деталізації j [Абрю 2009]:

$$w_j = (n \log^2 2) / 2^{j+1}, \quad (2.11)$$

де w_j - поправочний коефіцієнт j -го рівня деталізації; n - число значень досліджуваного часового ряду.

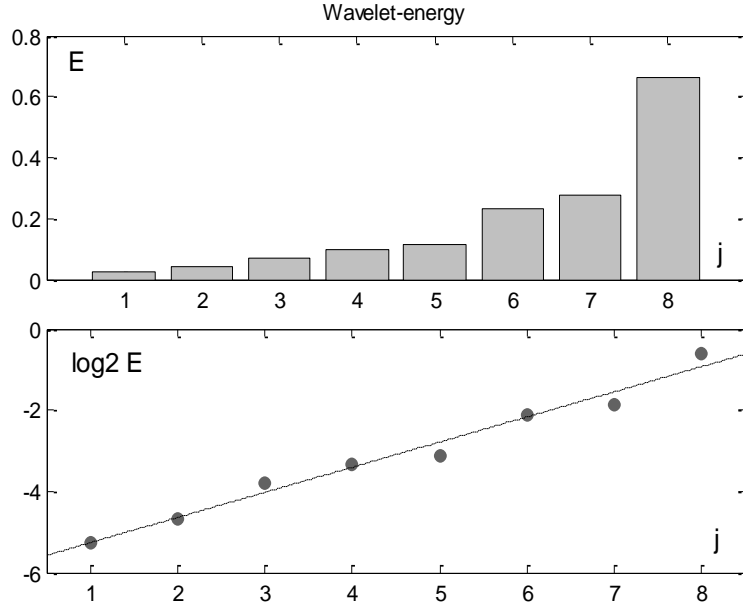


Рисунок 2.4 – Спектр вейвлет-енергії самоподібного процесу (вгорі) і залежність $\log_2(E_j)$ (внизу)

Тоді, дотримуючись методу найменших квадратів при лінійній апроксимації, отримуємо наступне:

$$\sum (w_j y_j - (b_0 + b_1 \cdot j))^2 \rightarrow \min,$$

де j – значення рівня деталізації; y_j – логарифм величини $\frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \det^2(j, k)$ j -го рівня; b_0, b_1 – відповідні коефіцієнти в рівнянні апроксимуючої прямої $b_0 + b_1 x_j$; w_j – поправочний коефіцієнт j -го рівня деталізації. Незміщена оцінка показника Херста визначається за такою залежністю:

$$\hat{H}(j_1, j_2) \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\sum_{j=j_1}^{j_2} w_j j E_j - \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j j \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j E_j}{\sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j j^2 - \left(\sum_{j=j_1}^{j_2} w_j j \right)^2} + 1 \right] \quad (2.12)$$

де j_1, j_2 – рівні розкладання, для яких розраховується лінійна апроксимація; w_j – поправочні коефіцієнти; E_j – середні значення квадратів модулів вейвлет-коефіцієнтів; j – рівень вейвлет-розкладання.

2.5 Статистичні характеристики оцінок показника Херста

В даному підрозділі наводяться результати порівняльного аналізу статистичних характеристик оцінок показника Херста, отриманих вищеописаними методами, за модельними фрактальними часовими рядами невеликої довжини [Kirichenko, 2010].

2.5.1 Опис чисельного експерименту

В експерименті моделювався фрактальний броунівський рух із заданим показником H . При цьому значення H змінювалися в усьому можливому діапазоні $0 < H < 1$. Довжина реалізацій була обрана рівною від 256 до 4096 значень.

Для кожного теоретичного значення показника Херста H були одержано масиви оцінок і досліджені їх статистичні характеристики, отримані за множиною різних реалізацій. Для кожного згенерованого часового ряду розраховувалася оцінки методом R/S -аналізу ($\hat{H}_{R/S}$), змінювання дисперсії агрегованого ряду (\hat{H}_d), детеренованого флуктуаційного аналізу (\hat{H}_{fa}) і оцінюванням за допомогою ДВП (\hat{H}_w). Показниками, за якими проводилося порівняння, були:

- середнє значення оцінок показника Херста $\bar{H}_{R/S}$, \bar{H}_d , \bar{H}_{fa} і \bar{H}_w ;
- середньоквадратичне відхилення оцінок $S_{R/S}$, S_d , S_{fa} і S_w ;
- коефіцієнт кореляції між оцінками, отриманими різними методами;
- вибірковий закон розподілу оцінок показника Херста.

2.5.2 Порівняльний аналіз середніх значень і середньоквадратичних відхилень оцінок параметра Херста

На рис. 2.5 показана залежність середніх значень оцінок параметра Херста, отриманих усіма досліджуваними методами, від його теоретичного значення. По осі абсцис відкладені теоретичні значення показника Херста, а по осі ординат – середні значення відповідних оцінок. Модельні реалізації містили 1024 значень. Суцільна жирна пряма лінія відповідає теоретичним значенням H . Очевидно, що середні значення оцінок мають зміщення, яке залежить від теоретичного значення показника Херста. Оцінки показника Херста зміщені як в області персистентності, так і для антиперсистентного діапазону. Оскільки переважна більшість фрактальних процесів мають довгострокову залежність, подальші результати, розглянуті нами, будуть приведені тільки для діапазону $0,5 < H < 1$. З графіка, представленого на рис. 2.5, видно, що більш зміщеними є оцінки, отримані методами R/S -аналізу і агрегованої дисперсії.

Розглянемо результати оцінювання параметра H методом R/S -аналізу. На рис. 2.6 (а) представлені залежності середніх значень оцінок \hat{H}_{rs} від теоретичних значень показника H для модельних рядів різної довжини. Очевидно, що середні значення оцінок досить добре можна апроксимувати прямими лініями $\hat{H}_N = k_N H + b_N$, де коефіцієнти k_N і b_N залежать від довжини реалізації N , за якою проводиться оцінювання. Ці прямі перетинають лінію теоретичних значень параметра H в районі $H \approx 0,75$; до цього значення оцінки є завищеними, а після - заниженими. Результати проведених досліджень підтверджують дані, отримані при аналізі оцінювання R/S -методом за фрактальними реалізаціями інших моделей, представлених в [Федер, 1991; Шелухин, 2005;

Шелухин, 2011]. Із зростанням довжини реалізації N кут нахилу апроксимованої прямої k_N повільно збільшується і прагне до теоретичного куту нахилу $\pi/4$.

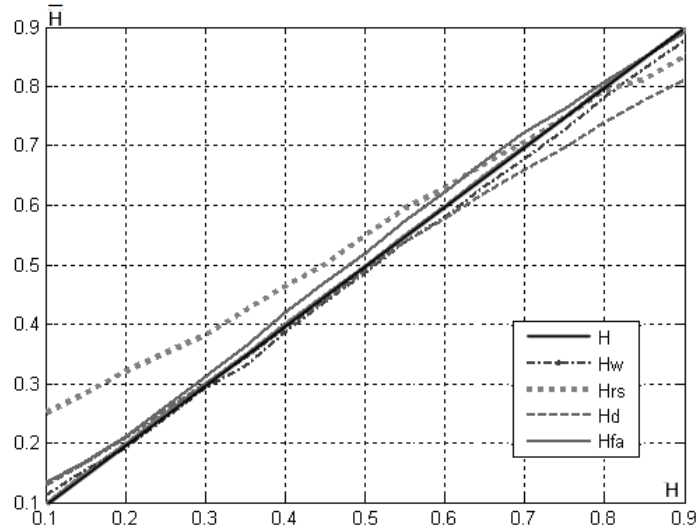


Рисунок 2.5 – Залежності середніх значень оцінок показника Херста, отриманих різними методами, від теоретичних значень H

На рис. 2.6 (б) представлені залежності середніх значень оцінок \hat{H}_d , отриманих методом зміни дисперсії. Ці залежності також можна апроксимувати прямими $\hat{H}_N = k_N H + b_N$, де коефіцієнти k_N і b_N залежать від довжини реалізації N . В даному випадку апроксимуючі прямі перетинають лінію теоретичних значень в районі $H \approx 0,5$ і, фактично на всьому діапазоні персистентності значення оцінки показника Херста є заниженими. Зміщення збільшується зі зростанням показника Херста, особливо для значень $H > 0,9$. Можна відзначити, що зміщення оцінок \hat{H}_d більше, ніж відповідні зміщення \hat{H}_{rs} . Із зростанням довжини реалізації N зміщення дуже повільно зменшується.

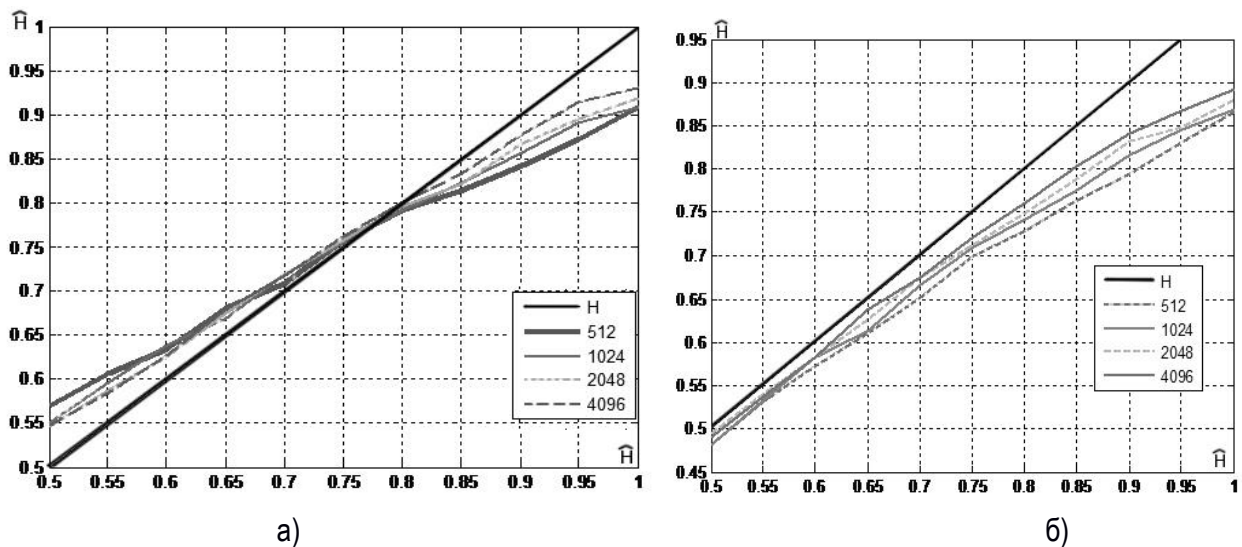


Рисунок 2.6 - Залежності середніх значень оцінок від теоретичного значення H :
 а) метод нормованого розмаху; б) метод змінювання дисперсії

Метод змінювання дисперсії агрегованого ряду в зв'язку з простотою і прозорою інтерпретацією найбільш часто використовується при оцінюванні самоподібності трафіку в інформаційних мережах. Однак для процесів з довгостроковою залежністю цей метод дає занижені оцінки [Шелухин, 2005; Шелухин, 2008; Шелухин, 2011]. Це може виявитися фатальним, наприклад, при оцінюванні навантаження мережі при проходженні самоподібного трафіку [Столингс, 2003].

Метод ДФА широко використовується при аналізі біоелектричних сигналів. Для оцінок \hat{H}_{fa} , отриманих методом ДФА, характерний дуже невеликий зсув (див. рис. 2.7 (а)) навіть для реалізацій невеликої довжини. Цей зсув змінює знак і збільшується для значень $H > 0.9$. Варто відзначити, що більшість природних і інформаційних фрактальних процесів мають ступінь самоподібності, меншу 0.9.

Вейвлет-оцінювання проводилося на основі материнського вейвлета db4. Як показано в роботі [Кириченко, 2009], використання цієї функції дає найменше зміщення і середньоквадратичне відхилення при оцінюванні показника Херста. При порівнянні основних методів оцінювання параметра Херста з методом, заснованим на ДВП, очевидні його переваги. При правильному виборі базових вейвлетів оцінки \hat{H}_w є асимптотично незміщеними, що демонструє рисунок 2.7 (б). При збільшенні довжини ряду N зміщення зменшується, і вже при $N \approx 4000$ значень воно досить близько до 0.

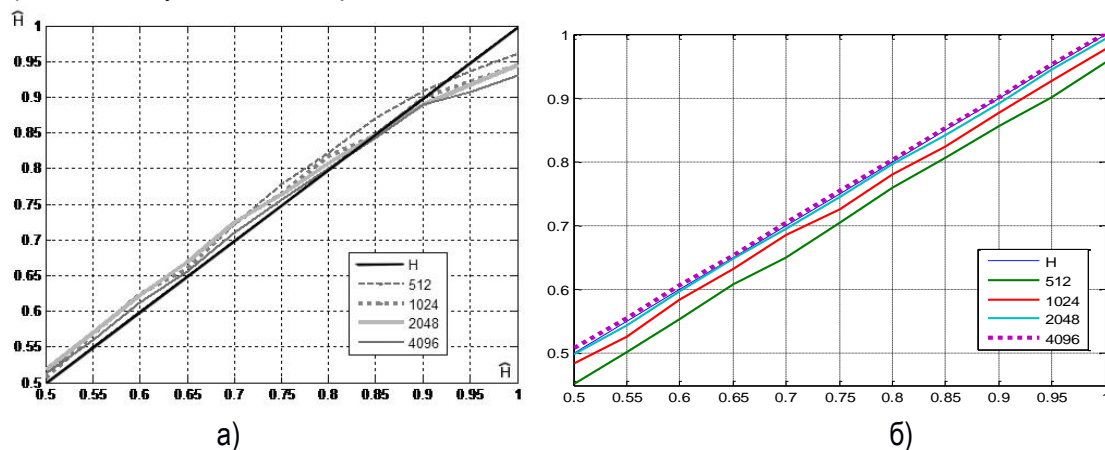


Рисунок 2.7 – Залежності середніх значень оцінок від теоретичного значення H : а) метод флуктуаційного аналізу; б) метод вейвлет-оцінювання

Для кількісного оцінювання зміщення оцінки \hat{H}_{meth} , отриманої за допомогою певного методу, від теоретичного значення показника H на всьому діапазоні значень, була розрахована величина зміщення Δ^{meth} за формулою:

$$\Delta^{meth} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\bar{H}_i^{meth} - H_i), \quad (2.13)$$

де \bar{H}_i^{meth} – середнє значення оцінки \hat{H}_{meth} , отриманої для реалізацій з теоретичним показником H_i за допомогою заданого методу розрахунку показника Херста.

Для кожного значення H було одержано масиви оцінок показника Херста $H_{R/S}$, H_d , H_{fa} і H_w і розраховано середні значення оцінок $\bar{H}_{R/S}$, \bar{H}_d , \bar{H}_{fa} і \bar{H}_w , які отримані за множиною різних реалізацій. На рис. 2.8 представлена столбцова діаграма розподілу зсуву оцінок показника Херста для різних методів в залежності від довжини реалізації. Очевидно, що найменшу похибку при різній довжині часової реалізації має метод, заснований на дискретному вейвлет-перетворенні.

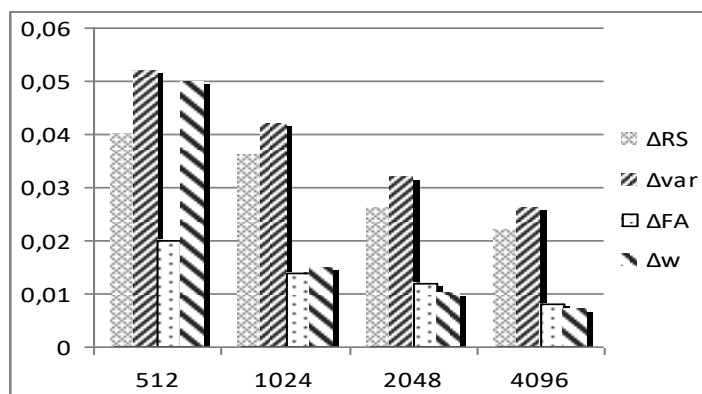


Рисунок 2.8 - Розподіл зміщення оцінок показника Херста для різних методів

У роботах [Кириченко, 2009; Kirichenko, 2010] досліджена залежність середніх квадратичних відхилень оцінок показника Херста від заданих значень H і довжини модельного фрактального ряду для кожного методу. Рисунок 2.9 ілюструє, як зменшуються середні квадратичні відхилення, отримані при розрахунку \hat{H} при збільшенні довжини ряду. В даному випадку теоретичний показник Херста $H = 0.8$.

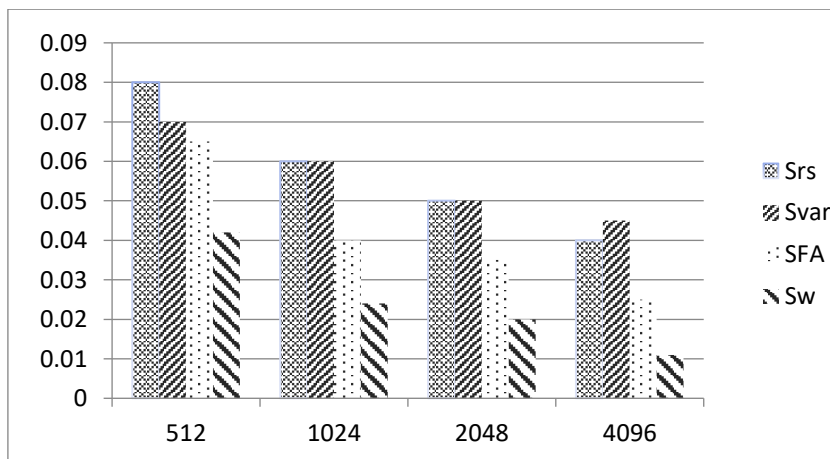


Рисунок 2.9 – Середні квадратичні відхилення для різних методів

Виходячи з даних столбцової діаграми очевидно, що оцінки, отримані вейвлет-методом, мають значно менший розкид, ніж оцінки, отримані іншими основними методами оцінювання показника Херста.

2.5.3 Порівняльний аналіз вибірових законів розподілу і кореляції оцінок параметра Херста

Питання про закон розподілу оцінок параметра Херста було розглянуто в ряді робіт, де було показано, чисельно або аналітично, що оцінки є нормальними для конкретного методу або конкретних значень показника Херста. Аналітичні і чисельні дослідження, проведені в роботах [Feller, 1951; Mandelbrot, 1969; Mandelbrot, 1972; Mandelbrot, 1979], показали, що для випадку $H = 0,5$ оцінка показника Херста, яка отримана методом нормованого розмаху, являє собою випадкову величину з нормальним розподілом. У роботі [Петерс, 2004] чисельно показано, що вибіровий закон розподілу $\hat{H}_{R/S}$ є нормальним. Питання щодо закону розподілу оцінок \hat{H}_w , отриманих методом, заснованим на ДВП, розглянуто в ряді робіт [Абру, 1998; Абру, 2009], де показано аналітично, що оцінки є нормально розподіленими. Нормальний розподіл оцінок \hat{H}_d , отриманих методом змінювання дисперсії, чисельно

продемонстровано в роботі [Кириченко, 2005]. Властивості оцінок H_{fa} , в тому числі вибірковий нормальний розподіл для деяких значень показника Херста, розглянуті в роботах [Kantelhardt, 2001; Kantelhardt, 2002; Kantelhardt, 2008].

У роботах [Kirichenko, 2010; Кириченко 2009] були досліджені закони розподілу оцінок \hat{H} для кожного методу і різних значень параметра Херста. Для всіх розглянутих методів була висунута гіпотеза про нормальний розподіл вибіркових значень оцінок з параметрами $N(\bar{H}, S_{\hat{H}})$. Практично для всіх вибіркових даних гіпотеза була прийнята з рівнем значущості $\alpha = 0.05$ за кількома критеріями згоди.

Оскільки вибірковий розподіл оцінок показника Херста є нормальним, то оцінка показника Херста H для досліджуваного часового ряду довжини N може бути представлена інтервалом значень, всередині якого із заданою ймовірністю знаходиться істинне значення оцінюваного показника H . Таким чином, істинне значення показника Херста потрапляє в наступний довірчий інтервал:

$$\hat{H} + \Delta - t_{\alpha} S < H < \hat{H} + \Delta + t_{\alpha} S, \quad (2.14)$$

де N – довжина досліджуваного часового ряду; *method* – обраний метод оцінювання; $\hat{H} = \hat{H}(N, method)$ – отримане значення оцінки показника Херста по реалізації довжини N ; $\Delta = \Delta(N, method)$ – величина зміщення оцінки; $S = S(N, method)$ – середньоквадратичне відхилення, розраховане по модельним реалізаціям довжини N ; α – необхідний рівень значимості; t_{α} – квантиль стандартного нормального розподілу.

Таке інтервальне оцінювання особливо необхідно при малій довжині часової реалізації, коли точкова оцінка малонадійна.

У роботах [Kirichenko, 2010; Кириченко 2009] було досліджено питання щодо кореляційного зв'язку між оцінками, отриманими різними методами. Чисельний аналіз кореляційної залежності між оцінками параметра Херста показав, що для всіх розглянутих випадків, крім кореляції з оцінками, отриманими за допомогою вейвлет-перетворення, вибіркові коефіцієнти кореляції виявилися значущими в діапазоні абсолютних значень в основному меншому 0.5 (таблиця 2.1).

Таким чином, виходячи з результатів кореляційного аналізу, оцінки показника Херста, отримані за допомогою різних методів, мають слабку кореляційну залежність і коефіцієнти кореляції знаходяться в діапазоні $[0, 0.5]$.

Таблиця 2.1 - Вибіркові коефіцієнти кореляції для різних методів оцінки показника Херста

Методи, якими отримані оцінки показника Херста	Вибірковий коефіцієнт кореляції r
R / S-аналіз і зміна дисперсії	$0.3 \leq r \leq 0.6$
ДФС і R / S-аналіз	$0.1 \leq r \leq 0.4$
ДФС і зміна дисперсії	$0.1 \leq r \leq 0.3$
Вейвлет-аналіз і інші методи	є незначним

Таким чином, для збільшення точності оцінки показника Херста можна використовувати середнє арифметичне оцінок, отриманих за допомогою декількох методів оцінювання.

2.5.4 Часові витрати виконання методів оцінювання

Порівняльна оцінка ефективності розглянутих в цьому розділі методів проводилася експериментальним шляхом на підставі оцінок часу рішення контрольних завдань. В ході дослідження моделювалися реалізації ФБР з заданим показником Херста H . Для кожного згенерованого ряду відповідним методом визначався час виконання завдання в циклі. Часові витрати досліджуваних методів для модельних реалізацій довжиною 4096 відліків для циклу числом 100 представлені в таблиці 2.2.

Таблиця 2.2 - Часові витрати методів оцінювання показника Херста

метод	RS-аналіз	зміна дисперсії	ДФА	ДВП
час	9.7969	10.6081	138.6693	3.6036

Дані показують, що метод, заснований на застосуванні ДВП, є самим швидкодіючим. Це пов'язано з тим, що в ньому використаний алгоритм швидкого вейвлет-перетворення. Найбільший час рахунку алгоритму ДФА багато в чому пов'язан з тим, що розмір сегмента змінюється не як ступінь двійки, що використовується в методі нормованого розмаху і зміни дисперсії, а вибирається деяке фіксоване значення. Збільшивши крок зміни довжини сегмента, можна домогтися істотного зниження часу рахунку, проте це тягне за собою зниження точності оцінювання.

Зі збільшенням довжини модельної реалізації час оцінювання показника Херста різними методами збільшується. На малюнку 2.9 показана зміна часу розрахунку для різних методів в залежності від довжини фрактального часового ряду. Як видно з представленого графіка для методу оцінювання показника Херста за допомогою ДФА-методу час рахунку зі збільшенням довжини реалізації різко зростає. Це пов'язано з вищевказаними причинами.

Використовуваний алгоритм швидкого вейвлет-перетворення дозволяє з мінімальними витратами за часом і обсягом інформації застосовувати метод фрактального аналізу в різних технічних і інформаційних системах в режимі реального часу.

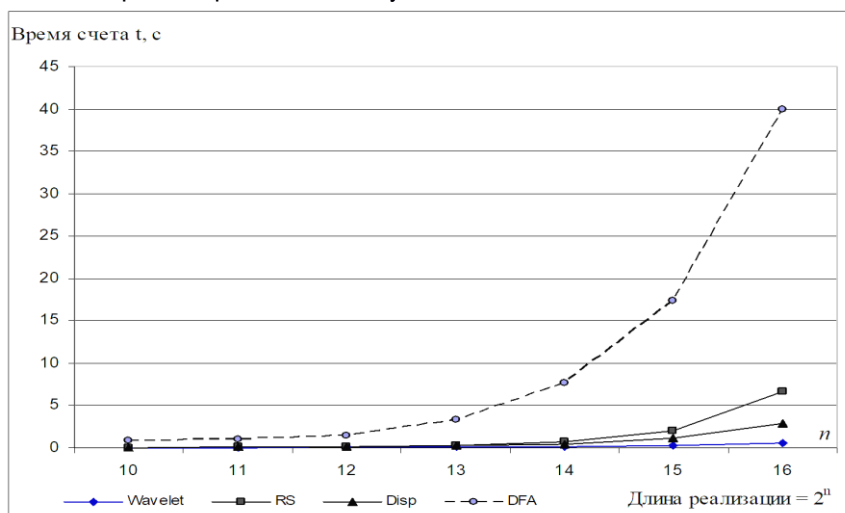


Рисунок 2.9 - Зміна часових витрат для методів оцінки показника Херста при збільшенні довжини вибірки

Висновки за розділом 2

1. Наведено покрокові алгоритми основних методів оцінювання показника Херста: методу нормованого розмаху, змінювання дисперсії агрегованого ряду, детрендованого флуктуаційного аналізу і вейвлет-оцінювання.

2. Проведено порівняльний аналіз статистичних характеристик оцінок показника Херста, отриманих різними методами оцінювання. Результати дослідження показали, що оцінки є зміщеними. Зміщення залежить від істинного значення ступеня самоподібності процесу і довжини часового ряду. Мінімальне зміщення мають оцінки, отримані методом флуктуаційного аналізу і вейвлет-оцінювання. Середні квадратичні відхилення оцінок залежать від методу оцінювання та зменшуються з ростом довжини ряду. Мінімальні середні квадратичні відхилення мають вейвлет-оцінки.

3. Результати чисельного дослідження показали, що оцінки показника Херста, отримані розглянутими методами оцінювання, мають нормальний розподіл і можуть бути представлені довірчим інтервалом значень, характеристики якого враховують довжину досліджуваного часового ряду і метод оцінювання.

4. Чисельний аналіз кореляційної залежності між вейвлет-оцінками параметра Херста показав, що оцінки показника Херста, отримані за допомогою різних методів, мають слабку кореляційну залежність, а вейвлет-оцінки не корелюють з іншими. Таким чином, для збільшення точності оцінки показника Херста можна використовувати середнє арифметичне оцінок, отриманих за допомогою декількох методів оцінювання.

5. Порівняльне оцінювання швидкодії розглянутих в цьому розділі методів показало, що метод, заснований на застосуванні вейвлет-перетворення, є самим швидкодіючим.

Література до розділу 2

- [Abry, 1998] Abry, P., Veitch, D. Wavelet analysis of long-range dependent traffic. *IEEE/ACM Transactions Information Theory*, Vol. № 1 (44), 1998. pp. 2–15.
- [Abry, 2000] Abry, P., Flandrin, P., Taqqu, M. S., Veitch, D. *Self-Similar Network Traffic and Performance Evaluation*. New-York: John Wiley & Sons, 2000. pp. 39–88.
- [Abry, 2009] Abry, P., Goncalves P., Veitch, J. L. *Scaling, Fractals and Wavelets*. London: John Wiley & Sons, 2009. – 464 p.
- [Clegg, 2006] Clegg, R. G. A practical guide to measuring the hurst parameter. *International Journal of Simulation. Systems, Science & Technology*, 2006, Vol. 7, № 2. pp. 3–14.
- [Cont, 2004] Cont, R., Tankov, P. *Financial modelling with jump processes*. Chapman & Hall / CRC Press, 2004. - 527 p.
- [Feller, 1951] Feller, W. The asymptotic distribution of the range of sums of independence variables. *Annals of mathematics and statistics*, France, University of Nancy, 1951. – 306 p.
- [Feder, 1988] Feder, J. *Fractals*. Plenum, New York, 1988.
- [Flandrin, 2002] Flandrin P. Wavelet Tools for Scaling Processes. *Turbulence: measurements and signals: Lecture given at the Summer School, Lyon, 2002*. pp. 123–128.
- [Ganchuk, 2006] Ganchuk, A., Derbentsev, V., Soloviev, V. *Multifractal Properties of the Ukraine Stock Market*. [Електронний ресурс]: 2006. – Режим доступа: <http://arxiv.org/pdf/physics/0608009.pdf>.
- [Gu, 2006] Gu, G. F., Zhou, W. X. Detrended fluctuation analysis for fractals and multifractals in higher dimensions. *Phys. Rev. E* 74, 2006. pp.61-104.

- [Hoyer, 1997] Hoyer, D., Schmidt, K., Bauer, R., Zwiener, U., Kohler, M., Luthke, B., Eiselt, M. Nonlinear analysis of heart rate and respiratory dynamics. *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, 1997, № 16. pp. 31–39.
- [Hurst, 1951] Hurst, H. E. The Long-Term Storage Capacity of Reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 1951, Vol. 116. pp. 770–799.
- [Hurst, 1955] Hurst, H. E. Methods of using long-term storage in reservoirs. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers, London*, 1955, Part 1. pp. 519–577.
- [Kantelhardt, 2001] Kantelhardt, J. W., Koscielny-Bunde, E., Havlin, S. and et al. Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis. *Physica A., Statistical Mechanics and its Applications*, 2001, Vol. 295, № 3–4. pp. 441–454.
- [Kantelhardt, 2002] Kantelhardt, J.W., Zschiegner, S.A., Bunde, A., Havlin, S., Koscielny-Bunde, E., Stanley, H.E. Multifractal detrended fluctuation analysis of non-stationary time series. *Physica A.*, 2002, № 316. pp. 87–114.
- [Kantelhardt, 2008] Kantelhardt, J.W. Fractal and Multifractal Time Series. [Электронный ресурс]: 2008.– Режим доступа: <http://arxiv.org/abs/0804.0747>.
- [Kirichenko, 2010] Kirichenko, L., Radivilova, T. Comparative analysis of statistical properties of the Hurst exponent estimates obtained by different methods. *Information Models of Knowledge / ed. K. Markov, V. Velychko, O. Voloshin. – Kiev–Sofia : ITHEA, 2010. pp. 451–459*
- [Mandelbrot, 1969] Mandelbrot, B., Wallis, J. R. Robustness of the Rescaled Range R/S in the Measurement of Noncyclic Long-Run Statistical Dependence. *Water Resources Research*, 1969, Vol. 5. pp. 967–988.
- [Mandelbrot, 1972] Mandelbrot, B. Statistical methodology for non-periodic cycles: from the covariance to R/S analysis. *Annals of economic social measurement*, № 1, 1972. pp. 2–11.
- [Mandelbrot, 1979] Mandelbrot, B., Taqqu, M. S. Robust R/S analysis of long-run serial correlation. *Bulletin of the International Statistical Institute. Proceedings of the 42nd Session of the International Statistical Institute, Manila. Book 2, Vol.48, 1979. pp. 69–104.*
- [Peng, 1996] Peng, C.K., Buldyrev, S.V., Havlin, S., Simons, M., Stanley, H.E., Goldberger, A.L. Mosaic organization of DNA nucleotides. *Phys. Rev. E.*, Vol. 49, 1994. pp. 1685-1689.
- [Penzel, 2007] Penzel, T., Kantelhardt, J.W., Becker, H.F., Peter, J.H., Bunde, A. Detrended Fluctuation Analysis and Spectral Analysis of Heart Rate Variability for Sleep Stage and Sleep Apnea Identification. *Computers in Cardiology*, 2007. pp. 307–310.
- [Ramires, 2008] Ramires, D., Ceballos, D., Cortez, K., Rodrigues, M. Financial crisis: Theory and Practice. Baced on Workshop IAFI at Finantial Crisis, 2008.
- [Willinger, 1996] Willinger, W., Taqqu, M. S., Erramilli, A.A. Bibliographical guide to self-similar traffic and performance modeling for modern high-speed network in «Stochastic networks: theory and applications». Oxford: Clarendon Press, 1996. – 286 p.
- [Доля, 2006] Доля, Н. Г., Иванов, В. К., Пащенко, Р. Э., Стадник, А. М. и др. Фрактальный анализ процессов, структур и сигналов: Коллективная монография. под ред. Р.Э. Пащенко. Х. : ХООО “НЭО “ЭкоПерспектива”, 2006. – 348 с.
- [Кириченко, 2005] Кириченко, Л. О., Радивилова, Т. А., Синельникова, М. И. Сравнительный анализ методов оценки параметра Херста самоподобных процессов. *Системы обробки інформації*, Вип. 8(48), 2005. сс.36-40.
- [Кириченко, 2009] Кириченко, Л. О., Дейнеко, Ж. В. Оценивание самоподобия стохастического временного ряда методом вейвлет-анализа. *Радіоелектронні і комп'ютерні системи*, № 4 (38), 2009. сс. 99–105.
- [Малла, 2005] Малла, С. Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. – 671 с.

- [Петерс, 2004] Петерс, Э. Фрактальный анализ финансовых рынков. Применение теории хаоса в инвестициях и экономике : пер. с англ. М : Интернет-трейдинг, 2004. – 304 с.
- [Смоленцев, 2005] Смоленцев, Н.К. Основы теории фракталов. Вейвлеты в MATLAB. М.: ДМК Пресс, 2005. – 304 с.
- [Столингс, 2003] Столингс В. Современный компьютерные сети. СПб.: Питер, 2003. – 783 с.
- [Шелухин, 2005] Шелухин, О. И., Теняшев, А. В., Осин, А. В. Моделирование информационных систем. М. : Сайнс-Пресс, 2005. – 368 с.
- [Шелухин, 2008] Шелухин, О. И., Осин, А. В., Смольский, С. М. Самоподобие и фракталы. Телекоммуникационные приложения. М. : Физматлит, 2008. – 368 с.
- [Шелухин, 2011] Шелухин, О. И. Мультифракталы. Инфокоммуникационные приложения. М. : Горячая линия – Телеком, 2011. – 576 с.
- [Ширяев, 1998] Ширяев, А. Н. Основы стохастической финансовой математики. М. : Фазис, Т. 1: Факты. Модели, 1998. –512 с.

РОЗДІЛ 3

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРА САМОПОДІБНОСТІ ДЛЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ СТОХАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

У загальному випадку часовий ряд можна розглядати у вигляді суми різнотипних складових: системної складової – функції тренду; циклічних компонент з певним періодом повторення; локальних особливостей; аномалій різного порядку; флуктуацій більш високого порядку (шумів) навколо всіх перерахованих складових. Наявність трендових і циклічних компонент вимагає застосування відповідних підходів для визначення самоподібності досліджуваного процесу. Ці підходи розглянуті в даному розділі.

3.1 Попереднє дослідження структури самоподібного часового ряду на основі R / S аналізу

Відповідно до загальноприйнятих методів розрахунку показника Херста за досліджуваним часовим рядом отримують точкову оцінку цього параметра – число, яке характеризує ступінь довгострокової залежності: чим ближче параметр H до 1, тим повільніше при збільшенні тривалості затримки k зменшуються кореляції між часовими відліками. Однак можливо показник Херста розглядати як функцію кількості часових відліків $H(n)$. Такий підхід можливий при застосуванні методу нормованого розмаху, коли інтервали часу τ змінюються малими приростами.

3.1.1 Перевірка гіпотези про наявність самоподібності

Найважливішим положенням, з якого необхідно починати дослідження фрактальної структури випадкового процесу, є перевірка гіпотези про наявність самоподібності (довгострокової залежності). В якості нульової гіпотези зазвичай постулюється, що прирости випадкового процесу мають незалежний характер. Знаючи результати для випадкового процесу з незалежними приростами, ми можемо порівняти досліджуваний процес з нульовою гіпотезою і виміряти значимість ступеня самоподібності.

Г. Херст засновував нульову гіпотезу на біноміальному розподілі та підкиданні монет [Hurst, 1951; Hurst, 1955]. Його результат для випадкових блукань:

$$M \left[\frac{R}{S}(n) \right] = (n \cdot \pi/2)^{0.5}, \quad (3.1)$$

де n – кількість спостережень.

На основі (3.1) і подальших модифікацій даного результату в роботі [Петерс, 2004] було запропоновано наступне рівняння для математичного очікування нормованого розмаху:

$$M \left[\frac{R}{S}(n) \right] = ((n - 0.5)/n) (n \cdot \pi/2)^{-0.5} \sum_{r=1}^{n-1} \sqrt{(n-1)/r}. \quad (3.2)$$

Дослідження, проведені в роботах [Feller, 1951; Mandelbrot, 1969; Mandelbrot, 1979; Петерс, 2004], показали, що для випадку $H = 0,5$ оцінка показника Херста є випадковою величиною з нормальним розподілом. Математичне сподівання цієї величини визначається формулою (3.2). Дисперсія в

загальному випадку залежить від виду розподілу даних, проте чисельні дослідження [Таққи, 1995; Таққи, 1996; Федер, 1991; Петерс, 2004] дозволяють грубо вважати середнє квадратичне відхилення оцінки s

для випадку $H = 0,5$ рівним $s = \sqrt{\frac{1}{N}}$, де N – число значень ряду.

Логарифм функції (3.2) показує теоретичні значення $\log(R/S)$ для випадку незалежних випадкових даних (при $H = 0,5$). За наявності довгострокової залежності (персистентності процесу) значення $\log(R/S)$ будуть знаходитися вище, а в разі антиперсистентності – нижче лінії, описаної рівнянням (3.2).

На рис 3.1 представлені типові залежності $\log(R/S)$ від логарифма довжини ряду для модельних часових рядів з різними типами пам'яті довжиною $n = 2048$. Пунктирна лінія показує теоретичні значення $\log(R/S)$ для випадку незалежних випадкових даних. Показані залежності $\log(R/S)$ для класичного броунівського руху (лінія 2), фрактального броунівського руху з параметром Херста $H = 0,8$ (лінія 1) і ФБР з параметром Херста $H = 0,2$ (лінія 3).

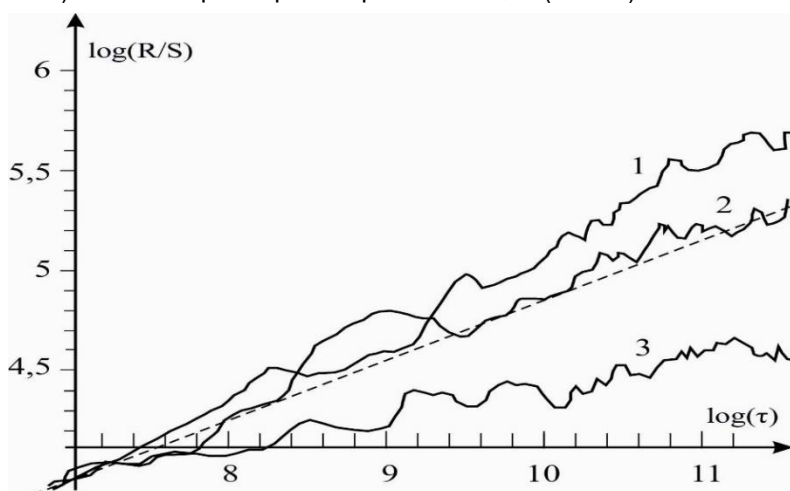


Рисунок 3.1 – Залежності $\log(R/S)$ для процесів з різними типами пам'яті

Одним з методів перевірки значущості показника Херста є тест на перемішування даних [Петерс, 2000; Петерс, 2004]. У цьому випадку порядок спостережень стає повністю відмінним від вхідних. Обчислюється показник Херста для перемішаних даних. Якщо ряд дійсно був незалежним, то значення H не зміниться, оскільки кореляції між спостереженнями не існує. Якщо ж мав місце ефект довготривалої пам'яті, то порядок між спостереженнями дуже важливий. Перемішуючи дані, ми руйнуємо структуру системи. Оцінка H при цьому виявиться значно нижче і буде близька до 0,5. На малюнку 3.2 показані залежності $\log(R/S)$ для вхідного і перемішаного часового ряду. У першому випадку оцінка показника Херста дорівнює 0,57, у другому – 0,48. Звідси можна зробити висновок про наявність довгострокової залежності для досліджуваного ряду.

3.1.2 Визначення інтервалів довгострокової залежності і видалення короткострокової залежності

Аналіз поведінки показника Херста щодо функції (3.2) дозволяє визначити значення часового інтервалу, починаючи з якого ряд має довгострокову пам'ять [Ширяєв, 1998; Петерс, 2004]. На рис. 3.3 показано два інтервали залежності $\log(R/S)$. На часових інтервалах менших моменту τ_L значення ряду є незалежними, а на великих інтервалах ряд має довгострокову залежність.

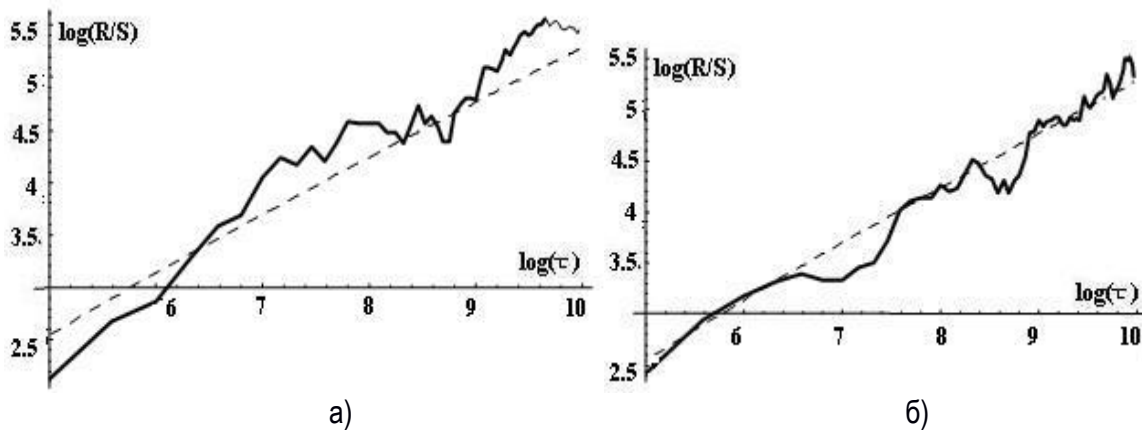


Рисунок 3.2 – Залежності $\log(R/S)$ в тесті на перемішування:
а) вхідний ряд; б) перемішаний ряд

R/S -аналіз дозволяє виявити і усунути короткострокову залежність, характерну для авторегресійних процесів, які в найпростішому випадку мають залежність:

$$X(t+1) = \phi X(t) + \varepsilon(t),$$

де ϕ – параметр авторегресії; t – дискретний час; $\varepsilon(t)$ – незалежні від $X(t)$ значення випадкової величини з нормальним розподілом $N(0, \sigma)$.

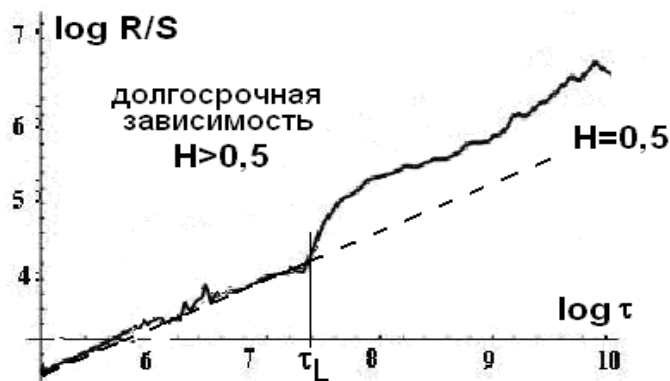


Рисунок 3.3 – Залежність $\log(R/S)$ для двох інтервалів пам'яті

У подібних випадках лінійна залежність зміщує значення показника Херста і демонструє неправдиву довготривалу пам'ять, що показано на малюнку 3.4 зліва (лінія 1).

Тому при з'ясуванні фрактальної структури часового ряду необхідно спочатку з'ясувати наявність короткострокової залежності. Для цього треба значення часового ряду $X(t)$ регресувати як залежну змінну проти $X(t-1)$ і знайти лінійну залежність між ними:

$$X(t) = a + b \cdot X(t-1). \quad (3.3)$$

Значимість коефіцієнта b свідчить про наявність короткострокової залежності. Для її усунення визначається залишок:

$$S(t) = X(t) - (a + b \cdot X(t-1)). \quad (3.4)$$

Після цього проводиться R/S -аналіз залишкового ряду $S(t)$. Якщо вхідний ряд $X(t)$ мав довгострокову залежність, то вона зберігається, в той час як короткострокова залежність усувається. На

рис. 3.4 показано усунення короткостроковій залежності для процесу авторегресії (зліва) і ФБР із параметром Херста $H = 0,8$ (справа).

Оцінка показника Херста в першому випадку дорівнювала 0,73. Після видалення короткостроковій залежності для процесу авторегресії оцінка показника Херста знизилася до значення 0,52 (лінія 2). Оцінка показника Херста для реалізації ФБР змінилася неістотно: з 0,83 (лінія 1) до 0,81 (лінія 2).

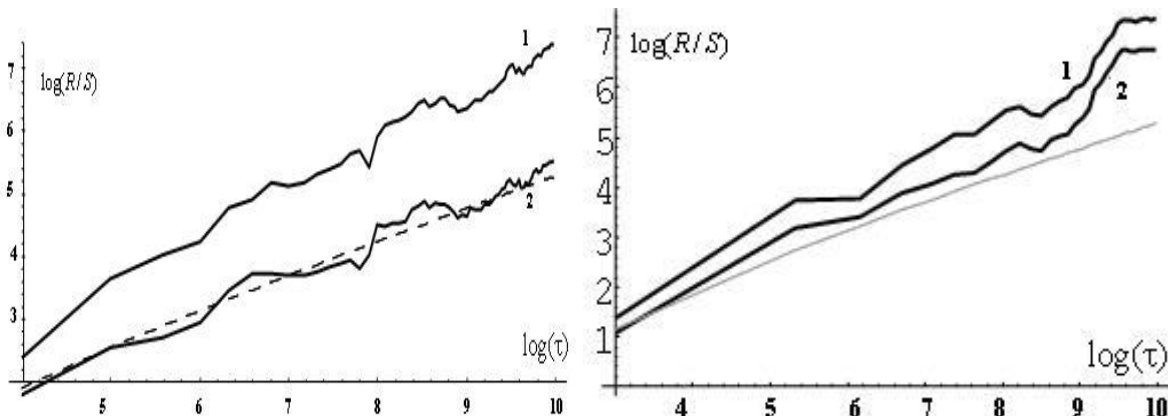


Рисунок 3.4 – Видалення короткостроковій залежності для процесу авторегресії (зліва) і ФБР із параметром Херста $H = 0.8$ (справа)

3.2 Застосування методу детрендованого флуктуаційного аналізу для часових рядів з трендовими компонентами

Метод нормованого розмаху та інші, які не видаляють тренду, добре працюють в разі стаціонарних часових рядів. Але якщо в часовому ряді присутній тренд, ці методи можуть дати невірні результати. Дуже часто причини виникнення основних трендів в часових рядах не відомі. ДФА є методом визначення скейлінгової поведінки зашумлених даних за наявності трендів, не знаючи їх походження та форми. Метод ДФА традиційно використовується для аналізу фрактальної структури і оцінювання ступеня самоподібності часових рядів з трендами (наприклад, реалізації енцефалограм) або кумулятивних рядів з нестационарними приростами (наприклад, фінансові ряди).

Найважливішим етапом виконання ДФА є усунення локального поліноміального тренду $Y_m(t)$ в кожному сегменті кумулятивного ряду X^{cum} довжиною τ (див. рис. 3.5), що містить N значень:

$$F_{DFA}^2(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (X^{cum}(t) - Y_m(t))^2. \quad (3.5)$$

Флуктуаційна функція залежить від ступеня полінома локального тренду $Y_m(t)$. Кожен раз, змінюючи порядок поліноміального тренда m ми отримуємо інше значення флуктуаційної функції $F_{DFA}^{(m)}(\tau)$. Треба відзначити, що видалення локального тренду $Y_m(t)$ для кумулятивного ряду X^{cum} відповідає видаленню тренду порядку $m - 1$ для початкового досліджуваного ряду.

В даному підрозділі представлені результати дослідження впливу вибору ступеня полінома m локального тренду Y_m на оцінку показника Херста для часових рядів невеликої довжини. Для таких рядів має істотне значення, що для мінімальної довжини сегмента τ має виконуватися умова

[Kantelhardt, 2001]: $\tau \geq m + 2$. В той же час максимальна довжина сегмента не повинна перевищувати значення τ , де N – довжина досліджуваного часового ряду.

Для проведення чисельних досліджень використовувалися модельні часові реалізації, представлені сумою фрактального броунівського руху з заданим показником Херста, і різними трендовими складовими: поліноміальними, трансцендентними, синусоїдальними. Модельний ряд можна представити сумою:

$$Y(t) = aT(t) + \varepsilon_H(t), \quad (3.6)$$

де a – коефіцієнт, який регулює відношення тренду до шуму; $T(t)$ – тренд; $\varepsilon_H(t)$ – фрактальний гаусівський шум із заданим показником Херста H .

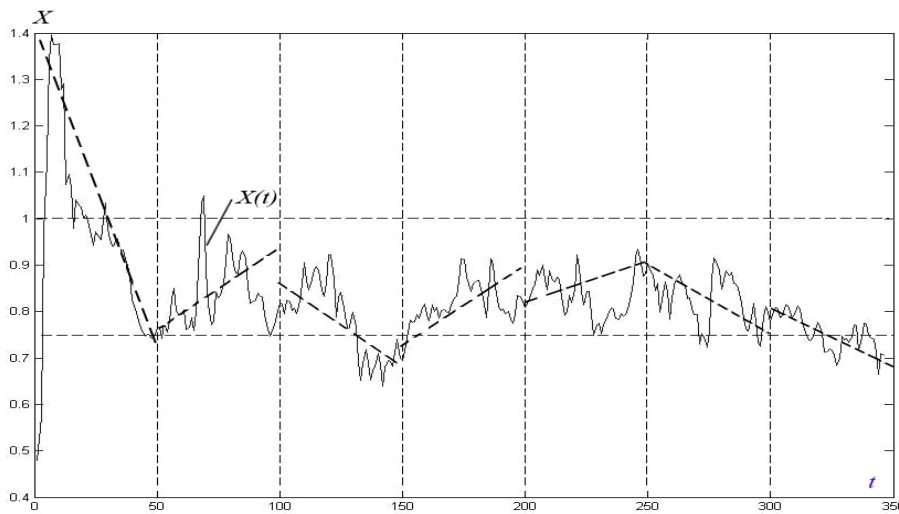


Рисунок 3.5 – Етап побудови флуктаційної функції

Проведені чисельні дослідження для фрактальних рядів з поліноміальними трендовими складовими порядку p показали, що коректне оцінювання параметра Херста досягається при використанні локального поліноміального тренду порядку $m > p$. На рис. 3.6 зліва представлені флуктаційні функції $F_{DFA}^{(m)}(\tau)$ порядку $m=1, 2, 3, 4$ для фрактальних рядів з лінійним трендом (теоретичне значення показника Херста $H = 0.7$).

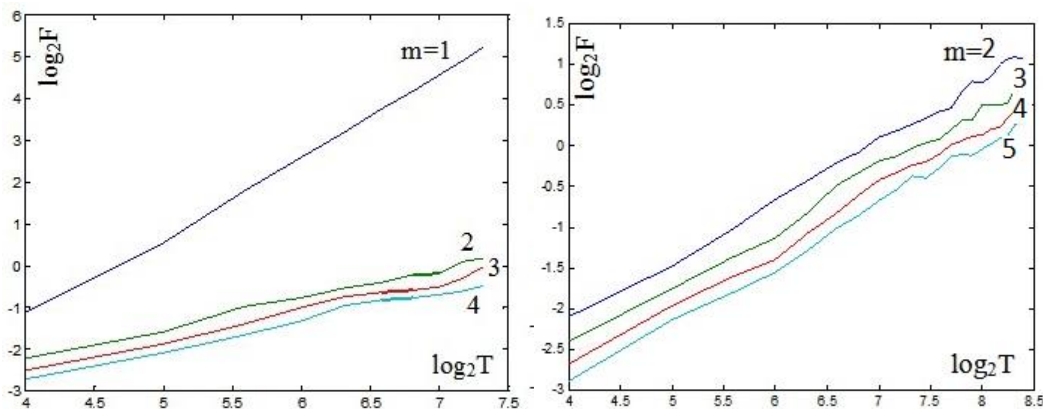


Рисунок 3.6 – Флуктаційні функції даних з лінійним (зліва) трендом і трендом виду квадратного кореня (справа)

Дослідження [Kirichenko, 2011], які були проведені для часових реалізацій з раціональними поліномами і трансцендентними функціями, показали коректне оцінювання при використанні локального поліноміального тренду порядку $m \geq 2$. У правій частині рис. 3.6 показано зміну відповідних флуктуаційних функцій $F_{DFA}^{(m)}(\tau)$ при зміні порядку поліноміального тренду $m=2,3,4,5$ для модельного ряду, який відповідно до (3.6) має вираз $Y(t) = 0.5 * t^{\frac{1}{2}} + \text{fgn}(t)$.

Значення оцінок показника Херста, які отримані за допомогою флуктуаційних функцій, для деяких поліноміальних і раціональних функцій трендів, наведені в таблиці 3.1 (довжина рядів 1024 значення).

Таблиця 3.1 – Оцінка H для поліноміальних і раціональних трендів різного порядку

Тренд	Порядок локального тренду	Оцінка H	Тренд	Порядок локального тренду	Оцінка H
t	1	1.935	\sqrt{t}	2	0.784
	2	0.713		3	0.703
	3	0.712		4	0.718
	4	0.691		5	0.689
t^3	2	2.15	$\sqrt[3]{t}$	2	0.693
	3	0.793		3	0.709
	4	0.718		4	0.718
	5	0.723		5	0.688

Очевидно, що коректна оцінка параметра H для фрактальних рядів з поліноміальним трендом порядку p досягається при відніманні з кумулятивного ряду локального тренду порядку $m > p$ і не змінюється (в межах похибок) при збільшенні порядку тренду m . Коректна оцінка параметра H для трендів раціональних і трансцендентних функцій досягається при відніманні локального тренду порядку $m \geq 2$ в залежності від виду тренду.

Найбільшу складність в оцінюванні ступеня самоподібності представляють ряди з періодичними і циклічними трендовими компонентами. На рис. 3.7 представлені флуктуаційні функції для трендів з синусоїдальними складовими різних періодів. Чисельний аналіз показав, що чим більше періодів містить реалізація, тим більший ступінь полінома необхідно використовувати (див. Табл. 3.2).

Таблиця 3.2 – Оцінка H для рядів з різними функціями тренду (довжина ряду 1024)

Тренд	Порядок локального тренда	Оцінка H	Тренд	Порядок локального тренда	Оцінка H
$\sin 2\pi t$ 1 період	2	2.44	$\sin 2\pi t$ 3 періоду	2	2.67
	3	0.733		3	1.23
	4	0.697		4	0.731
	5	0.701		5	0.7101

Узагальнюючи результати чисельного дослідження можна зробити висновок, що при оцінюванні показника Херста методом ДФА необхідно спочатку провести приблизне оцінювання, використовуючи локальні поліноми зі збільшуваним ступенем і визначити найменший ступінь полінома, починаючи з якого оцінка показника Херста перестає змінюватися. Після цього для повного проведення дослідження самоподібності часового ряду необхідно видаляти локальний поліноміальний тренд знайденого ступеня.

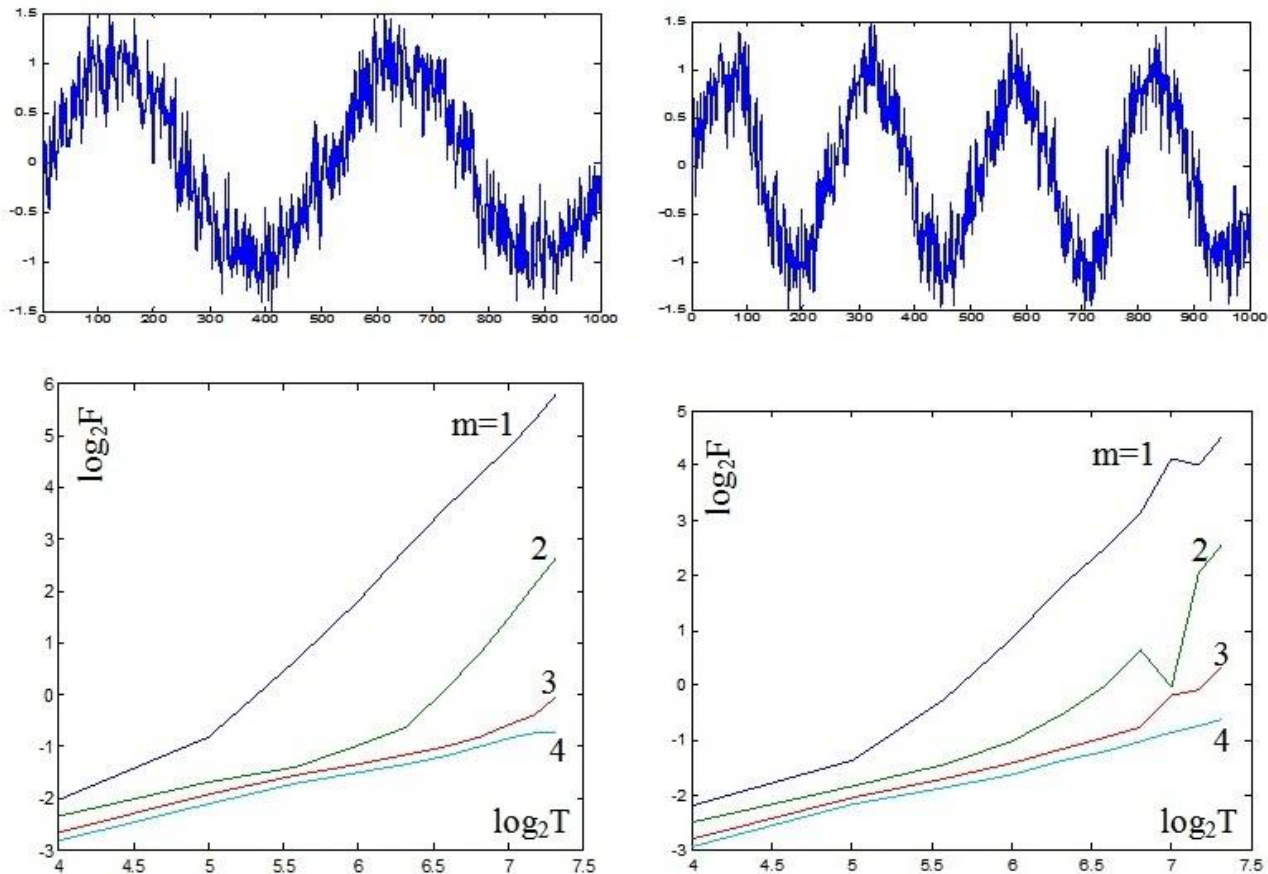


Рисунок 3.7 – Флуктуаційні функції для трендів з синусоїдальними складовими

3.3 Вейвлет-оцінювання параметра Херста для рядів із істотними трендовими і циклічними компонентами

Вейвлет-розкладання дозволяє ефективно виділяти тренди, які містять складні циклічні складові. Для виділення трендової складової аналізований ряд декомпозується за допомогою дискретного вейвлет-перетворення на задане число рівнів.

3.3.1 Визначення діапазону коректного оцінювання показника Херста за наявності трендових і періодичних компонент

Спектр вейвлет-енергії характеризує енергію сигналу на кожному з рівнів розкладання. Кожен рівень розкладання відповідає певному діапазону частот. Таким чином, коефіцієнти цього рівня показують, наскільки потужно представлений цей діапазон частот у сигналі. За допомогою вейвлет-розкладання можна виділити трендові і циклічні складові в досліджуваному часовому ряді.

Проте, видалення тренду з часового ряду в більшості випадків не дає коректну оцінку показника Херста, оскільки при цьому порушуються кореляційні зв'язки. У багатьох випадках не можна спрощено

розділяти досліджуваний часовий ряд на регулярну повільно мінливу трендову складову і залишок, який у свою чергу знаходиться під впливом багатьох складових ряду.

В якості одного з основних критеріїв для вибору конкретного вейвлета можна використовувати число нульових моментів вейвлет-функції:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0, \quad k = \overline{0, m-1}. \quad (3.7)$$

Число нульових моментів m характеризує здатність вейвлета виявляти локальні особливості аналізованого сигналу, оскільки вейвлет ψ ортогональний будь-якому многочлену ступеня $m-1$. Вейвлети, які мають велике число нульових моментів, дозволяють, ігноруючи найбільш регулярні поліноміальні складові сигналу, аналізувати дрібномасштабні флуктуації та особливості високого порядку. Вважається, що якщо вейвлет має нульові моменти m -ого порядку, то вплив трендових поліноміальних складових до m -ого порядку включно не проявляється [Малла, 2005].

В даному підрозділі представлені результати досліджень [Дейнеко, 2010; Kirichenko, 2011]. У таблиці 3.3 наведені значення оцінок показника Херста, отримані для модельних рядів (3.6) з поліноміальним трендом порядку m . Оцінки отримані за самоподібними реалізаціями з $H = 0,7$, довжиною 1000 значень, з використанням вейвлетів сімейства Добеши.

Таблиця 3.3 – Оцінка показника H , отримана за допомогою вейвлетів з різним числом нульових моментів

Поліноміальний тренд	H	Оцінка H				
		db1 $p=1$	db2 $p=2$	db3 $p=3$	db4 $p=4$	db5 $p=5$
$m=1$	0.7	0.7350	0.7105	0.7127	0.6899	0.7024
$m=2$	0.7	0.7908	0.7353	0.7013	0.7031	0.7036
$m=3$	0.7	1.2272	0.9572	0.7344	0.7888	0.7805

Однак коректне оцінювання показника H із застосуванням вейвлетів, що мають нульові моменти високого порядку, можливо тільки при невеликому значенні відношення полінома до фрактальної складової. Величиною, що характеризує відношення тренду і фрактального шуму, є величина:

$$Ratio = \frac{S_{trend}}{S_{noise}}, \quad (3.8)$$

де S_{trend} – середньоквадратичне відхилення тренду; S_{noise} – середньоквадратичне відхилення фрактального шуму.

Результати досліджень модельних сигналів, що містять поліноміальні тренди різних порядків, а також циклічну складову, з використанням материнських вейвлетів з різним числом нульових моментів демонструє таблиця 3.4.

З таблиці видно, що при невеликому значенні відношення тренду до шуму, оцінки показника Херста, отримані материнськими вейвлетами Добеши db4, db8 і db10, які мають відповідно 4, 8 і 10 нульових моментів, дають коректні значення показника H . В той час застосування вейвлетів Хаара

(haar) і Добеши 2го порядку (db2) призводить до завищеного результату, показник Херста досить швидко зростає при зростанні значення *Ratio* і стає вище одиниці.

Таблиця 3.4 – Оцінювання за допомогою різних вейвлетів для сигналів з трендом

Тренд	<i>Ratio</i>	Оцінка <i>H</i>				
		db1	db2	db4	db8	db10
$0.01t^2$	0.7107	0.7030	0.7305	0.7127	0.6899	0.7024
$0.02t^2$	1.4389	0.7908	0.7353	0.7013	0.7031	0.7036
$0.5t^2$	36.4223	1.2272	0.9572	0.7344	0.7888	0.7805
$0.005t^3$	2.7621	0.8010	0.7604	0.7194	0.7058	0.7045
$0.01t^3$	5.3329	0.8791	0.8042	0.7128	0.7066	0.7137
$0.02t^3$	10.8966	0.9623	0.8748	0.7398	0.7193	0.7313
$1.5\sin(0.5\pi t)$	3.8520	0.9768	0.9720	0.7493	0.7635	0.7692
$5.5\sin(0.5\pi t)$	14.2869	1.1938	1.0142	0.7841	0.7851	0.7978

Оцінка показника Херста *H*, Заданого при моделюванні фрактального процесу, обчислюється коректно чи ні, в залежності від коефіцієнта *Ratio*, Що визначає рівень шуму. При зростанні значення *Ratio*, оцінка *H* стає завищеною при будь-якому материнському вейвлет і досить скоро стає більше одиниці. Однак існує деякий діапазон значень відносини тренда до шуму, при якому параметр Херста оцінюється коректно.

Визначити момент появи тренду, відповідний значенню *Ratio*^{*}, можна за допомогою простих і відомих статистичних критеріїв випадковості [Кэндел, 1981]. Критерії дозволяють перевірити гіпотезу, чи є окремі результати незалежними спостереженнями або часовий ряд має тренд, а також визначити момент його виникнення. Значення *Ratio*^{*} визначалося як максимальне значення *Ratio*, для якого приймається гіпотеза про відсутність тренду.

На рис. 3.8 представлені значення оцінок параметра *H* за допомогою вейвлета db4 в залежності від показника *Ratio*, які отримані для фрактальних часових рядів з лінійним трендом. На представленій залежності виділено діапазон, де оцінка є коректною.

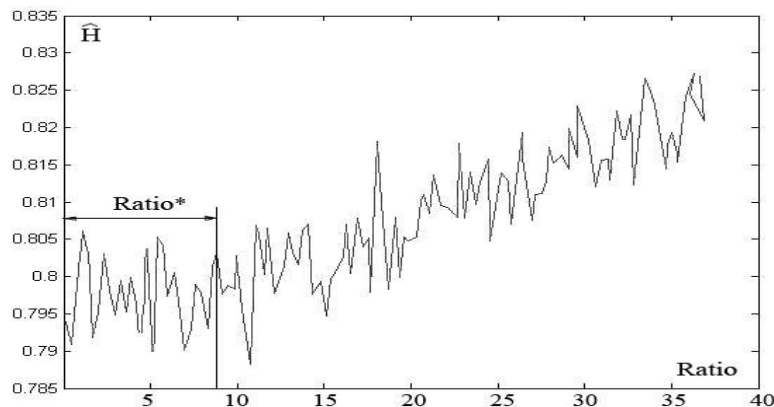


Рисунок 3.8 – Залежність оцінок показника Херста від коефіцієнта *Ratio*

У таблиці 3.5 представлені результати експерименту для модельних фрактальних часових рядів з різними трендовими компонентами та відповідне значення коефіцієнта *Ratio*^{*}.

Очевидно, що для поліноміального тренду невисокого порядку оцінка показника *H* є коректною навіть при великому відношенні тренду і фрактального шуму. При гіперболічному і логарифмічному тренді коректне оцінювання можливо тільки при невеликому значенні *Ratio*.

Таблиця 3.5 – Значення коефіцієнта *Ratio*^{*} для модельних часових рядів з трендовими компонентами

Тренд	Значення <i>Ratio</i> [*]
$T(t) = t$	8.27
$T(t) = t^2$	7.25
$T(t) = t^3$	4.74
$T(t) = \sqrt{t}$	1.82
$T(t) = t^{3/4}$	0.45
$T(t) = \log(t)$	0.30
$T(t) = \sin(2\pi t)$, 1 період	0.18
$T(t) = \sin(2\pi t)$, 2 періоди	0.08

3.3.2. Вейвлет-оцінювання показника Херста на основі попереднього аналізу спектра вейвлет-енергії

Для оцінювання показника *H* можуть бути обрані вейвлет-функції сімейства Добеши (db2-db20), які володіють необхідним числом нульових моментів (відповідно 2-20). При невеликих значеннях відношення тренду до ФГШ ($Ratio \leq 2$) метод вейвлет-оцінювання дозволяє отримати коректні оцінки показника Херста при використанні вейвлет-функцій з великим числом нульових моментів. Однак, зі збільшенням значення *Ratio* або числа періодів в циклічній компоненті, потрібні вейвлет-функції з дедалі більшим числом нульових моментів, що складно піддається реалізації на практиці. Крім того, використання вейвлет-функцій, що мають велике число нульових моментів, призводить до менш точному оцінюванню показника *H*.

У тому випадку, коли сигнал містить трендову складову, спектр вейвлет-коефіцієнтів демонструє великий сплеск коефіцієнтів на низьких частотах. В цьому випадку низькочастотні складові, які переважають в сигналі, пригнічують всі інші. Однак, при оцінюванні параметра Херста *H*, можна не враховувати коефіцієнти на високих рівнях і оцінювати кут нахилу тільки за значеннями коефіцієнтів вейвлет-енергії на більш низьких рівнях розкладання (см. пункт 2.4.3).

На рис. 3.9 представлені адитивні сигнали (3.6) різного типу (заданий показник Херста $H = 0,8$, довжина часового ряду – 4096 значень). У середній частині рис. 3.9 показані відповідні спектри вейвлет-енергії (материнський вейвлет – db4), а в нижній – залежність $\log_2(E_j)$ від рівня розкладання j .

Як видно з наведених рисунків, можна виключити вплив низькочастотних компонент на оцінювання показника Херста, не враховуючи при обчисленнях коефіцієнти на більш високих рівнях (низьких частотах) і знову оцінюючи показник Херста. На рис. 3.9 показано визначення показника Херста без урахування (суцільна лінія 2) та з урахуванням (пунктирна лінія 1) трендових компонент.

Оцінювання H без урахування рівнів розкладання, де проявляється вплив трендових і циклічних компонент, дає коректні результати обчислень.

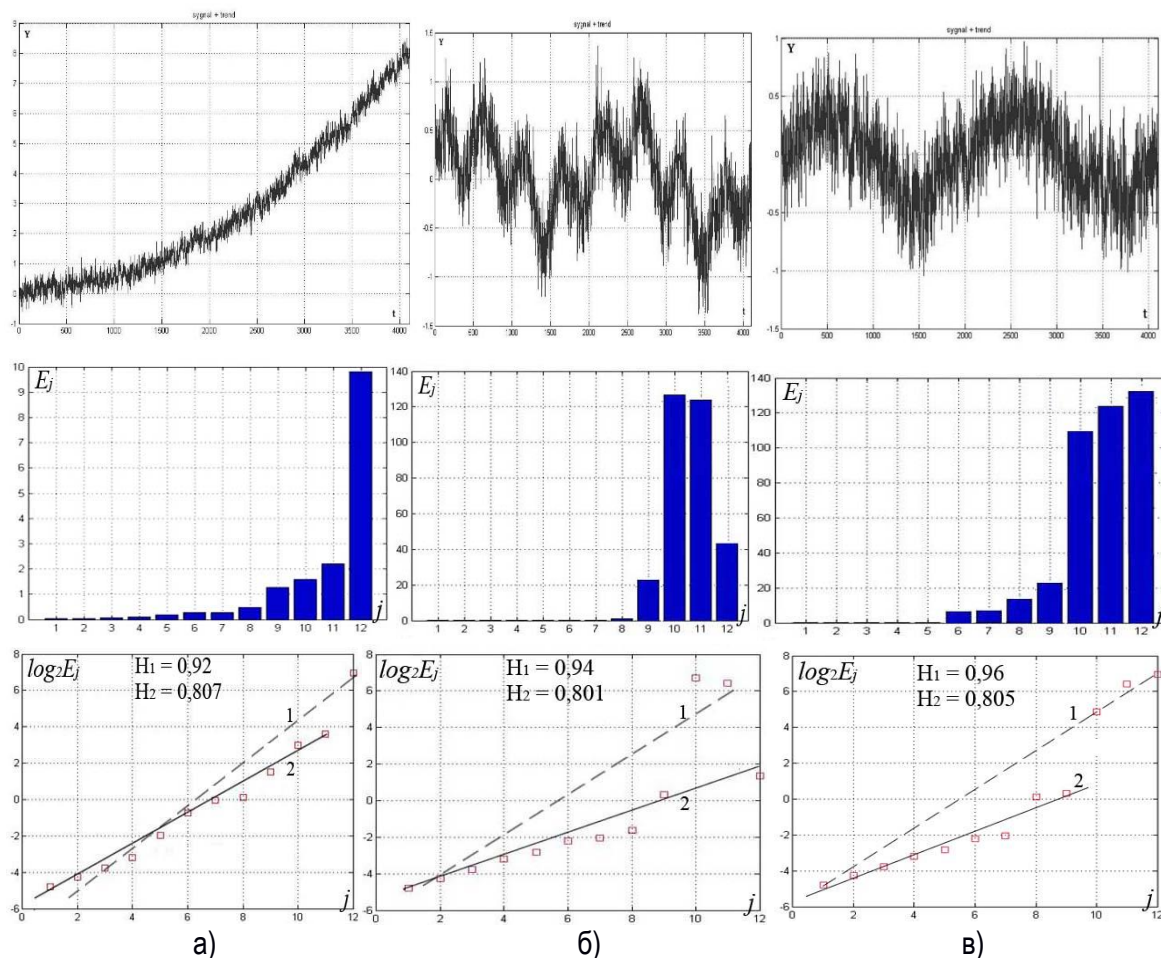


Рисунок 3.9 – Модельні сигнали, спектри вейвлет-енергії, логарифмічні залежності з трендовими компонентами: а) кубічний поліном; б) лінійний поліном і сума синусів; в) синусоїда

В роботі [Дейнеко 2010] був запропонований метод вейвлет-оцінювання показника Херста для часових рядів із значними трендовими та циклічними складовими, який складається з декількох етапів:

Етап 1. Попереднє дослідження часового ряду. Аналіз часових рядів шляхом вейвлет-розкладання на складові компоненти, виділення трендових і циклічних компонент.

Етап 2. Аналіз трендових і циклічних компонент, оцінювання порядку m поліноміального тренду з метою вибору ефективної материнської вейвлет-функції.

Етап 3. Визначення значення параметра $Ratio$. Якщо значення лежить всередині діапазону коректного оцінювання ($Ratio < Ratio^*$), то показник Херста оцінюється за допомогою обраного материнського вейвлета з числом нульових моментів $p > m$.

Етап 4. Якщо значення $Ratio > Ratio^*$, то необхідно зробити перетворення спектра вейвлет-енергії: виявити рівні розкладання, відповідні трендовим компонентам і відкинути їх при оцінці нахилу графіка функції $\log_2(E_j)$ від j .

3.4 Комплексний підхід до оцінювання фрактальних властивостей самоподібних часових рядів

Підводячи підсумки досліджень, представлених у 2-му і 3-му розділах, можна запропонувати наступну схему проведення фрактального аналізу деякого випадкового фрактального процесу, представленого часовим рядом довжини N [Кириченко, 2014]. В основних етапах фрактального аналізу задіяно методи нормованого розмаху, ДФА і вейвлет-оцінювання. Оскільки для застосування апарату вейвлет-перетворень необхідне відповідне програмне забезпечення та досвід роботи, опис алгоритму побудовано таким чином, що використання методів вейвлет-оцінювання є бажаним, але не обов'язковим елементом. Однак застосування методу ДФА є необхідним з двох причин: цей метод має достатню точність і призначений для роботи з нестационарними часовими рядами.

Розглянемо поетапну реалізацію комплексного підходу до оцінювання фрактальних властивостей самоподібних часових рядів.

Етап 1. Попереднє дослідження структури часового ряду.

1. Перш ніж приступати до фрактальному аналізу часового ряду, необхідно з'ясувати з апіорно відомої інформації, чи є ряд кумулятивним (наприклад, курс валюти) чи ні (наприклад, інформаційний трафік). Якщо за своєю природою ряд є кумулятивним, то все нижче зазначені етапи фрактального аналізу відносяться до відповідного ряду приростів.

2. Визначення інтервалів різних скейлінгів.

Якщо самоподібний процес має декілька скейлінгів, які залежать від часових інтервалів (наприклад денні та годинні дані для валютних рядів), то на кожному такому інтервалі динаміка часового ряду визначається відповідним показником Херста. Для визначення таких інтервалів треба побудувати функціональну залежність $H(\tau) = f[\log \frac{R}{S}(\tau)]$ спільно з функцією (3.2).

Крім методу нормованого розмаху для виявлення інтервалів різних скейлінгів можна використовувати побудову флуктуаційної функції $F_{DFA}(\tau)$ методом ДФА (3.5). Оскільки даний етап є приблизним, ступінь локального поліноміального тренду можна вибрати завищеною. Якщо існує декілька скейлінгів, функція $F_{DFA}(\tau)$ змінить кут нахилу. Однак, на відміну від методу нормованого розмаху, який досліджує довгострокову залежність часового ряду в діапазоні всієї його довжини, флуктуаційна функція може бути коректно побудована тільки на інтервалі до значень $N/4$.

3. Виявлення і видалення короткострокової авторегресійної залежності. Перевірка гіпотези про наявність самоподібності.

Наявність авторегресійної залежності зміщує значення показника Херста і демонструє неправдиву довготривалу пам'ять. При усуненні авторегресійної залежності за формулою (3.5) визначається залишковий ряд. Якщо авторегресійна залежність є значущою, то все нижче зазначені етапи фрактального аналізу відносяться до залишковому часовому ряду.

Якщо значення ступеня самоподібності близько до 0.5, необхідно перевірити гіпотезу про наявність самоподібності. Якісною перевіркою наявності властивостей самоподібності є побудова агрегованих часових рядів згідно з формулою (1.8) і побудова для них вибіркової функції розподілу. У разі самоподібності агреговані ряди мають однаковий розподіл, підтверджений статистичними критеріями.

Етап 2. Дослідження стаціонарності часового ряду. Оцінювання показника Херста за стаціонарним рядом.

Для оцінювання показника Херста треба визначити, чи є ряд стаціонарним, відомими статистичними методами. Якщо ряд є стаціонарним, то ступінь самоподібності і інтервальну оцінку показника Херста можна визначити методами, розглянутими в розділі 2.

Етап 3. Оцінювання показника Херста за нестационарним рядом.

1. Якщо досліджуваний часовий ряд є нестационарним, необхідно досліджувати його структуру за допомогою побудови кореляційної функції (спектральної щільності) і спектра вейвлет-енергії, які дозволяють виявити трендові і циклічні складові ряду.

2. При оцінюванні показника Херста методом ДФА, необхідно спочатку провести приблизне оцінювання, використовуючи локальні поліноми зі збільшуваним ступенем і визначити найменший ступінь полінома, починаючи з якого оцінка показника Херста перестає змінюватися. Після цього для оцінювання самоподібності часового ряду необхідно видаляти локальний поліноміальний тренд знайденої ступеня. Інтервальну оцінку показника Херста для часового ряду довжиною N можна визначити за формулою (2.22).

3. Вейвлет-оцінювання нестационарного часового ряду проводиться відповідно до методу, представленою в підрозділі 3.3. Інтервальна оцінка показника визначається за формулою (2.22).

Етап 4. Уточнення отриманої оцінки показника Херста.

Якщо оцінки були отримані різними методами, то для збільшення точності оцінки показника Херста можна використовувати середнє арифметичне оцінок, отриманих за допомогою декількох методів оцінювання. Якщо проводилося вейвлет-оцінювання з різними вейвлет-функціями, то більш точною буде середнє арифметичне цих оцінок.

Висновки за розділом 3

1. Розглянуто методи досліджень, що передують проведенню фрактального аналізу, які включають в себе перевірку гіпотези про наявність самоподібності, визначення інтервалів різних скейлінгів, виявлення і видалення короткострокової залежності.

2. Одержав подальший розвиток метод оцінювання показника Херста ДФА для фрактальних рядів з трендовими компонентами різного виду. Проведені чисельні дослідження для фрактальних рядів з поліноміальними трендовими складовими порядку p показали, що коректне оцінювання параметра Херста досягається при використанні локального поліноміального тренду порядку $m > p$. У загальному випадку для рядів з трендовими компонентами різного виду необхідно спочатку провести приблизне оцінювання, використовуючи локальні поліноми зі збільшуваним ступенем, і визначити найменший ступінь полінома, починаючи з якого оцінка показника Херста перестає змінюватися.

3. Досліджено вплив трендових і циклічних складових на властивості оцінок показника Херста в залежності від виду трендової компоненти і параметрів материнських вейвлет-функцій. Визначено діапазон відношення трендової компоненти до фрактального шуму, на якому коректно оцінюється показник Херста.

4. Запропоновано метод вейвлет-оцінювання показника Херста для часових рядів із значними трендовими і циклічними складовими, заснований на аналізі компонент спектра вейвлет-енергії і виділення діапазонів частот трендової та циклічної компонент ряду.

5. Запропоновано комплексний підхід до оцінювання фрактальних властивостей самоподібних часових рядів і запропоновані практичні рекомендації щодо реалізації даного підходу.

Література до розділу 3

[Feller, 1951] Feller W. The asymptotic distribution of the range of sums of independence variables. Annals of mathematics and statistics, France, University of Nancy, 1951. – 306 p.

- [Hurst, 1951] Hurst H. E. The Long-Term Storage Capacity of Reservoirs. Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol. 116, 1951. pp. 770–799.
- [Hurst, 1955] Hurst H. E. Methods of using long-term storage in reservoirs. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part 1, London, 1955. pp. 519–577.
- [Kantelhardt, 2001] Kantelhardt, J. W., Koscielny-Bunde, E., Havlin, S., et al. Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis. Physica A., Statistical Mechanics and its Applications, Vol. 295, № 3–4, 2001. pp. 441–454.
- [Kirichenko, 2011] Kirichenko, L., Radivilova, T., Deineko, Zh. Comparative Analysis for Estimating of the Hurst Exponent for Stationary and Nonstationary Time Series. Information Technologies & Knowledge, Vol.5, № 4, 2011. pp. 371–388.
- [Mandelbrot, 1969] Mandelbrot, B., Wallis, J. R. Robustness of the Rescaled Range R/S in the Measurement of Noncyclic Long-Run Statistical Dependence. Water Resources Research, Vol. 5, 1969. pp. 967–988.
- [Mandelbrot, 1979] Mandelbrot, B., Taqqu, M. S. Robust R/S analysis of long-run serial correlation. Bulletin of the International Statistical Institute, Proceedings of the 42nd Session of the International Statistical Institute, Manila. Book 2, Vol.48, 1979. pp. 69–104.
- [Taqqu, 1995] Taqqu, M. S., Teverovsky, V., Willinger, W. Estimators for long-range dependence: an empirical study. Fractals, Vol. 3, № 4, 1995. P. 785–798.
- [Taqqu, 1996] Taqqu M. S., Teverovsky, V. Semi-parametric graphical estimation techniques for long-memory data. Lecture Notes in Statistics, Vol. 115– 1996. pp. 420–432.
- [Дейнеко, 2010] Дейнеко, Ж. В., Кириченко, Л. О. Оценивание параметра Хёрста для временных рядов с трендом методом вейвлет-преобразования. Системи управління, навігації та зв'язку, Вип. 4 (16), 2010. сс. 85–89.
- [Кендэл, 1981] Кендэл М. Временные ряды. М.: Финансы и статистика, 1981. 198с.
- [Кириченко, 2014] Кириченко Л.О., Чалая Л.Э. Комплексный подход к исследованию фрактальных временных рядов. Information Technologies & Knowledge, International Journal, Vol. 8, № 1, 2014. pp. 22-28.
- [Малла, 2005] Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.
- [Петерс, 2000]. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка : пер. с англ. М. : Мир, 2000. 333 с.
- [Петерс, 2004] Фрактальный анализ финансовых рынков. Применение теории хаоса в инвестициях и экономике : пер. с англ. М : Интернет-трейдинг, 2004. 304 с.
- [Федер, 1991] Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.
- [Ширяев, 1998] Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. М. : Фазис, Т. 1: Факты. Модели, 1998. 512 с.

РОЗДІЛ 4

ОЦІНЮВАННЯ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СТОХАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Мультифрактальний підхід передбачає, що досліджувану множину якимось чином можна розділити на частини, для кожної з яких існує свій скейлінг самоподібності. В даний час мультифрактальний аналіз став затребуваним інструментом в різних областях науки: при вивченні властивостей клітинних елементів крові в біології та дифузійного росту кластерів, в теорії розвинутої гідродинамічної турбулентності, при дослідженні квазікристалів у фізиці твердого тіла, для аналізу структури молекул ДНК, для опису фрактальної структури дивних атракторів і т.ін. В даному розділі проведено порівняльне дослідження точності оцінювання мультифрактальних характеристик для двох найпопулярніших методів мультифрактального аналізу.

4.1 Мультифрактальні характеристики математичних моделей фрактальних стохастичних процесів

Для аналізу точності оцінювання мультифрактальних методів були використані тестові модельні реалізації моно- і мультифрактальних випадкових процесів: фрактального броунівського руху (монофрактальний процес), α -стійкого процесу (біфрактальний процес) і мультифрактальних детермінованих і стохастичних каскадних процесів.

Фрактальний броунівський рух. Найбільш відомою і простою моделлю самоподібного процесу є ФБР, розглянутий в підрозділі 1.3.1. ФБР можна розглядати як монофрактальний процес, у якого скейлінгова експонента $\tau(q)$ є лінійною функцією показника Херста H :

$$\begin{cases} h(q) = H, \\ \tau(q) = qH - 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = H, \\ f(\alpha) = 1. \end{cases} \quad (4.1)$$

На рис. 4.1 вгорі показана типова реалізація ФБР при значенні параметра $H=0.8$ довжиною 1000 значень і відповідна їй реалізація фрактального гаусівського шуму. У нижній частині рис. 4.1 наведені теоретичні значення узагальненого показника Херста, скейлінгової експоненти і мультифрактального спектру для ФБР з показником $H=0.8$.

α -стійкі процеси (підрозділ 1.3.2) мають властивості самоподібності. Показано [Nakao, 2000], що такі процеси є біфрактальними. Відповідні мультифрактальні характеристики мають вигляд:

$$\begin{cases} h(q) = \begin{cases} 1/\alpha_L & q \leq \alpha_L, \\ 1/q & q > \alpha_L; \end{cases} \\ \tau(q) = \begin{cases} q/\alpha_L - 1 & q \leq \alpha_L, \\ 0 & q > \alpha_L; \end{cases} \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} \alpha = \begin{cases} 1/\alpha_L & q \leq \alpha_L, \\ 0 & q > \alpha_L; \end{cases} \\ f(\alpha) = \begin{cases} 1 & q \leq \alpha_L, \\ 0 & q > \alpha_L; \end{cases} \end{cases},$$

де величина α_L в даному випадку означає індекс стійкості.

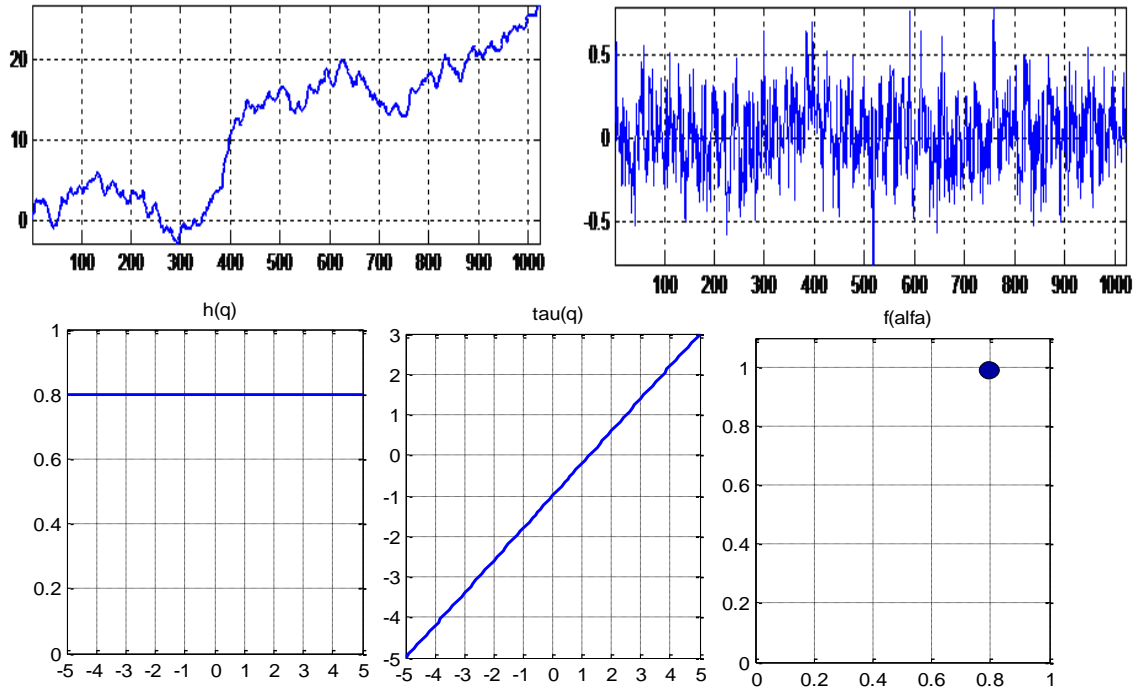


Рисунок 4.1 – Реалізація ФБР (угорі ліворуч), ряд збільшень (вгорі справа), теоретичні значення узагальненого показника Херста, скейлінгової експоненти і мультифрактального спектру

На рисунку 4.2 вгорі показана типова реалізація процесу при значенні параметра $\alpha_L = 1.5$ довжиною 1000 значень і відповідна їй реалізація приростів, які є незалежними стандартними стійкими випадковими величинами $S_\alpha(1,0,0)$. Реалізації такого процесу мають теоретичну нескінченну

дисперсію і є самоподібними з показником Херста $H = \frac{1}{\alpha_L} = \frac{2}{3}$. У нижній частині рисунка 4.2 наведені

теоретичні значення узагальненого показника Херста, скейлінгової експоненти і мультифрактального спектру для цього процесу.

Детермінований біноміальний каскад. Найпростішою моделлю мультифрактального процесу з заданими властивостями є детермінований біноміальний каскад, розглянутий в підрозділі 1.3.3. Характеристики $h(q)$, $\tau(q)$ і $f(\alpha)$ для біноміального мультифрактального процесу залежать тільки від коефіцієнтів p_1 і p_2 і визначаються аналітично наступним чином:

$$\left. \begin{aligned}
 h(q) &= \left(\frac{1}{q} - \frac{\ln(p_1^q + p_2^q)}{q \ln 2} \right), \\
 \tau(q) &= \frac{-\ln(p_1^q + p_2^q)}{\ln 2};
 \end{aligned} \right\} \begin{cases}
 \alpha = -\frac{p_1^q \ln(p_1) + p_2^q \ln(p_2)}{\ln 2 (p_1^q + p_2^q)}, \\
 f(\alpha) = -\frac{q}{\ln 2} \frac{p_1^q \ln(p_1) + p_2^q \ln(p_2)}{(p_1^q + p_2^q)} + \frac{\ln(p_1^q + p_2^q)}{\ln 2}.
 \end{cases} \quad (4.3)$$

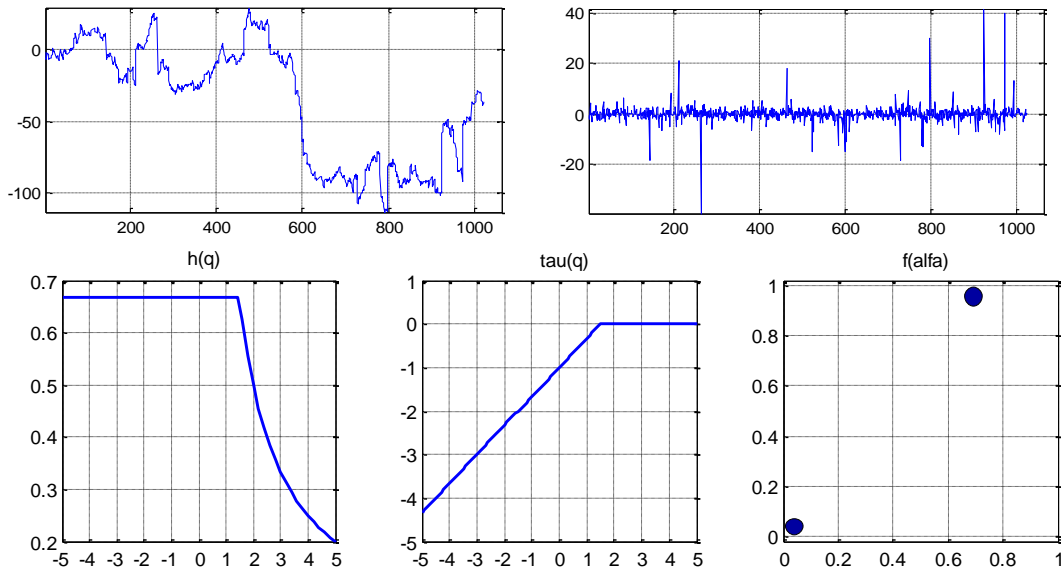


Рисунок 4.2 – Реалізація α – стійкого процесу (угорі ліворуч), ряд приростів (вгорі справа), теоретичні значення $h(q)$, $\tau(q)$ і $f(\alpha)$

На рис. 4.3 вгорі показаний часовий ряд значень біноміального каскаду при $p_1 = 0.7$ та $n = 10$, тобто довжиною реалізації рівній 2^{10} значень. У нижній частині рисунку 4.3 наведені відповідні теоретичні значення узагальненого показника Херста, скейлінгової експоненти і мультифрактального спектру.

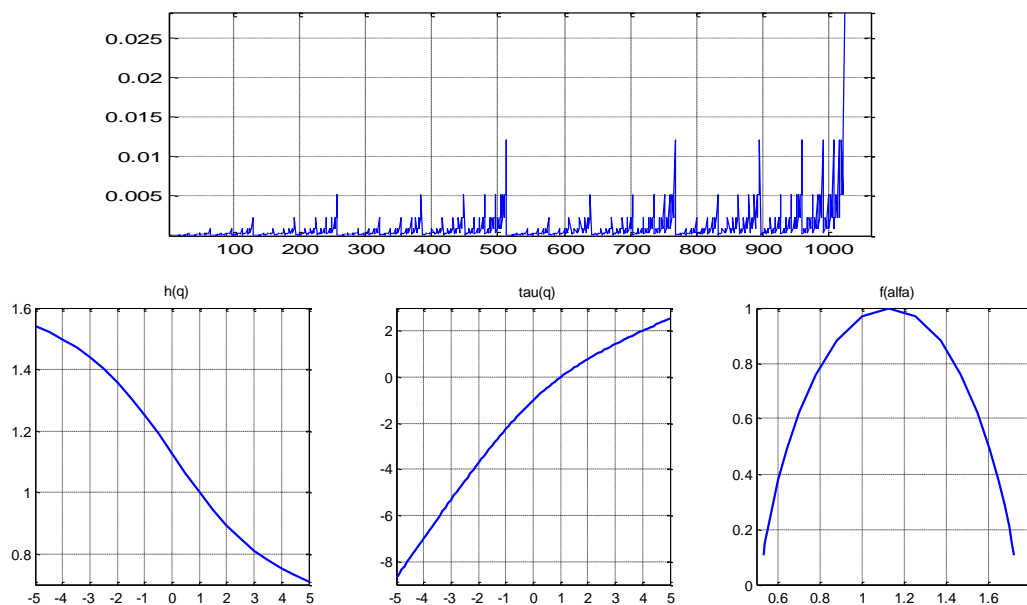


Рисунок 4.3 – Реалізація біноміального каскаду, теоретичні значення функцій $h(q)$, $\tau(q)$ та $f(\alpha)$

Стохастичний біноміальний каскад. При побудові стохастичних каскадів ваговими коефіцієнтами є незалежні значення деякої заданої випадкової величини W (див. підрозділ 1.3.3). Найбільш зручно використовувати випадкову величину з рівномірним розподілом ($\text{Beta}(1,1)$) на інтервалі $[0, 1]$. В цьому випадку можна аналітично визначити скейлінгову експоненту $\tau(q)$ на інтервалі значень $q > -1$ [Riedi, 2002]:

$$\tau(q) = -\log_2 \frac{\text{Beta}(1+q,1)}{\text{Beta}(1,1)} - 1. \quad (4.4)$$

Значення узагальненого показника Херста $h(q)$ та $f(\alpha)$ були отримані чисельно з (4.4) відповідно до формул (1.15 і 1.21). На рис. 4.4 вгорі представлена типова реалізація біноміального стохастичного каскаду, у якого ваги мають рівномірний розподіл довжиною реалізації 1024 значення. У нижній частині рис. 4.4 наведені відповідні теоретичні значення узагальненого показника Херста, скейлінгової експоненти і мультифрактального спектру.

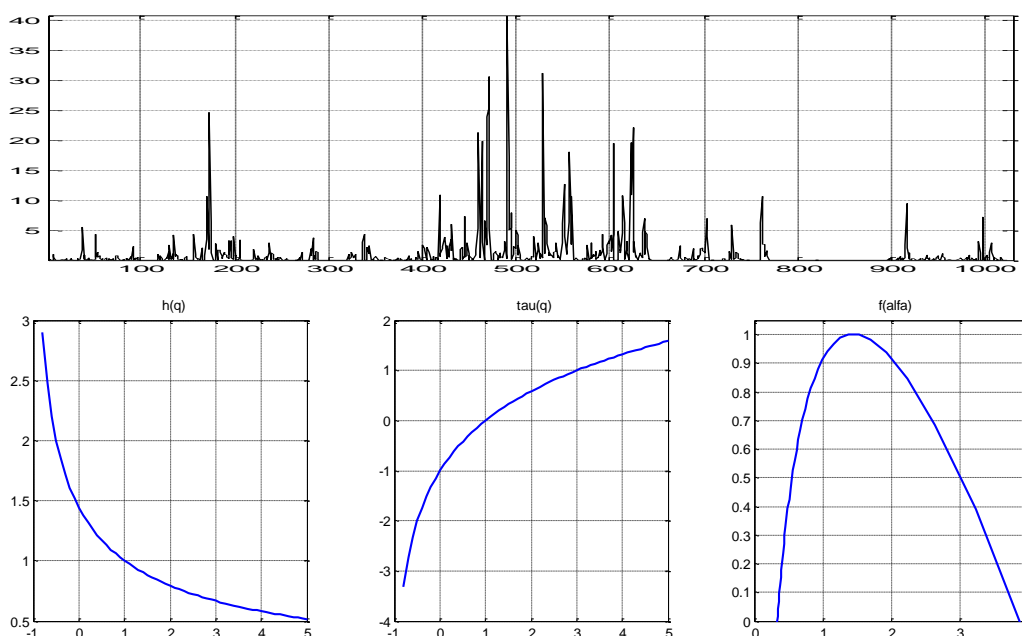


Рисунок 4.4 – Реалізація стохастичного каскаду, теоретичні значення функцій $h(q)$, $\tau(q)$ та $f(\alpha)$

4.2 Мультифрактальний флуктуаційний аналіз

Метод детрендованого флуктуаційного аналізу розглянуто в розділах 2 і 3. При проведенні мультифрактального флуктуаційного детрендованого аналізу (МФДФА) [Kantelhardt, 2002; Kantelhardt, 2008] досліджується залежність флуктуаційної функції $F_q(s)$ від параметра q :

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [F^2(s)]^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad (4.5)$$

яка отримана піднесенням виразу (2.14) до степеню q і подальшим усередненням за всіма сегментами. Оскільки при $q = 0$ вираз (4.5) містить невизначеність, то замість нього використовують наступне граничне вираження:

$$F_q(\tau) = \text{Exp} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln[F^2(\tau)] \right\}.$$

Змінюючи часову шкалу s при фіксованому показнику q , знаходимо залежність $F_q(s)$, представляючи її в подвійних логарифмічних координатах. Якщо досліджуваний ряд зводиться до мультифрактальної множини, яка виявляє довгострокову залежність, то флуктуаційна функція $F_q(s)$ представляється степеневою залежністю

$$F_q(s) \propto s^{h(q)}, \quad (4.6)$$

де $h(q)$ – функція узагальненого показника Херста.

З виразу (4.5) випливає, що при $q = 2$ цей показник зводиться до звичайного значення параметру Херста H . На рисунку 4.5 представлені флуктуаційні функції $F_q(s)$ для монофрактального (зліва) і мультифрактального (справа) процесів для значень параметру $q = \{-5, -2, 0, 2, 5\}$.

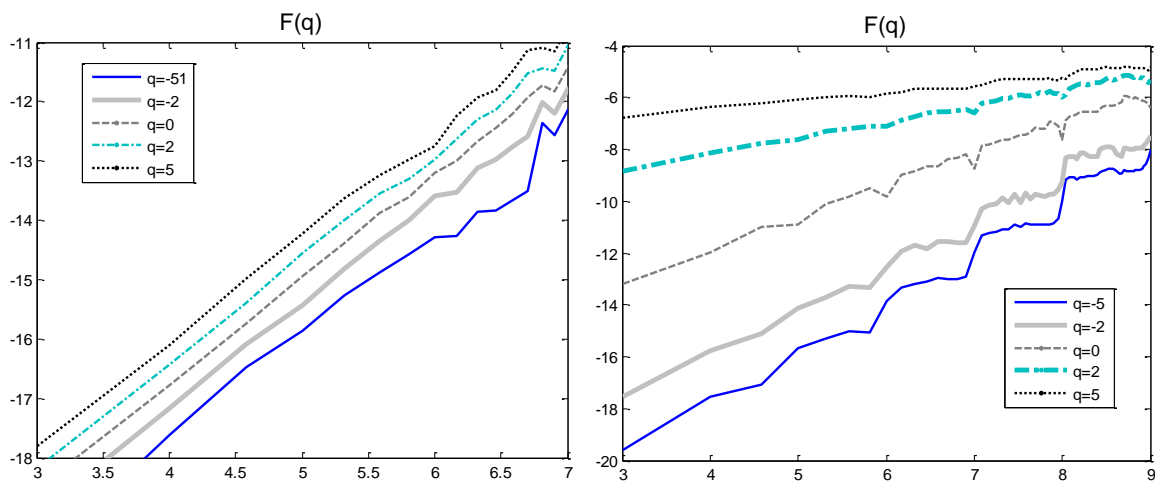


Рисунок 4.5 – $F_q(s)$ для монофрактального (зліва) і мультифрактального (справа) процесів

На рисунку 4.6 представлені функції узагальненого показника Херста $h(q)$, отримані за реалізаціями детермінованого біноміального каскаду при значеннях вагового коефіцієнту $p_1 = \{0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$.

Для часових рядів, які відповідають монофрактальній множині, флуктуаційна функція $F_q(s)$ однакова для всіх сегментів, і узагальнений показник Херста $h(q) = H$ не залежить від параметру q . Для мультифрактальних рядів $h(q)$ є нелінійною функцією: при позитивних q основний внесок в функцію $F_q(s)$ дають сегменти, які виявляють великі відхилення $F^2(s)$, а при негативних q домінують сегменти з малими дисперсіями $F^2(s)$. Таким чином, при негативних значеннях q узагальнений показник Херста $h(q)$ описує сегменти, які виявляють малі флуктуації, а при позитивних – великі.

Виходячи з вищевказаного можна запропонувати наступний покроковий алгоритм оцінювання мультифрактальних характеристик за часовим рядом $X(t)$, $t = 1, 2, \dots, n$.

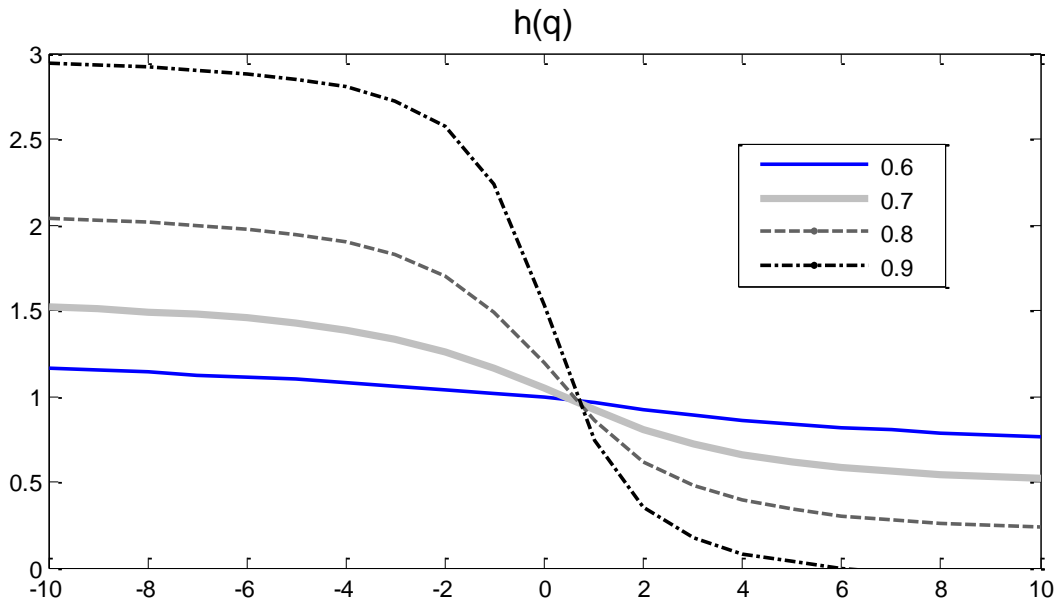


Рисунок 4.6 – Функції $h(q)$ для реалізацій детермінованого каскаду при різних значеннях p_1 .

1. Для розрахунку необхідно перетворити вхідний ряд в кумулятивний $X^{cum}(k) = \sum_{t=1}^k X(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Якщо вхідний ряд вже є кумулятивним, даний крок пропускається.
2. Задаються значення параметру q , в діапазоні яких потрібно знайти значення мультифрактальних характеристик $h(q)$, $\tau(q)$, $f(\alpha)$.
3. Ряд $X^{cum}(t)$ розбивається на N сегментів, що не перекриваються, довжиною τ і для кожного сегменту $X^{cum}(t)$ обчислюється флуктуаційна функція

$$F^2(\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} (X^{cum}(t) - Y_m(t))^2, \quad (4.7)$$

де $Y_m(t)$ – локальний m -поліноміальний тренд в межах даного сегменту.

4. Функція $F(\tau)$ усереднюється за всім рядом $X^{cum}(t)$

$$F(\tau) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i^2(\tau)}.$$

5. Обчислюється флуктуаційна функція для значення q :

$$F_q(\tau) = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [F_i^2(\tau)]^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad (4.8)$$

6. Значення τ збільшується і кроки 3–5 повторюються.

7. Будується лінійна регресія методом найменших квадратів на $\log(\tau)$, як незалежної змінної, і $\log F_q(\tau)$, як залежної змінної. Тангенс кута нахилу прямої, що апроксимує отримані точки, визначає значення величини $h(q)$ для заданого значення q .

8. Виконавши кроки 2–6 для всіх заданих значень параметру q , отримуємо залежність $h(q)$.

9. Значення скейлінгової експоненти $\tau(q)$ визначаються за формулою (1.15); значення функції мультифрактального спектру $f(\alpha)$ знаходяться за допомогою перетворення Лежандра згідно (1.21).

4.3 Метод максимумів модулів вейвлет-перетворення

Метод максимумів модулів вейвлет-перетворення (ММВП) базується на математичному апараті вейвлет-аналізу [Muzy, 1991; Muzy, 1993]. Неперервне вейвлет-перетворення функції $X(t)$ має вигляд

$$W(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \psi_{ab}(t) dt, \quad (4.9)$$

де $\psi_{ab}(t)$ – вейвлет-функція з параметрами масштабу a і зсуву b .

Алгоритм ММВП передбачає дослідження поведінки функції $X(t)$ в два етапи. На першому етапі виконується вейвлет-перетворення за формулою (4.9). Результат вейвлет-перетворення – функція $W(a,b)$ – є вейвлет-спектром і може бути представлена як поверхня вейвлет-коефіцієнтів в тривимірному просторі. На рис. 4.7 вгорі наведена реалізація детермінованого біноміального каскаду при значенні вагового коефіцієнту $p_1 = 0.7$. У середній частині рис. 4.7 представлена поверхня вейвлет-коефіцієнтів $W(a,b)$ для даної реалізації. Найбільш важлива інформація міститься в лініях локальних екстремумів $W(a,b)$ (рис. 4.7 внизу), пошук яких проводиться на кожному масштабі a .

Вибір вейвлет-функції, яка має нульові моменти m -го порядку (3.7), визначається декількома аспектами. З одного боку, велике значення m дозволяє проігнорувати великомасштабні поліноміальні тренди і аналізувати дрібно-масштабні варіації функції $X(t)$. З іншого боку, збільшення числа нульових моментів призводить до збільшення числа ліній локальних екстремумів вейвлет-коефіцієнтів і появи великої кількості додаткових ліній, які обриваються на малих масштабах [Павлов, 2007]. Такі лінії є занадто короткими для оцінювання степеневих залежностей і стають перешкодами при проведенні чисельного аналізу сингулярностей.

Зазвичай в якості материнських вейвлет-функцій використовуються вейвлети сімейства Гаусса. Якщо взяті похідні вищого порядку функції Гаусса, то число додаткових коротких ліній локальних максимумів $W(a,t)$ зростає, що обумовлюється осцилюючими «хвостами» вейвлет-функцій. Тому при проведенні мультифрактального аналізу доцільно обмежуватися значенням $m = 2$ [Muzy, 1993].

Віділенням «скелетона» закінчується перший крок алгоритму ММВП. Другий крок методу ММВП полягає в розрахунку статистичної суми (часткової функції):

$$Z(q,a) = \sum_{l \in L(a)} \left(\sup_{a' \leq a} |W(a', x_l(a'))| \right)^q, \quad (4.10)$$

де $L(a)$ – множина всіх ліній та максимумів модулів вейвлет-коефіцієнтів на масштабі a ; $x_i(a)$ – розташування максимуму на цьому масштабі.

Для обчислення $Z(q, a)$ вибирається максимальне значення модуля вейвлет-коефіцієнтів уздовж кожної лінії на масштабах, менших заданого значення масштабу a . В цьому випадку виконується залежність

$$Z(q, a) \propto a^{\tau(q)}, \quad (4.11)$$

де $\tau(q)$ – скейлінгова експонента, яку визначають для кожного значення q шляхом обчислення тангенса кута нахилу $\ln Z(q, a)$ від $\ln a$.

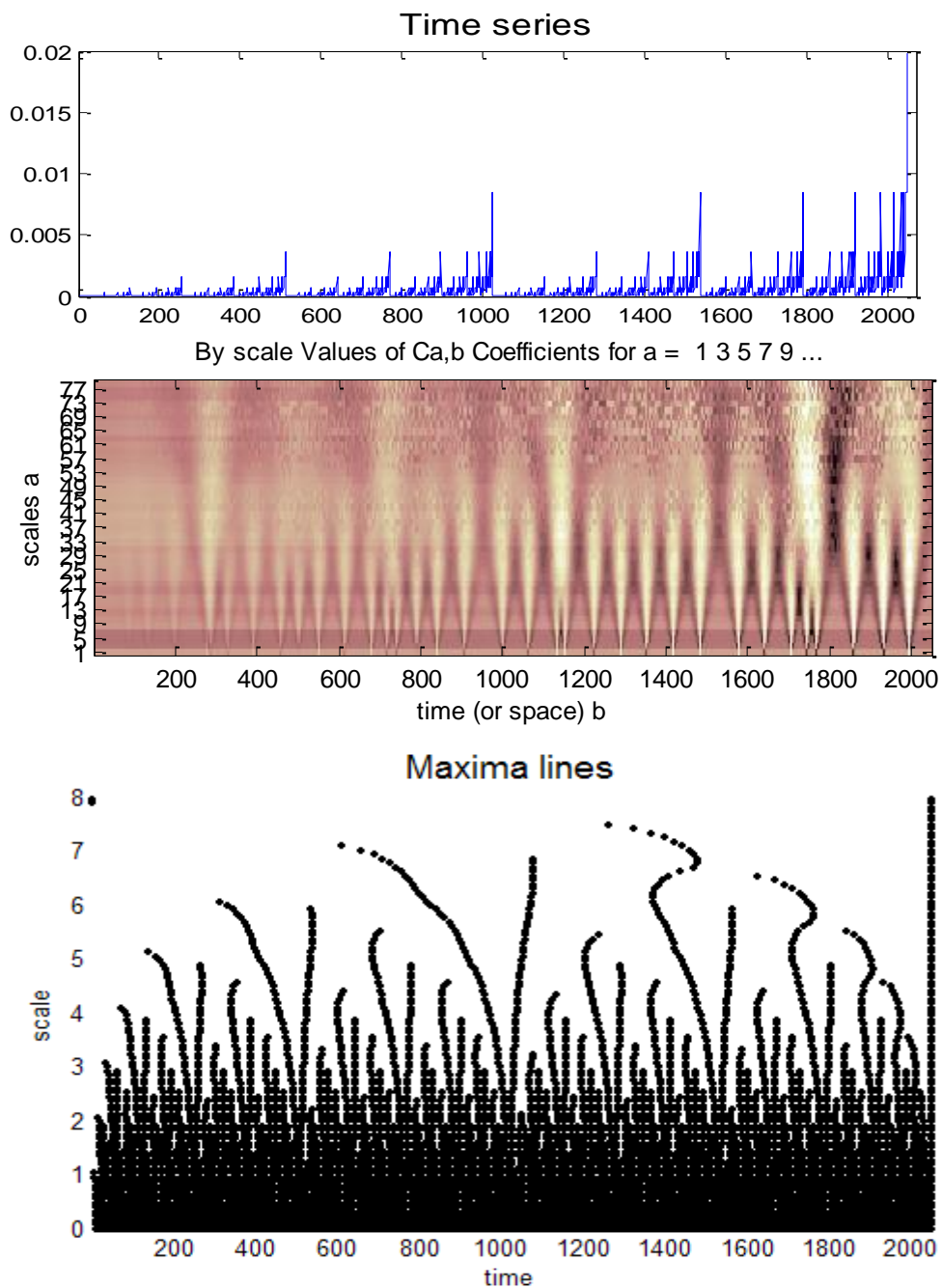


Рисунок 4.7 – Реалізація біноміального каскаду, поверхня вейвлет-коефіцієнтів, лінії локальних максимумів

Заснований на вейвлет-перетворенні мультифрактальний аналіз дозволяє досліджувати сингулярності при негативних значеннях q [Павлов 2007]. Часткові функції $Z(q, a)$ при $q < 0$ характеризують особливості скейлінгу для слабких сингулярностей (малих флуктуацій), а при $q > 0$ – для сильних сингулярностей (великих флуктуацій).

На рис. 4.8 (а) представлені статистичні суми $Z(q, a)$, які отримані за реалізаціями детермінованого каскаду при $p_1 = 0.8$ для значень $q = \{-5, -2, 0, 2, 5\}$. На рис. 4.8 (б) показані $\tau(q)$ для мультифрактальних (каскад, $p_1 = 0.8$) та монофрактальних (ФБР, $H = 0.8$) реалізацій.

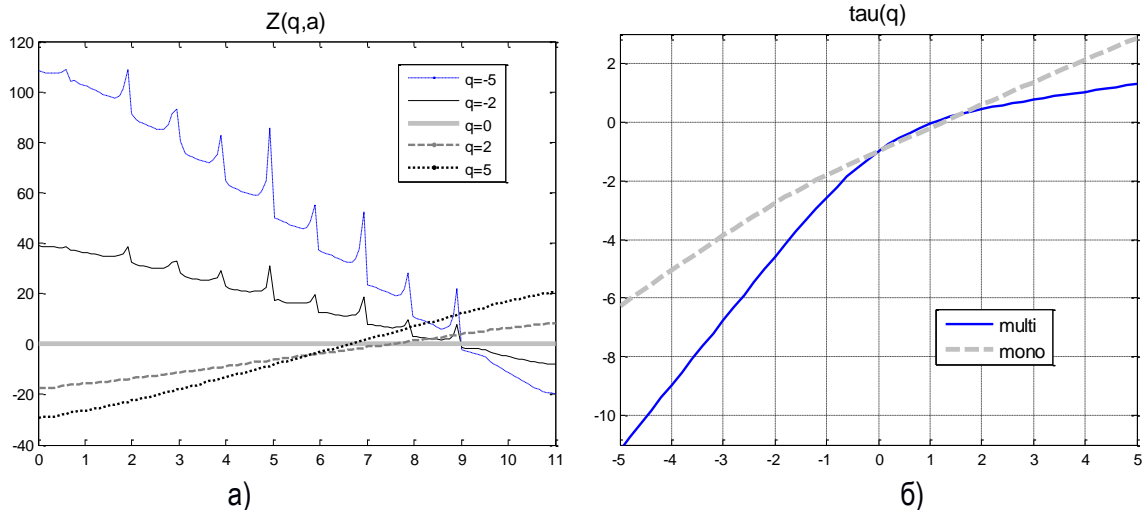


Рисунок 4.8 – Функції $Z(q, a)$ для детермінованого каскаду при різних q (а); функції $\tau(q)$ для монофрактальних і мультифрактальних реалізацій (б)

Можна запропонувати наступний покроковий алгоритм оцінювання мультифрактальних характеристик за часовим рядом $X(t)$, $t = 1, 2, \dots, n$.

1. Для розрахунку необхідно перетворити вхідний ряд в кумулятивний $X^{cum}(k) = \sum_{t=1}^k X(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Якщо вхідний ряд вже є кумулятивним, даний крок пропускається.
2. Для даного ряду виконується вейвлет-перетворення за формулою (4.10) і знаходиться спектр вейвлет-коефіцієнтів $W(a, b)$.
3. Для поверхні $W(a, b)$ визначається множина ліній локальних максимумів.
4. Задаються значення параметру q , в діапазоні яких потрібно знайти значення мультифрактальних характеристик $h(q)$, $\tau(q)$, $f(\alpha)$.
5. Відповідно до формули (4.10) обчислюється часткова функція $Z(q, a)$ для заданого значення q і заданих значень масштабу a .
6. Відповідно до (4.10) будується лінійна регресія $\log(a)$, як незалежної змінної, і $\log Z(q, a)$, як залежної змінної. Тангенс кута нахилу прямої, що апроксимує отримані точки, визначає значення величини $\tau(q)$ для заданого значення q .
5. Виконавши кроки 4–6 для всіх заданих значень параметру q , отримуємо значення скейлінгової експоненти $\tau(q)$.

7. Значення узагальненого показника Херста $h(q)$ визначаються за формулою (1.15); значення функції мультифрактального спектру $f(\alpha)$ знаходяться за допомогою перетворення Лежандра згідно (1.21).

4.4 Порівняльний аналіз оцінок мультифрактальних характеристик, отриманих різними методами

У роботах [Кириченко, 2011, 1; Кириченко, 2011, 2; Kirichenko, 2014] представлені результати чисельного експерименту, в ході якого моделювалися реалізації різних типів фрактальних випадкових процесів, які були наведені вище. Довжина реалізацій була обрана такій, що дорівнює 256, 512, 1024 і 2048 значень. Для кожного згенерованого часового ряду методами МФДФА і ММВП розраховувалися мультифрактальні характеристики $h(q)$, $\tau(q)$ і $f(\alpha)$, які потім усереднювалися за множиною реалізацій. Значення параметру q змінювалися в діапазоні $-5 \leq q \leq 5$. У роботах [Kantelhardt, 2008; Павлов, 2007] показано, що великі значення параметру q призводять до великих погрешностей.

Оскільки функції $h(q)$, $\tau(q)$ і $f(\alpha)$ взаємооднозначно пов'язані, для кількісного оцінювання степені близькості до теоретичних характеристик досить оцінки тільки за однією функцією узагальненого показника Херста $h(q)$:

$$\Delta h = \frac{1}{n_q} \sum_q \left| \hat{h}(q) - h_T(q) \right|, \quad (4.12)$$

де $h_T(q)$ – теоретичне значення функції узагальненого показника Херста; $\hat{h}(q)$ – вибіркоче значення функції; n_q – число значень параметру q ; Δh – середнє відхилення вибіркового значення від теоретичного.

Має сенс замість однієї величини Δh розглядати окремо кілька її складових, оскільки методи можуть мати різні похибки для позитивних і негативних значень параметру q : $\Delta h(q < 0)$, $\Delta h(q > 0)$. Оскільки значення $q = 0$ є точкою, що вимагає особливих варіантів обчислення $\hat{h}(q)$, відхилення в цій точці можна не враховувати. Також необхідно виділити величину

$$\Delta H = \left| \hat{h}(2) - h_T(2) \right|, \quad (4.13)$$

де величина ΔH представляє відхилення показника Херста.

4.4.1 Оцінювання монофрактальних реалізацій

Розглянемо оцінювання мультифрактальних характеристик для реалізацій монофрактального процесу, яким є ФБР.

Розглянемо вибіркочві мультифрактальні характеристики, отримані методом МФДФА за реалізаціями ФБР різної довжини. На рис. 4.9 представлені вибіркочві значення узагальненого показника Херста розрахованого відповідно до (4.5) і функції мультифрактального спектру, отриманої чисельно реалізованими перетвореннями Лежандра. Вибіркочві функції $\tau(q)$ візуально дуже близькі одна одній, тому їх графіки тут не наведено. Прямою лінією на графіку вибіркової функції $h(q)$ показані її

теоретичні значення. Хоча теоретичний мультифрактальний спектр $f(\alpha)$ являє собою точку $(0.8,1)$, вибірковий спектр $f(\alpha)$ демонструє мультифрактальні властивості.

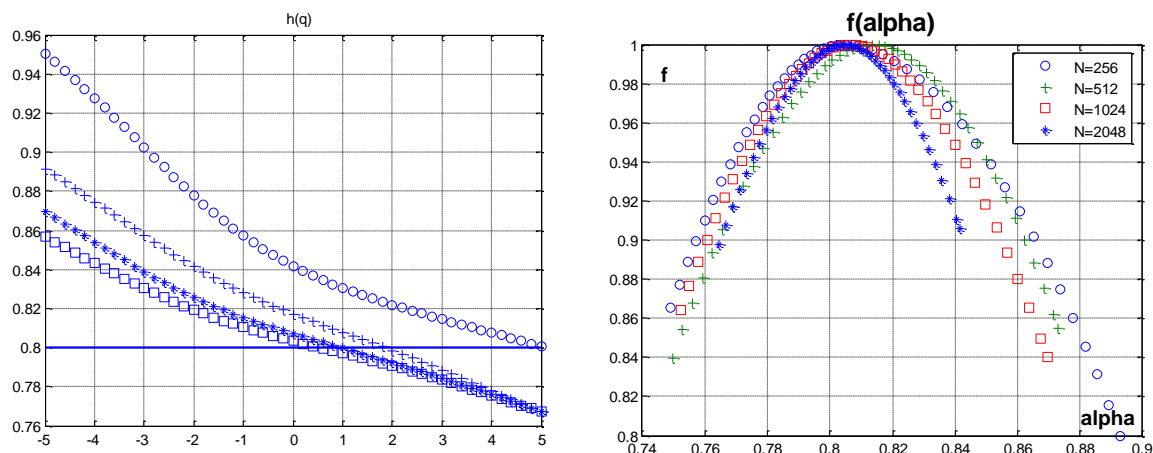


Рисунок 4.9 – Функції $h(q)$ і $f(\alpha)$, отримані методом МФДФА

На рисунку 4.10 представлені вибіркові значення функції узагальненого показника Херста і мультифрактального спектру, отримані за реалізаціями ФБР різної довжини методом ММВП.

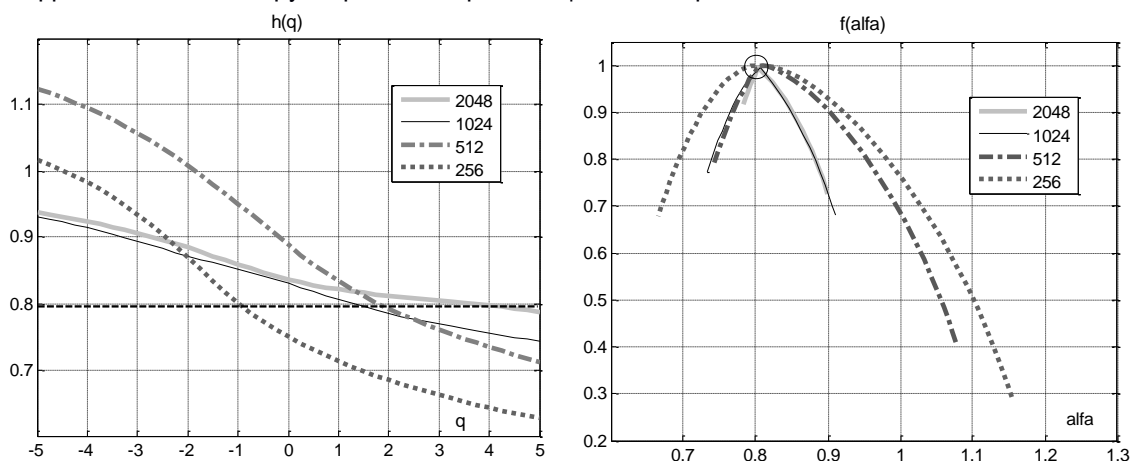


Рисунок 4.10 – Вибіркові функції $h(q)$ і $f(\alpha)$ для реалізацій ФБР, отримані методом ММВП

Зі збільшенням довжини реалізації вибіркові характеристики прагнуть до своїх теоретичних значень. Однак, при невеликому числі значень в часовому ряді, отримані оцінки характеристики демонструють неправдиві мультифрактальні властивості. Очевидно, що оцінки мультифрактальних характеристик, отримані методом МФДФА, значно ближче до своїх теоретичних значень, ніж оцінки, побудовані із застосуванням ММВП. До того ж, при використанні методу ММВП, побудова вейвлет-спектру, ліній локальних максимумів, вибір відповідного діапазону зміни масштабу вейвлет-перетворення, є значно складнішим завданням, ніж визначення ступені полінома і діапазону довжин сегментів для флуктуаційного аналізу.

У таблиці 4.1 наведені відхилення вибіркових функцій від теоретичних значень, які підтверджують переваги методу МФДФА при аналізі монофрактальних процесів.

4.4.2 Оцінювання біфрактальних реалізацій

Розглянемо вибіркові мультифрактальні характеристики, отримані методом МФДФА за реалізаціями α -стійкого процесу різної довжини. На рисунку 4.11 представлені вибіркові значення узагальненого показника Херста і функції мультифрактального спектру. Вибіркові функції $\tau(q)$ візуально дуже близькі одна одній, тому їх графіки тут не наведено. Пунктирною лінією на графіку вибіркової функції $h(q)$ показано теоретичне значення. Хоча теоретичний мультифрактальний спектр $f(\alpha)$ являє собою дві точки $(0,0)$ і $(2/3,1)$, вибірковий спектр $f(\alpha)$ демонструє мультифрактальні властивості.

Таблиця 4.1 – Відхилення вибірових функцій для монофрактальних реалізацій

Довжина ряду	Метод	ΔH	$\Delta h (q < 0)$	$\Delta h (q > 0)$
256	ММВП	0.12	0.18	0.13
	МФДФА	0.02	0.094	0.018
512	ММВП	0.008	0.3	0.026
	МФДФА	0.004	0.06	0.015
1024	ММВП	0.028	0.27	0.023
	МФДФА	0.0077	0.035	0.014
2048	ММВП	0.01	0.15	0.007
	МФДФА	0.009	0.025	0.014

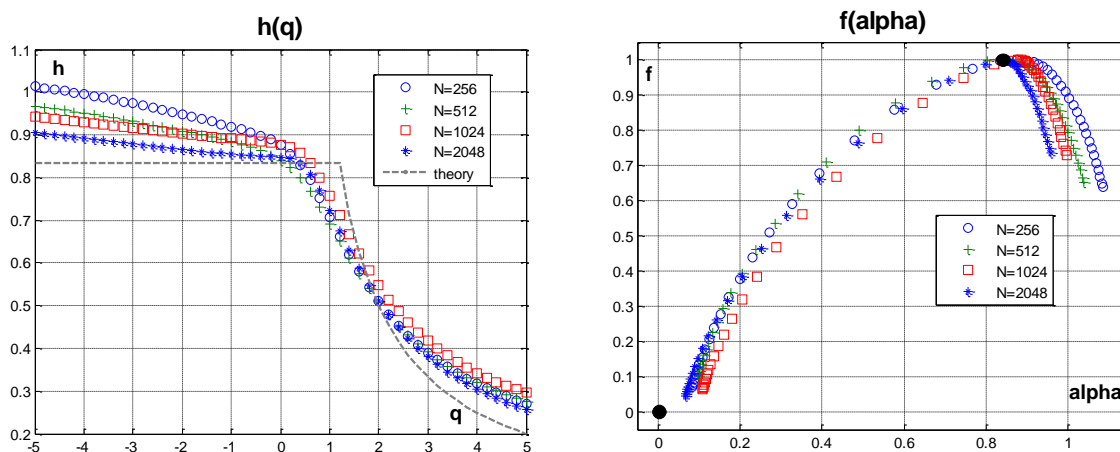


Рисунок 4.11 – Вибіркові функції $h(q)$ і $f(\alpha)$ для реалізацій α -стійкого процесу, отримані методом МФДФА

На рисунку 4.12 представлені вибіркові значення функції узагальненого показника Херста і мультифрактального спектру, отримані за реалізаціями α -стійкого процесу різної довжини методом ММВП. Зі збільшенням довжини реалізації вибіркові характеристики прагнуть до своїх теоретичних значень. Однак, отримані оцінки характеристики демонструють неправдиві мультифрактальні властивості. В спектрі $f(\alpha)$, як і в разі оцінювання характеристик для ряду броунівського руху, характерна наявність помилкових точок, що може привести до неправильних висновків щодо мультифрактальних властивостей реалізацій. Оцінки мультифрактальних характеристик, отримані

методом МФДФА, ближче до своїх теоретичних значень, ніж оцінки, побудовані із застосуванням ММВП, про що свідчать дані таблиці 4.2.

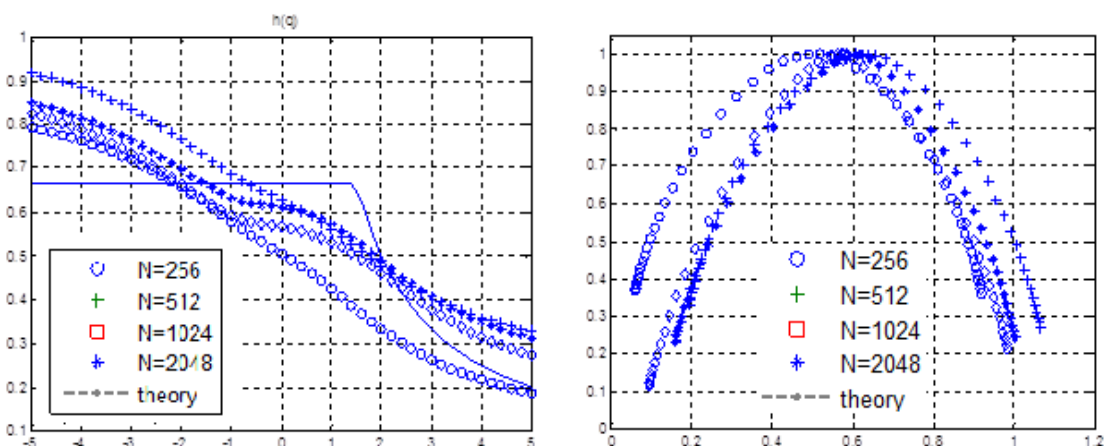


Рисунок 4.12 – Вибіркові функції $h(q)$ і $f(\alpha)$ для реалізацій α -стійкого процесу, отримані методом ММВП

У таблиці 4.2 наведені відхилення вибірових функцій від теоретичних значень, які підтверджують більшу точність методу МФДФА при аналізі процесів з дискретним фрактальним спектром. Результати обчислень підтверджують результати, отримані в роботах [Kantelhardt, 2002; Oswiecimka, 2006] для реалізацій довжиною понад 60000 значень.

Таблиця 4.2 – Відхилення вибірових функцій для біфрактальних реалізацій

Довжина ряду	Метод	ΔH	$\Delta h (q < 0)$	$\Delta h (q > 0)$
256	ММВП	0.167	0.076	0.12
	МФ ДФА	0.001	0.096	0.056
512	ММВП	0.025	0.13	0.086
	МФ ДФА	0.004	0.064	0.058
1024	ММВП	0.076	0.08	0.07
	МФ ДФА	0.011	0.057	0.05
2048	ММВП	0.006	0.08	0.07
	МФ ДФА	0.003	0.054	0.041

4.4.3 Оцінювання реалізацій детермінованого біноміального каскаду

Розглянемо оцінювання мультифрактальних характеристик для реалізацій детермінованого мультиплікативного біноміального каскаду. На відміну від реалізацій інших випадкових процесів, де для кожної згенерованої реалізації розраховувались вибіркові характеристики, які потім усереднювались, в цьому випадку оцінки не усереднювались: для кожної реалізації тільки один набір мультифрактальних характеристик, отриманих різними методами.

Розглянемо вибіркові мультифрактальні характеристики, отримані методом МФДФА за реалізаціями детермінованого каскаду з початковим ваговим коефіцієнтом $p_1=0.7$ різної довжини. На рис. 4.13 представлені вибіркові значення узагальненого показника Херста і функції

мультифрактального спектру. Пунктирною лінією на графіку вибірових функцій $h(q)$ і $f(\alpha)$ показані їх теоретичні значення.

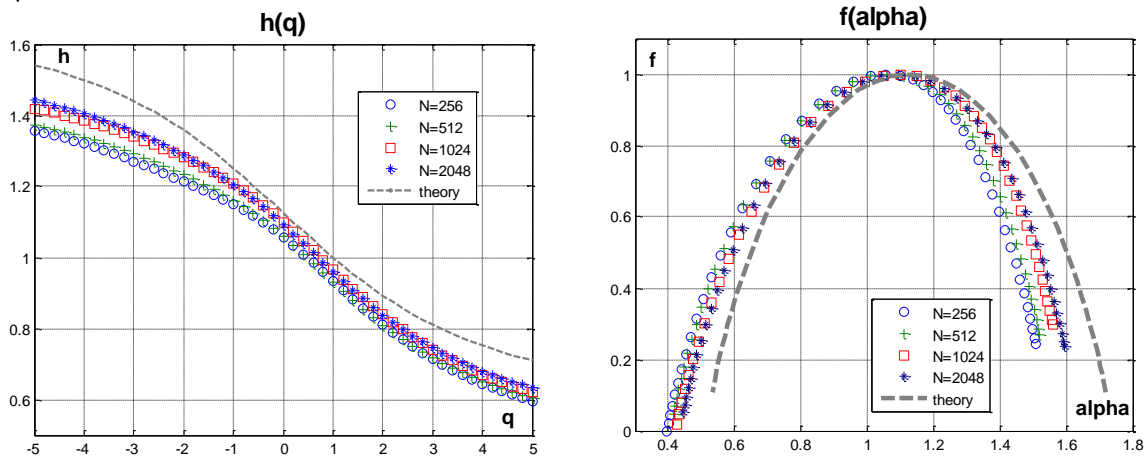


Рисунок 4.13 – Вибіркові функції $h(q)$ і $f(\alpha)$ для реалізацій детермінованого біноміального каскаду, отримані методом МФДФА

При оцінюванні рядів з мультифрактальними властивостями метод ММВП дозволяє отримати оцінки, кращі за своїми статистичними характеристиками чим оцінки, отримані методом МФДФА (в сенсі більшої близькості до теоретичних значень). Це очевидно при порівнянні рис. 4.13 і рис. 4.14, де представлені вибірові функції, одержані за допомогою неперервного вейвлет–перетворення, а так само при порівнянні величин відхилень оцінок від теоретичних значень, наведених у таблиці 4.3.

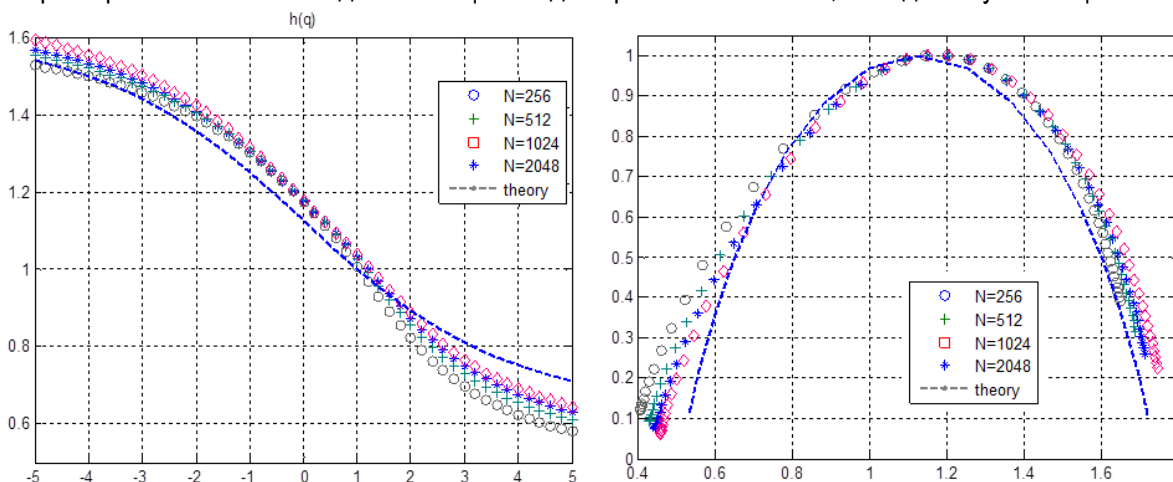


Рисунок 4.14 – Вибіркові функції $h(q)$ і $f(\alpha)$ для реалізацій детермінованого біноміального каскаду, отримані методом ММВП

При невеликому числі значень в часовому ряді його вибірові фрактальні характеристики демонструють зміщення діапазону значень. В обох випадках зі збільшенням довжини реалізації вибірові характеристики прагнуть до своїх теоретичних значень. Необхідно відзначити, що характеристики, отримані на основі методу ММВП, дуже чутливі до зміни масштабу діапазону вейвлет-перетворення, в той час як метод флуктуаційного аналізу дозволяє отримувати стійкі оцінки.

У таблиці 4.3 наведені відхилення вибірових функцій від теоретичних значень, які показують певні переваги методу, заснованого на вейвлет-перетвореннях, при аналізі процесів з неперервним мультифрактальним спектром.

Таблиця 4.3 – Відхилення вибірових функцій для реалізацій детермінованого каскаду

довжина ряду	метод	ΔH	$\Delta h (q < 0)$	$\Delta h (q > 0)$
256	ММВП	0.07	0.026	0.084
	МФДФА	0.24	0.27	0.23
512	ММВП	0.039	0.037	0.064
	МФДФА	0.17	0.15	0.17
1024	ММВП	0.02	0.043	0.051
	МФДФА	0.14	0.12	0.13
2048	ММВП	0.006	0.059	0.042
	МФДФА	0.12	0.06	0.11

4.4.4 Оцінювання реалізацій стохастичного біноміального каскаду

Розглянемо оцінювання мультифрактальних характеристик для реалізацій стохастичних мультиплікативних біноміальних каскадів, вагові коефіцієнти яких мають рівномірний розподіл. Для порівняння з аналітичними характеристиками (4.4) обчислення проводилися в діапазоні значень параметру $-1 < q < 5$.

На рисунку 4.15 представлені вибірові значення узагальненого показника Херста і функції мультифрактального спектру, отримані методом МФДФА за реалізаціями стохастичного каскаду різної довжини. Пунктирною лінією на графіку вибірових функцій $h(q)$ і $f(\alpha)$ показані їх теоретичні значення. Оцінки показують гарну узгодженість з теоретичними значеннями в області позитивних значень параметру q . Чисельні значення розбіжностей наведені в таблиці 4.4. Оскільки негативні значення параметру q обмежені діапазоном $-1 < q < 0$, права частина мультифрактального спектру $f(\alpha)$ представлена недостатньо повно.

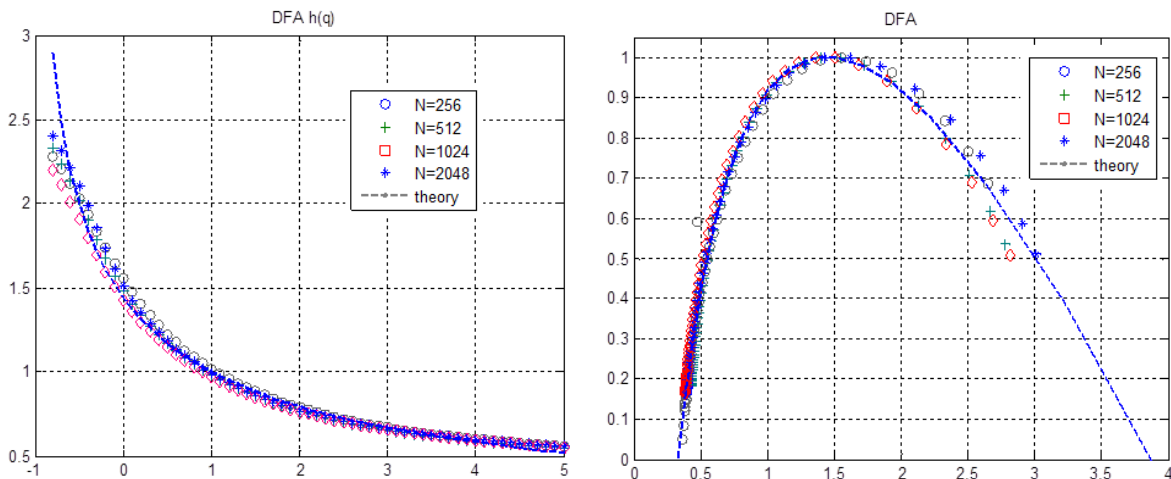


Рисунок 4.15 – Вибіркові функції $h(q)$ і $f(\alpha)$ для реалізацій стохастичного біноміального каскаду, отримані методом МФДФА

При оцінюванні рядів стохастичних мультифрактальних каскадів метод ММВП показав оцінки, які набагато поступають за своїми статистичними властивостями оцінкам, отриманим методом МФДФА в сенсі більшої близькості до теоретичних значень. Це очевидно при порівнянні рисунків 4.15 і 4.16, де

представлені вибіркові функції, а так само при порівнянні величин відхилень оцінок від теоретичних значень, наведених у таблиці 4.4.

Результати численних досліджень показують, що характеристики, отримані методом ММВП, менш стійкі і мають більший розкид значень. Однак, вивчення вейвлет-спектру і ліній локальних максимумів досліджуваного фрактального часового ряду дозволяє зробити додаткові висновки про локальні особливості структури ряду і поліпшити вибіркові характеристики. Таким чином, при дослідженні невідомого часового ряду, метод МФДФА повинен бути використаний в першу чергу, а потім мультифрактальна структура може бути досліджена більш детально методом ММВП.

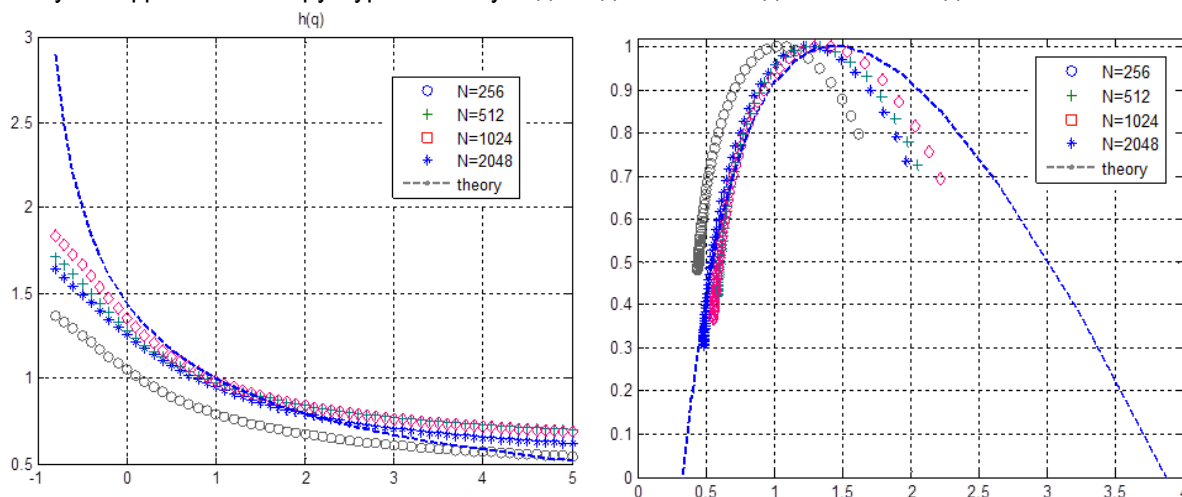


Рисунок 4.16 – Вибіркові функції $h(q)$ і $f(\alpha)$ для реалізацій стохастичного біноміального каскаду, отримані методом ММВП

У таблиці 4.4 наведені відхилення вибірових функцій від теоретичних значень, які показують певні переваги методу МФДФА, при аналізі процесів з неперервним мультифрактальним спектром.

Таблиця 4.4 – Відхилення для реалізацій стохастичного каскаду

Довжина ряду	Метод	ΔH	$\Delta h (q < 0)$	$\Delta h (q > 0)$
256	ММВП	0.12	0.8	0.11
	МФДФА	0.007	0.18	0.023
512	ММВП	0.045	0.5	0.09
	МФДФА	0.029	0.14	0.012
1024	ММВП	0.003	0.56	0.057
	МФДФА	0.015	0.16	0.017
2048	ММВП	0.04	0.4	0.081
	МФДФА	0.029	0.18	0.02

На рис. 4.17 представлені усереднені вибіркові функції $h(q)$, отримані методами МФДФА і ММВП для реалізацій фрактального броунівського руху (а) і детермінованого мультифрактального каскаду (б). Довжина реалізацій становить 1024 відліків.

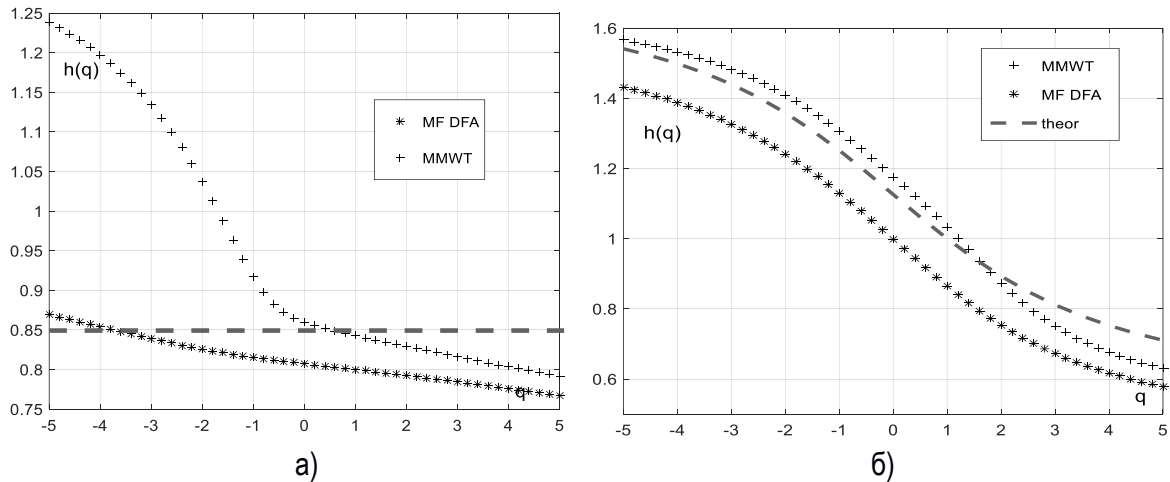


Рисунок 4.17– Вибіркові функції $h(q)$ для монофрактальних (а) і мультифрактальних реалізацій (б)

4.5 Визначення властивостей монофрактальності і мультифрактальності за вибірковими фрактальними характеристиками

Наведені вище результати мультифрактального аналізу модельних часових рядів демонструють необхідність розробки інструменту, який дозволяє розрізнити моно- і мультифрактальні реалізації. В роботі [Kirichenko, 2014] пропонується метод, що дозволяє приймати або відкидати гіпотезу про наявність монофрактальних властивостей ряду на основі дослідження вибірових значень узагальненого показника Херста, отриманих методом МФДФА.

Для самоподібних процесів питання про закон розподілу оцінок H було розглянуто в ряді робіт, де було показано, чисельно або аналітично, що оцінки є нормальними випадковими величинами. У роботі були досліджені закони розподілу оцінок $h(q)$ при різних значеннях параметру q . Проведений аналіз вибірових законів розподілу $h(q)$ показав, що при $q > 0$ оцінки $h(q)$ мають нормальний розподіл, параметри якого залежать від значення q . Для $q < 0$ вибірові значення узагальненого показника Херста в загальному випадку не є нормально розподіленими. На рис. 4.18 представлені значення функції $h(q)$ ($0 \leq q \leq 5$) та гістограми значень оцінок $h(q)$, отримані за реалізаціями довжиною 1024 значень для $q=1$ та $q=5$. Вгорі наведені результати для реалізацій ФБР з параметром Херста $H = 0.8$, внизу – для реалізацій біноміального стохастичного бета-каскаду при значенні $\alpha = 1$.

Очевидно, що мультифрактальні процеси мають набагато більший перепад значень $\Delta h = h(q_1) - h(q_2)$. Випадкова величина Δh при $q > 0$ має нормальний розподіл $N(m_h, s_h)$, параметри якого залежать від довжини реалізації та обраних значень величини q . Запропонований в роботі критерій розглядає величину $\Delta h = h(0.1) - h(5)$. Шляхом чисельного моделювання монофрактальних процесів з різним ступенем самоподібності були отримані вибірові значення m_h та s_h для рядів довжини N , представлені в таблиці 4.5. Там же наведені аналогічні показники, розраховані за реалізаціями каскадних процесів з різним ступенем неоднорідності, що задається параметром бета-розподілу α .

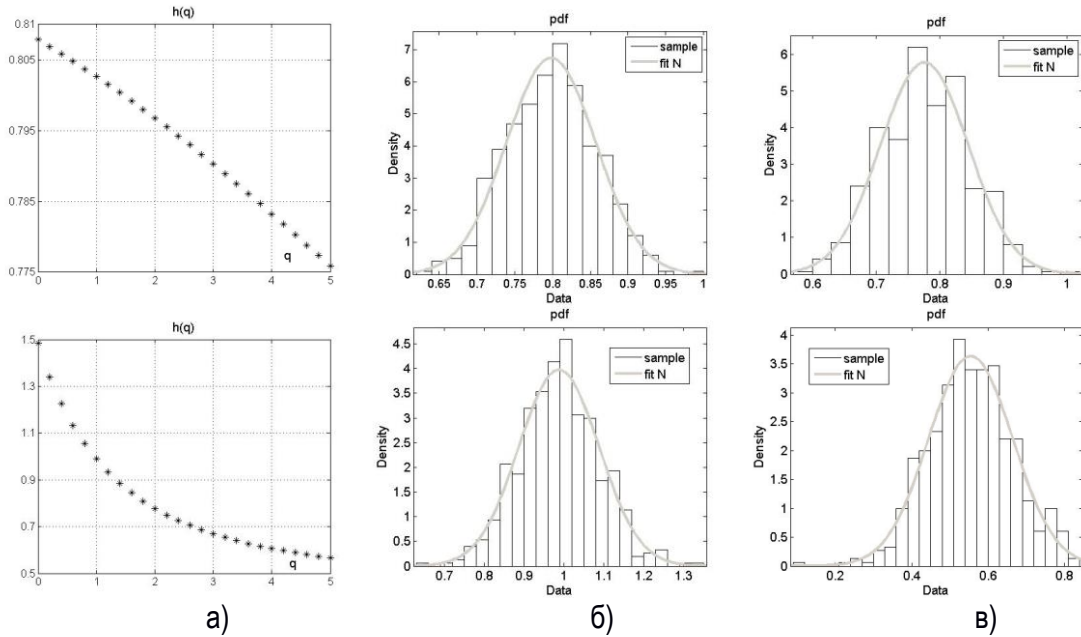


Рисунок 4.18 – Вибіркові функції $h(q)$ (а); вибіркові щільності розподілів $h(q)$ при $q=1$ (б) і $q=5$ (в) для реалізацій ФБР і реалізацій стохастичного каскаду

Таблиця 4.5 – Середнє значення і середньоквадратичне відхилення випадкової величини

Δh

	N = 256		N = 512		N = 1024		N = 2048	
	m_h	s_h	m_h	s_h	m_h	s_h	m_h	s_h
ФБР	0.075	0.052	0.05	0.038	0.035	0.026	0.03	0.022
каскад								
a = 1	0.87	0.23	0.86	0.18	0.85	0.16	0.82	0.12
a = 5	0.32	0.13	0.29	0.095	0.28	0.08	0.27	0.07
a = 10	0.23	0.1	0.2	0.07	0.18	0.06	0.17	0.05

З таблиці видно, що навіть при дуже слабких мультифрактальних властивостях процесу можна розрізнити моно- і мультифрактальні реалізації. Таким чином, значення випадкової величини Δh можна використовувати в якості статистичного критерію для прийняття або відкидання гіпотези про наявність монофрактальних властивостей часових рядів. В даному випадку нульовою гіпотезою є припущення про монофрактальність ряду з деяким заданим рівнем значущості α . Отримавши оцінку функції $\hat{h}(q)$ методом МДФА, обчислюється величина $\Delta \hat{h} = \hat{h}(0.1) - \hat{h}(5)$. Гіпотеза приймається з рівнем значущості α , якщо отримане значення потрапляє в область допустимих значень

$$m_h(N) - t_\alpha s_h(N) < \Delta \hat{h} < m_h(N) + t_\alpha s_h(N),$$

де N – довжина реалізації; m_h та s_h – відповідні значення, розраховані для монофрактального процесу; α – рівень значущості; t_α – квантиль стандартного нормального розподілу.

4.6 Комплексний підхід до оцінювання мультифрактальних властивостей часових рядів малої довжини

Підводячи підсумки досліджень, представлених в 3-му і 4-му розділах, можна запропонувати наступну схему проведення мультифрактального аналізу деякого випадкового процесу, представленого часовим рядом довжини N . Оскільки для застосування апарату вейвлет-перетворень необхідне відповідне програмне забезпечення та досвід роботи, можна обмежитися методом МФДФА.

1. Попереднє дослідження структури часового ряду є необхідним етапом мультифрактального аналізу, повний його опис наведено в розділі 3. В цей етап входить: визначення інтервалів різних скейлінгів, що проводиться за допомогою побудови залежності $H(\tau) = f[\log \frac{R}{S}(\tau)]$ або флуктуаційної функції $F_{DFA}(\tau)$; виявлення і видалення короткострокової авторегресійної залежності; перевірка гіпотези про наявність самоподібних властивостей в широкому сенсі.

2. Обидва розглянутих методи призначені для роботи з нестационарними рядами. Але перш ніж приступити до оцінювання мультифрактальних властивостей, необхідно досліджувати структуру ряду за допомогою побудови кореляційної функції (спектральної щільності) і спектра вейвлет-енергії, які дозволяють виявити трендові і циклічні складові ряду.

3. При оцінюванні узагальненого показника Херста методом МФДФА, необхідно спочатку провести приблизні оцінювання показника Херста $h(2)$, використовуючи локальні поліноми степені, що збільшується, і визначити найменший ступінь полінома, починаючи з якого оцінка показника Херста перестає змінюватися. Після цього проводити оцінювання функції $h(q)$, видаляючи локальний поліноміальний тренд знайденої степені. Покроковий алгоритм оцінювання мультифрактальних характеристик часового ряду методом МФДФА наведено в 4.2.

4. При оцінюванні скейлінгової експоненти методом ММВП, необхідно спочатку вибрати відповідний діапазон масштабу $a_1 \leq a \leq a_2$, на якому визначаються лінії локальних екстремумів функції $W(a, b)$. Правильний вибір діапазону масштабу дозволяє не враховувати вплив трендових компонент ряду. Потім треба провести приблизні оцінювання часткової функції $Z(q, a)$, щоб переконатися в наявності інтервалів лінійної залежності $\log Z(q, a)$ від $\log a$. Покроковий алгоритм оцінювання мультифрактальних характеристик часового ряду методом ММВП наведено в 4.3.

5. При слабовиражених мультифрактальних властивостях необхідно перевірити гіпотезу про наявність монофрактальних властивостей часових рядів. Статистичний критерій розглянуто в підрозділі 4.5.

6. Отримати окремо інтервальну оцінку показника Херста $h(2)$.

7. Якщо оцінки мультифрактальних характеристик були отримані різними методами, то для збільшення точності необхідно провести їх порівняльний аналіз з урахуванням апріорної інформації про характеристики досліджуваного часового ряду і результатів чисельних досліджень підрозділу 4.4.

Висновки за розділом 4

1. Розглянуто математичні моделі різних типів фрактальних випадкових процесів: монофрактальні, біфрактальні і мультифрактальні та їх теоретичні фрактальні характеристики.

Показано, що дані моделі можна використовувати для тестування методів оцінювання мультифрактальних характеристик за часовими рядами малої довжини.

2. Досліджено особливості чисельної реалізації методів мультифрактального аналізу, побудованих на основі детрендованого флуктуаційного аналізу і максимумів модулів неперервного вейвлет-перетворення.

3. Проведено тестування кожного методу на реалізаціях фрактальних процесів різних типів. Чисельно показано, що мультифрактальні характеристики (узагальнений показник Херста, скейлінгова експонента, функція мультифрактального спектру), отримані за вибірками кінцевої довжини, мають зміщення, яке зменшується зі збільшенням довжини вибірки. Показано, що метод мультифрактального детрендованого флуктуаційного аналізу має значні переваги в точності при оцінюванні характеристик процесів з дискретним мультифрактальним спектром.

4. Розроблено метод, що дозволяє приймати або відкидати гіпотезу про наявність монофрактальних властивостей ряду на основі дослідження вибірових значень узагальненого показника Херста, отриманих методом мультифрактального детрендованого флуктуаційного аналізу.

5. Розроблено комплексний підхід до оцінювання мультифрактальних характеристик часових рядів і запропоновані практичні рекомендації щодо реалізації даного підходу.

Література до розділу 4

- [Kantelhardt, 2002] Kantelhardt, J.W., Zschiegner, S.A., Bunde, A., Havlin, S., Koscielny-Bunde, E., Stanley, H.E. Multifractal detrended fluctuation analysis of non-stationary time series. *Physica A.*, № 316, 2002. pp. 87–114.
- [Kantelhardt, 2008] Kantelhardt, J. W. Fractal and Multifractal Time Series. [Электронный ресурс]: 2008.– Режим доступа: <http://arxiv.org/abs/0804.0747>.
- [Kirichenko, 2014] Kirichenko, L. The method of distinction monofractal and multifractal process from time series. *Системні технології*, №6 (95), 2014. С. 121-127.
- [Muzy, 1991] Muzy, J.F., Bacry, E., Arneodo, A. Wavelets and Multifractal Formalism for Singular Signals: Application to Turbulence Data. *Physical review letters.*, Vol. 67, 1991. pp. 3515–3518.
- [Muzy, 1993] Muzy, J.F., Bacry, E., Arneodo, A. Multifractal formalism for fractal signals: the structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method. *Phys. Rev. E.*, Vol. 47, 1993. pp. 3515–3518.
- [Nakao, 2000] Nakao H Multi-scaling properties of truncated Levy flights. *Phys. Lett. A.*, Vol. 266, 2000. pp. 282–289.
- [Oswiecimka, 2006] Oswiecimka, P., Kwapien, J., Drozd, S. Wavelet versus detrended fluctuation analysis of multifractal structures. *Physical Review E: Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, Vol. 74, 2006. pp. 161-203.
- [Riedi, 2002] Riedi, R.H. Multifractal processes, in Doukhan P., Oppenheim G., Taqqu M.S. (Eds.), *Long Range Dependence: Theory and Applications*, Birkhuser, 2002. pp. 625–715.
- [Кириченко, 2011, 1] Кириченко, Л. О. Исследование выборочных характеристик, полученных методом мультифрактального флуктуационного анализа. *Вісник НТУУ «КПІ». Інформатика, управління та обчислювальна техніка: зб. наук. пр.*, № 54, 2011. С.101–111.
- [Кириченко, 2011, 2] Кириченко, Л. О. Сравнительный мультифрактальный анализ временных рядов методами детрендированного флуктуационного анализа и максимумов модулей вейвлет-преобразования. *Автоматизированные системы управления и приборы автоматики*, № 157, 2011. С.66–77.
- [Павлов, 2007] Павлов, А. Н., Анищенко, В. С. Мультифрактальный анализ сигналов на основе вейвлет-преобразования. *Известия Саратовского университета. Сер. Физика*, Т. 7, Вып. 1, 2007. С.1–18.

РОЗДІЛ 5

ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ РЕАЛЬНИХ ДАНИХ

Розроблені методи дослідження самоподібних і мультифрактальних процесів можуть бути використані для моделювання та аналізу технічних, економічних і інших систем, що мають самоподібні та мультифрактальні властивості, моніторингу, діагностики і прогнозування критичних явищ для часових рядів різної природи. В даному розділі представлено практичне застосування запропонованих методів і моделей в області телекомунікаційних систем, фінансових ринків, біомедичних сигналів, соціальних мереж і деяких природних явищ.

5.1 Оцінювання показника Херста за часовими рядами

У багатьох випадках основна динаміка системи повністю визначається однією характеристикою самоподібності – показником Херста. У цьому розділі наведені результати фрактального аналізу, пов'язані з оцінюванням показника Херста для часових рядів різної природи.

5.1.1 Дослідження самоподібних властивостей реалізацій інфокомунікаційних трафіків

Численні дослідження процесів в мережі Інтернет показали, що статистичні характеристики трафіку мають властивість часової масштабної інваріантності (самоподібності) [Leland, 1994; Willinger, 1996; Crovella, 1997; Park, 2000; Ryu, 2001; Sheluchin, 2007; Шелухин, 2011]. Причина такого ефекту – в особливостях розподілу файлів по серверам, їх розмірах, а також в типовій поведінці користувачів. Виявилось, що потоки даних, які з самого початку не проявляють властивостей самоподібності, але, пройшовши обробку на вузлових серверах і активних мережевих елементах, починають подавати яскраво виражені ознаки самоподібності. Самоподібний трафік має особливу структуру, що зберігається на багатьох масштабах – в реалізації завжди присутня деяка кількість дуже великих викидів при відносно невеликому середньому рівні трафіку. Ці викиди викликають значні затримки і втрати пакетів, навіть коли сумарна потреба всіх потоків далека від максимально допустимих значень. У класичному випадку для пуассонівського вхідного потоку буде досить буферів помірного розміру: черга може утворюватися в короткостроковій перспективі, але за довгий період часу буфери очистяться. Однак при самоподібному навантаженні утворюються черги набагато більшої довжини, що призводить до перевантаження мережі [Мітіліно, 2001].

В роботі [Кириченко, 2006] розглянуто ряд реалізацій мережевого трафіку протоколу TCP. На рис. 5.1 представлена типова реалізація трафіку, агрегована за різними рівнями (1.8). Очевидно, що структура часового ряду при агрегуванні зберігається.

На рис. 5.2 представлені три фрагменти типових реалізацій реального мережевого трафіку, що демонструють властивості самоподібності і довгострокової залежності. Дві реалізації (TCP-1.1, TCP-1.2) були отримані при аналізі трафіку одного протоколу (TCP) в одній і тій мережі в різний час з різним рівнем навантаження мережі. Реалізація TCP/Voip-1 є трафіком протоколів TCP і Voip і отримана в іншій мережі. Для проведення досліджень використовувалися часові ряди довжиною 3000 значень, отримані при рівні агрегації 15 сек.

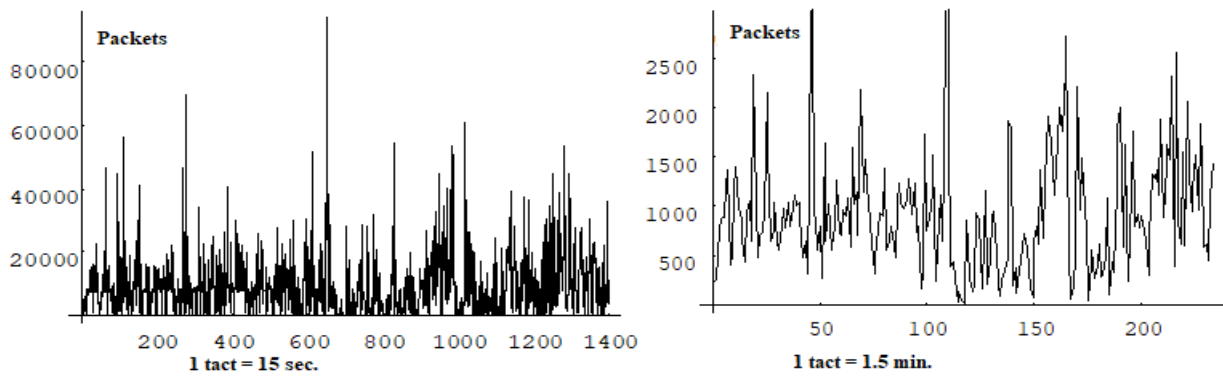


Рисунок 5.1 – Часова реалізація трафіку, агрегована за рівнем 15 сек. і 1,5 хв.

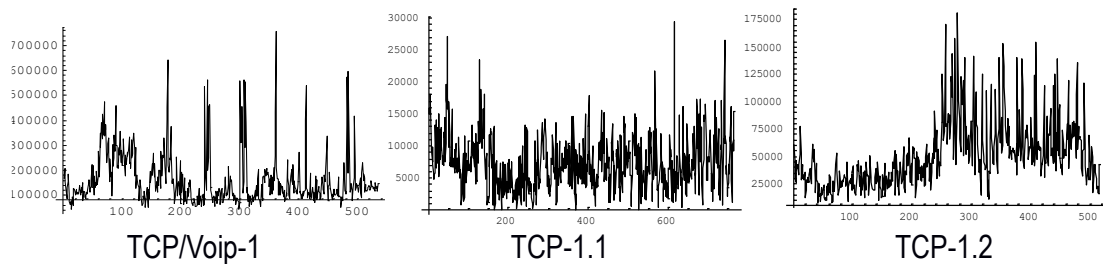


Рисунок 5.2 – Реалізації трафіків

R/S-аналіз змінювання показника Херста, представлений на рис. 5.3, показав наступні характерні особливості реалізацій:

- Довгострокову залежність. Параметр Херста у всіх випадках значно більше 0,5.
- Відсутність циклічних складових для реалізацій TCP-1.1 і TCP-1.2. У разі TCP/Voip-1

простежується наявність нерегулярного циклу періодом $n \approx 80$, що відповідає характерним сплескам на часовій реалізації.

– Короткострокову залежність. У всіх досліджуваних реалізаціях була виявлена сильна авторегресійна залежність. Після видалення короткострокової залежності показники Херста зменшилися, залишаючись при цьому більше 0,5. Таким чином, можна зробити висновок, що реалізації мають істинну довгострокову залежність.

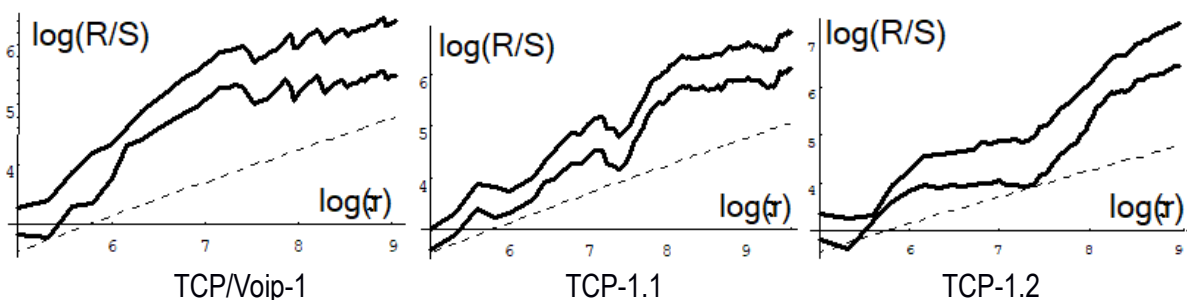


Рисунок 5.3 – Лінія 1: початковий процес, лінія 2: процес з видаленою короткостроковою залежністю.

У таблиці 5.1 наведені значення параметра Херста до і після видалення короткострокової залежності, а також коефіцієнти авторегресії 1-го порядку для розглянутих реалізацій.

5.1.2 Дослідження фрактальних властивостей нестационарних кумулятивних часових рядів з декількома циклічними складовими і наявністю короткострокової залежності

В роботі [Дейнеко, 2010] запропоновано метод дослідження фрактальної структури для кумулятивних рядів зі стаціонарними приростами, що мають декілька циклічних компонентів різних періодів і можливу короткострокову залежність. Такі ряди породжуються різними економічними і фінансовими процесами.

Таблиця 5.1 – Значення параметра Херста до і після видалення короткострокової залежності і коефіцієнти авторегресії

Реалізації трафіку	Початковий H	H без короткострокової залежності	Коефіцієнти авторегресії
TCP/Voip-1	0.72	0.61	0.6
TCP-1.1	0.8	0.73	0.41
TCP-1.2	0.98	0.95	0.55

Продемонструємо застосування даного методу на прикладі ряду добового споживання електроенергії за період з 06.01.2003 року по 06.01.2010 року, який містить 2554 значення (рисунки 5.4). Спостерігаючи часову реалізацію, відразу можна відзначити яскраво виражену сезонність зима – літо, наявність тенденції зростання споживання електрики до 2009 року і різке зменшення кількості на початку 2009 року, який відповідає світовій фінансовій кризі.

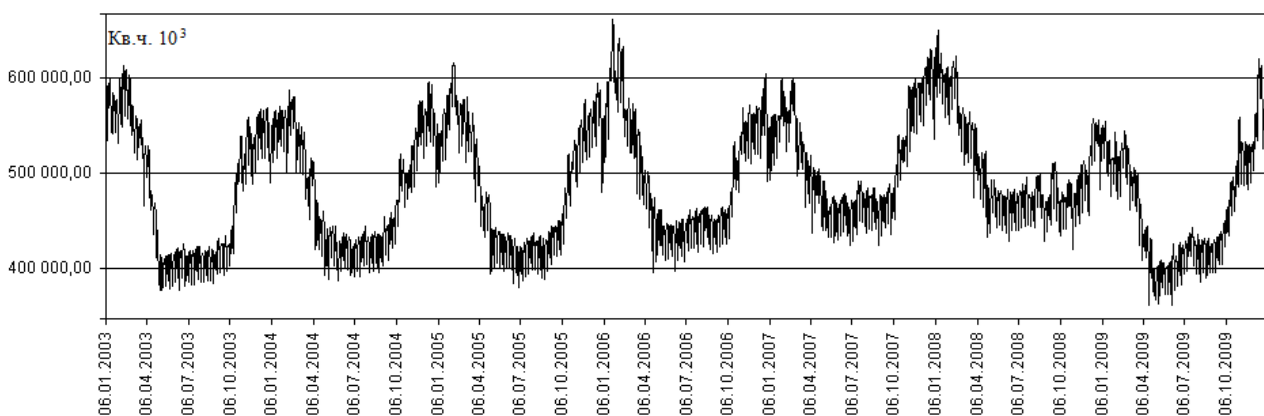


Рисунок 5.4 – Динаміка добового споживання електроенергії в Україні

Почнемо дослідження структури ряду споживання електроенергії (e/e) з побудови ряду 1-ої різниці $D(-1)$. Процедура взяття 1-ої різниці рівноцінна видаленню авторегресійної залежності і лінійного тренду і часто дозволяє отримати ряд, стаціонарний в широкому сенсі. Автокореляційна функція даного ряду, показана на рисунку 5.5 зліва, демонструє сплески, які відповідають семиденній періодичності. Тижнева циклічність природна для споживання електрики.

Проведемо R/S-аналіз зміни показника Херста $H(n)$ в залежності від довжини n часового ряду $D(-1)$. Графік в подвійному логарифмічному масштабі для R/S-аналізу показаний на рис. 5.5 справа. На графіку R/S-залежності ясно видно цикли, відповідні щомісячній повторюваності. Прямою лінією показано ділянку, на якій простежується довгострокова залежність з показником Херста $H=0,54$. Починаючи зі значення $n \approx 365$, яке відповідає річному циклу, R/S-залежність демонструє періодичні складові, які відповідають сезонним циклам різної довжини.

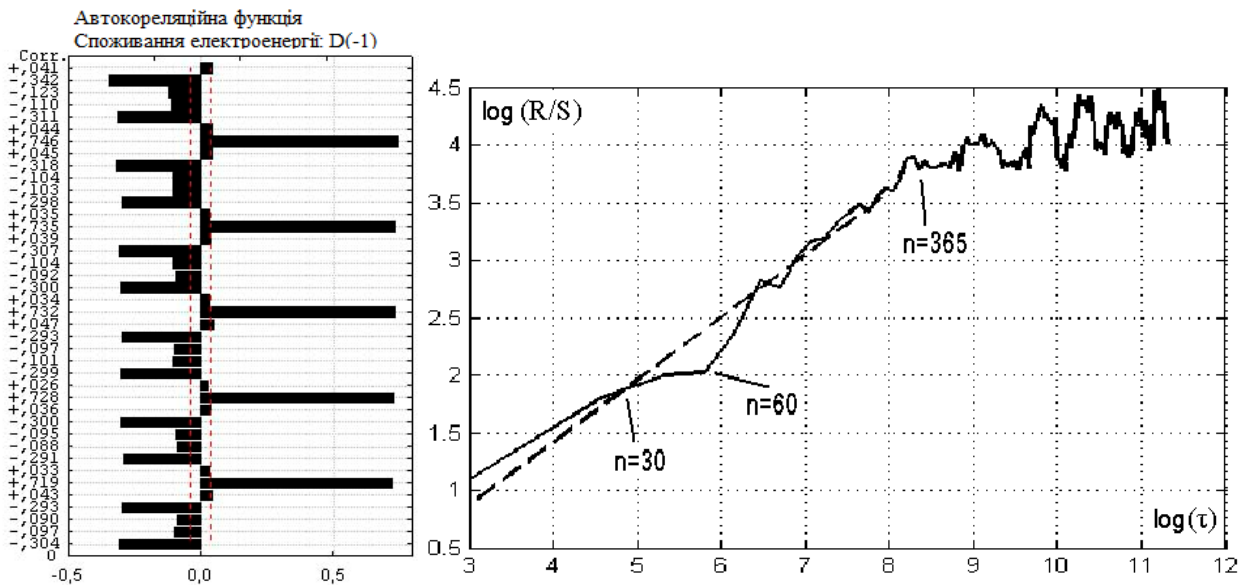


Рисунок 5.5 – Кореляційна функція ряду D(-1) і відповідна R/S-залежність, $H=0,54$ для ряду споживання е/е

При проведенні R/S-аналізу 7-денна циклічність заважає коректному обчисленню ступеня довгострокової залежності. В цьому випадку можна видалити циклічність шляхом побудови ряду різниці з лагом 7 D(-7). Відповідна автокореляційна функція показана на рисунку 5.6 зліва. Кореляційна функція демонструє відсутність періодичних складових, кратних 7-денному циклу. Однак її поступовий спад говорить про наявність авторегресійної складової процесу.

Проведемо RS-аналіз зміни показника Херста $H(n)$ для часового ряду D(-7). Графік R/S-залежності в подвійному логарифмічному масштабі показаний на рисунку 5.6 справа. Прямою пунктирною лінією на лінії 1 показано ділянку, на якій простежується довгострокова залежність з показником Херста $H=0,86$. Однак настільки високий показник може пояснюватися наявністю короткострокової залежності.

Для усунення короткострокової залежності треба знайти лінійну залежність між значеннями ряду в точках t і відповідними значеннями в точках $t-1$. Аналіз ряду D(-7) показав наявність авторегресійної залежності з коефіцієнтом авторегресії рівним 0,79. Лінією 2 зображений графік R/S-залежності для ряду $X_d(-7)$ з видаленою авторегресією. Показник Херста знизився до значення $H=0,56$, що близько до значення, отриманого раніше для ряду D(-1).

Таким чином, аналіз часового ряду добового споживання електроенергії в Україні показав наявність довгострокової залежності з показником Херста $H=0,56$. Часовий інтервал, на якому спостерігається довгострокова залежність, лежить в діапазоні від 7 до 365 днів.

5.1.3 Фрактальний аналіз електроенцефалограм для станів бадьорості та сну

В роботі [Кириченко, 2010 (1)] досліджені ЕЕГ-сигнали лабораторних тварин. Сигнали були розбиті на фази неспання та сну (повільного і швидкого). Методом ДФА був проведений порівняльний аналіз ступеня самоподібності часових рядів енцефалограм для різних фаз станів тварин.

Дослідження часових рядів енцефалограм показали наявність як довгострокової, так і короткострокової пам'яті. На рисунку 5.7 представлені типові реалізації ЕЕГ лабораторних щурів в різних фазах неспання і сну, і відповідні їм графіки залежності флуктуаційної функції $F(\tau)$ від числа

відліків τ в логарифмічному масштабі. Верхня лінія відповідає необробленим вхідним даним, а нижня отримана після видалення авторегресійної складової. Наведені значення показника Херста, отримані до (H_1) і після (H_2) усунення короткострокової залежності.

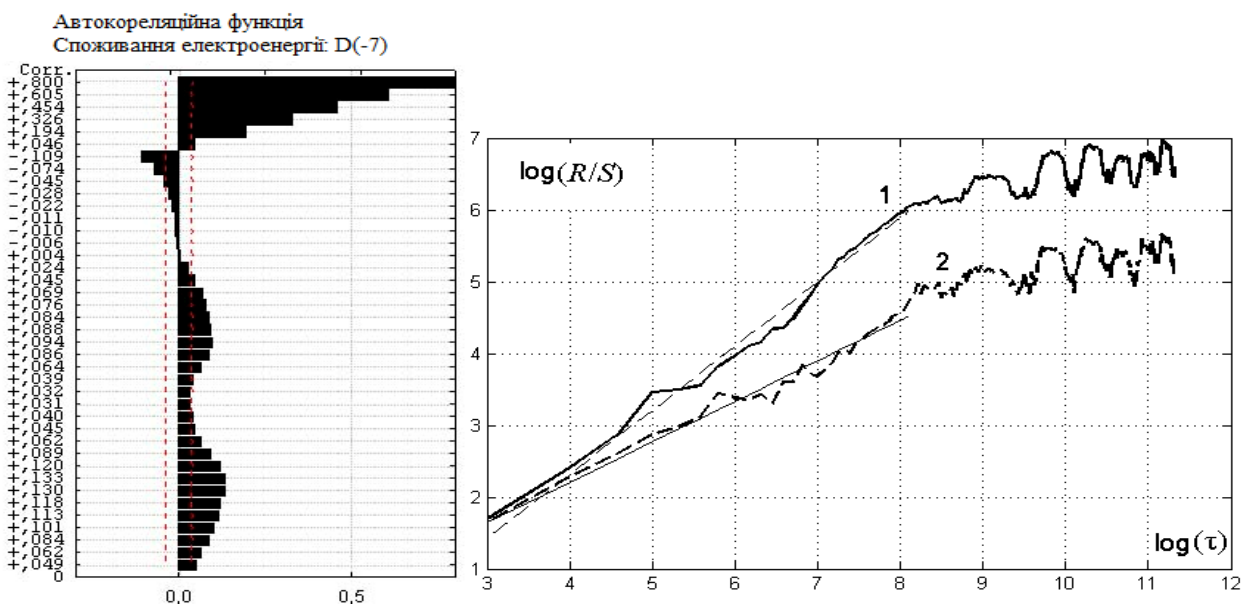


Рисунок 5.6 – Кореляційна функція ряду споживання е/е D(-7) і відповідні R/S-залежності:
1 – дані без видалення авторегресії, $H=0,86$; 2 – з видаленням авторегресії, $H=0,56$

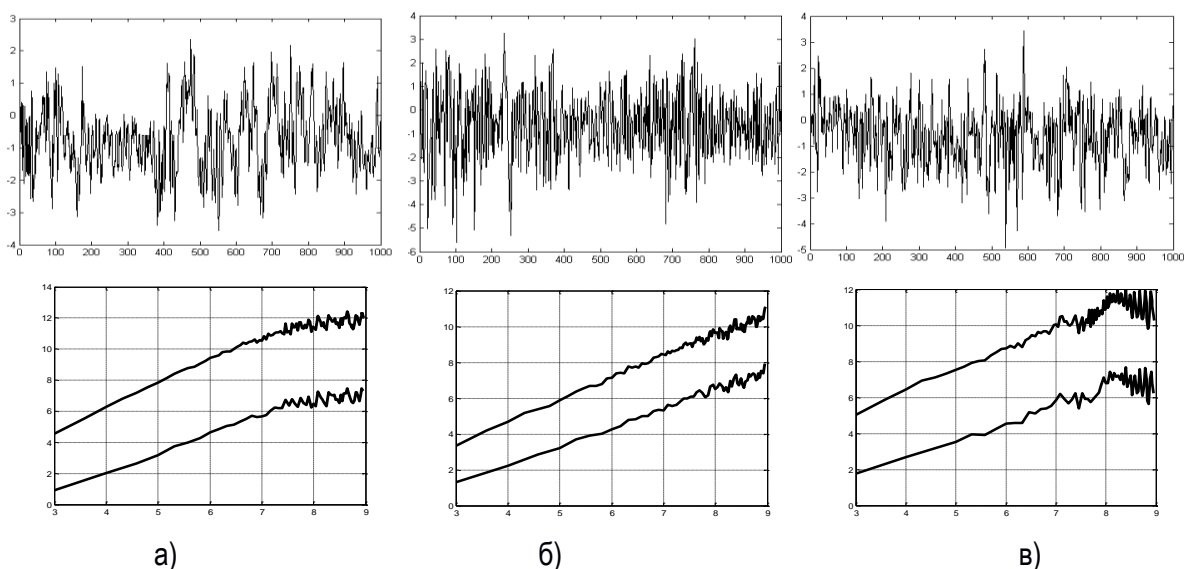


Рисунок 5.7 – Реалізації EEG і відповідні їм графіки $F(\tau)$:
а) неспанья, $H_1 = 0.78$, $H_2 = 0.63$; б) швидкий сон, $H_1 = 0.67$, $H_2 = 0.54$;
в) повільний сон $H_1 = 0.59$, $H_2 = 0.46$

Очевидно, що короткострокова залежність збільшує значення показника Херста і демонструє ефект довготривалої пам'яті. Після видалення авторегресійної складової значення показника Херста зменшилися. Як показав фрактальний аналіз, безсумнівна довгострокова залежність ($H > 0.6$) зберігається для часових рядів фази неспанья. Для фази швидкого сну значення показника Херста лежать в діапазоні $0.5 < H < 0.55$, що дозволяє сумніватися в наявності довгострокової пам'яті, проте

додаткові дослідження це підтверджують. Фаза повільного сну характеризується антиперсистентністю, для якої $0.35 < H < 0.5$.

Проведені дослідження дозволяють припустити, що оцінювання показника Херста дозволяє визначати фізіологічний стан тварини в режимі реального часу. Однак метод ДФА, спочатку застосований для визначення ступеня самоподібності ЕЕГ, є занадто повільним для роботи в реальному часі. Оптимально в цьому випадку використовувати метод оцінювання, заснований на швидкому вейвлет-перетворенні.

Розрахунок показника Херста для кожної фази поведінки тварини, заснований на дискретному вейвлет-перетворенні демонструє рис. 5.8. Для оцінювання динаміки показника Херста був застосований метод «ковзаючого вікна», що складається в наступному. У досліджуваному часовому ряді виділяється послідовність значень (вікно), і для цих даних обчислюється показник Херста H . Далі вікно пересувається вправо уздовж ряду на задану величину зсуву Δt . Повторюючи цю процедуру для обраного періоду часу, отримуємо локальні значення показника Херста. При цьому параметр H в момент часу t визначається значеннями ряду за період Δt значень, які передують цьому моменту.

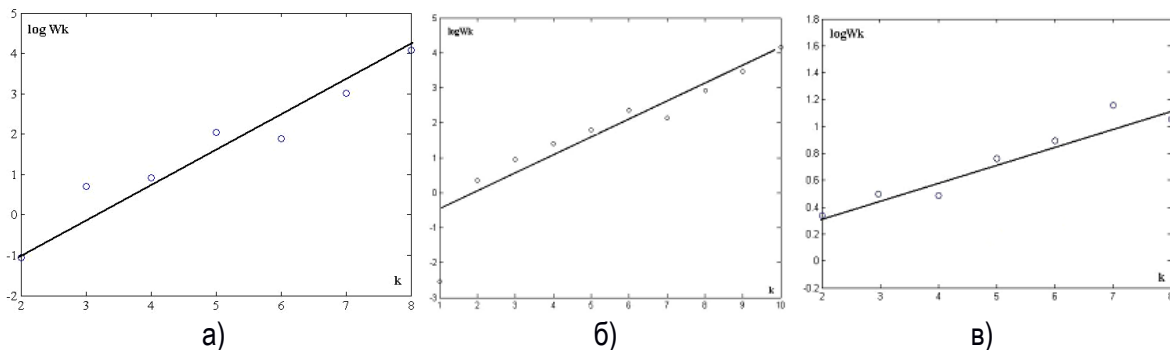


Рисунок 5.8 – Залежність логарифма вейвлет-енергії від номера рівня:
 а) неспанья, $0.6 < H < 0.9$; б) швидкий сон, $0.5 < H < 0.55$;
 в) повільний сон $0.35 < H < 0.5$

За допомогою даного методу було досліджено фрактальні структури енцефалограм щурів в різних станах сну і неспанья (рис. 5.9). Вся енцефалограма складалася з різних фаз поведінки лабораторної тварини: awake – фаза неспанья тварини, sws – повільний сон, gem – швидкий сон. Частота оцифрування сигналу дорівнювала 64 Гц. Енцефалограма містила близько 220000 відліків, розмір «вікна» задавався довжиною 1024 відліків.

Динаміка показника Херста для ділянки енцефалограми, отримана методом «ковзаючого вікна», приведена на рис. 5.9. Кількість «ковзаючих вікон», за якими оцінювався показник H позначено n , пунктирними лініями показана область зміни стану досліджуваної тварини. На графіку простежуються часові моменти, де різко змінюється показник Херста, тобто не бачучи самої досліджуваної тварини, можна визначити перехід з одного стану в інший.

5.1.4 Застосування фрактального аналізу для виявлення розладнання фінансових часових рядів

Одним з основних положень аналізу часових рядів є припущення про стійкі або слабо змінювані властивості того механізму, який породжує даний часовий ряд, тому багато проблем економічної і технічної сфер зводяться до виявлення різких змін (розладнання) ймовірнісних характеристик часового ряду, що аналізується. Розладнання є порушенням закономірності в динаміці або структурі часового ряду і може слугувати передвісником критичних явищ.

Під стабільним розуміється ринок, на якому всі учасники можуть здійснювати операції між собою, піддаючись однаковим ризикам, в залежності від властивих кожному учаснику шкали часу і інвестиційного горизонту. Ринок залишається стабільним, тому що він не має характерного масштабу часу. Коли весь інвестиційний горизонт ринку скорочується (інвестори втратили віру в довгострокову інформацію), ринок стає безладним і нестабільним. Отже, ринок є стабільним, поки він зберігає свою фрактальну структуру. Коли він втрачає таку структуру, настає нестабільність. [Петерс, 2004]

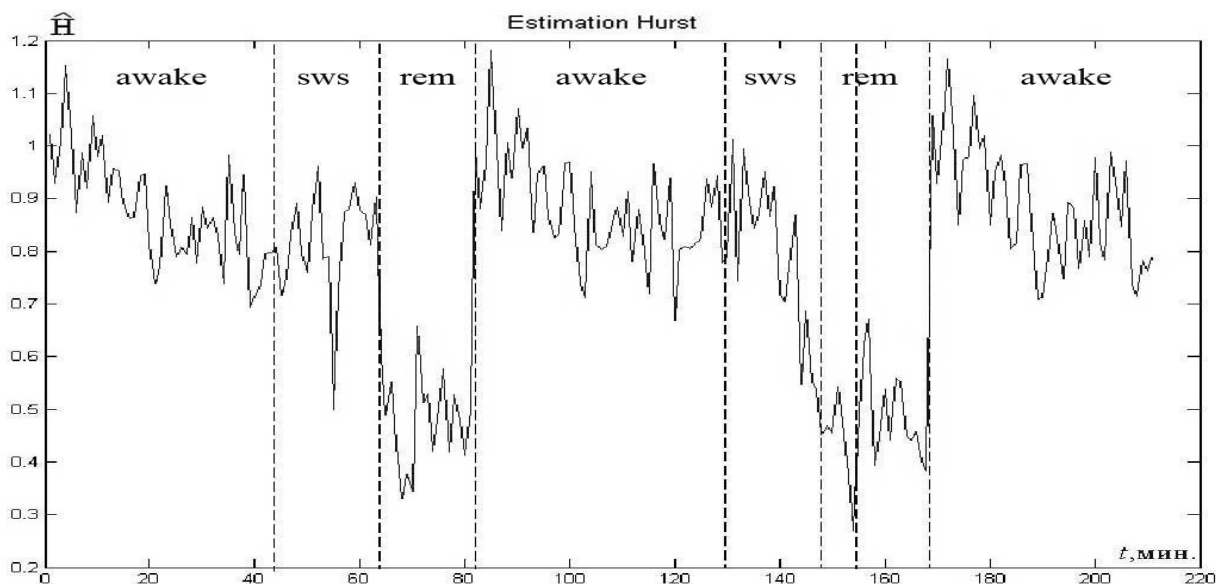


Рисунок 5.9 – Визначення зміни фрактальної структури енцефалограми

В роботі [Кириченко, 2009] представлено виявлення розладнання фрактальних властивостей фінансових часових рядів, яке є передвісником кризових станів. Найбільш адекватним математичним апаратом для дослідження складної поведінки фінансових рядів є фрактальний аналіз, особливе значення якого полягає в тому, що він враховує поведінку системи не тільки в період вимірювань, але і його передісторію. Фрактальна розмірність D , як елемент фрактального аналізу, є показником складності динаміки ряду, і її зміна може служити індикатором розладнання часового ряду.

Для часових рядів фрактальна розмірність D зазвичай обчислюється на основі розрахунку показника Херста H , який пов'язаний з фрактальною розмірністю співвідношенням $D = 2 - H$ [Федер, 1991]. Існує багато методів знаходження показника Херста; метод нормованого розмаху є одним з найбільш часто використовуваних на практиці. При значеннях $0.5 < H < 1$ ряд демонструє персистентну (трендостійку) поведінку. Тобто, якщо ряд зростає (убуває) в попередній період, то з ймовірністю, тим більшою, чим показник Херста більше 0.5, він буде зберігати цю тенденцію такий же час в майбутньому. Значення $H = 0.5$ вказує на незалежність (відсутність будь-якої пам'яті про минуле) значень часового ряду. Чим ближче H до 0.5, тим більше зашумлений ряд і тим менш виражений його тренд. Діапазон $0 < H < 0.5$ відповідає антиперсистентним рядам: якщо система демонструє зростання в попередній період, то з ймовірністю, тим більшою, чим показник Херста менше 0.5, в наступному періоді почнеться спад.

Гіпотеза фрактального ринку передбачає наявність пам'яті, отже, відповідні часові фінансові ряди мають тренди і фрактальну розмірність $1 < D < 1.5$. Під час фінансових криз відбувається звуження інвестиційних горизонтів, тобто втрата пам'яті, фрактальна структура руйнується і фрактальна розмірність стає $D \geq 1.5$. Аналізуючи виникнення ділянок з різною фрактальною розмірністю, можна діагностувати і прогнозувати нестабільні стани (кризи).

Для дослідження динаміки фрактальної розмірності був застосований метод «ковзаючого вікна», який полягає в наступному. У досліджуваному часовому ряді виділяється послідовність значень (вікно), і для цих даних обчислюється фрактальна розмірність D . Далі вікно пересувається вправо уздовж ряду на задану величину зсуву Δt , і знову обчислюється фрактальна розмірність. Повторюючи цю процедуру для обраного періоду часу, отримуємо локальні значення фрактальної розмірності. При цьому фрактальна розмірність в момент часу t визначається значеннями ряду за період Δt значень, які передують цьому моменту.

У даній роботі проведено чисельні дослідження фрактальної динаміки найбільш значущих макроекономічних фінансових показників (індекси NASDAQ Composite, S & P 500, Dow Jones та ін.) і курсів різних валютних пар за період з березня 2005 по червень 2009 г. На рис.1 а показана динаміка індексу Dow Jones в днях і відповідні значення фрактальної розмірності D . Із графіків видно, що зміна фрактальної структури ряду відбулася майже за півроку до початку падіння показника. Дана динаміка є характерною для всіх розглянутих ринків цінних паперів, які «впали» в результаті кризи 2008 р. Таким чином, можна сказати, що фрактальний аналіз виявляє «приховані» порушення функціонування ринку, які можуть тривати досить довго, але, в кінцевому рахунку, виливаються в повномасштабну кризу.

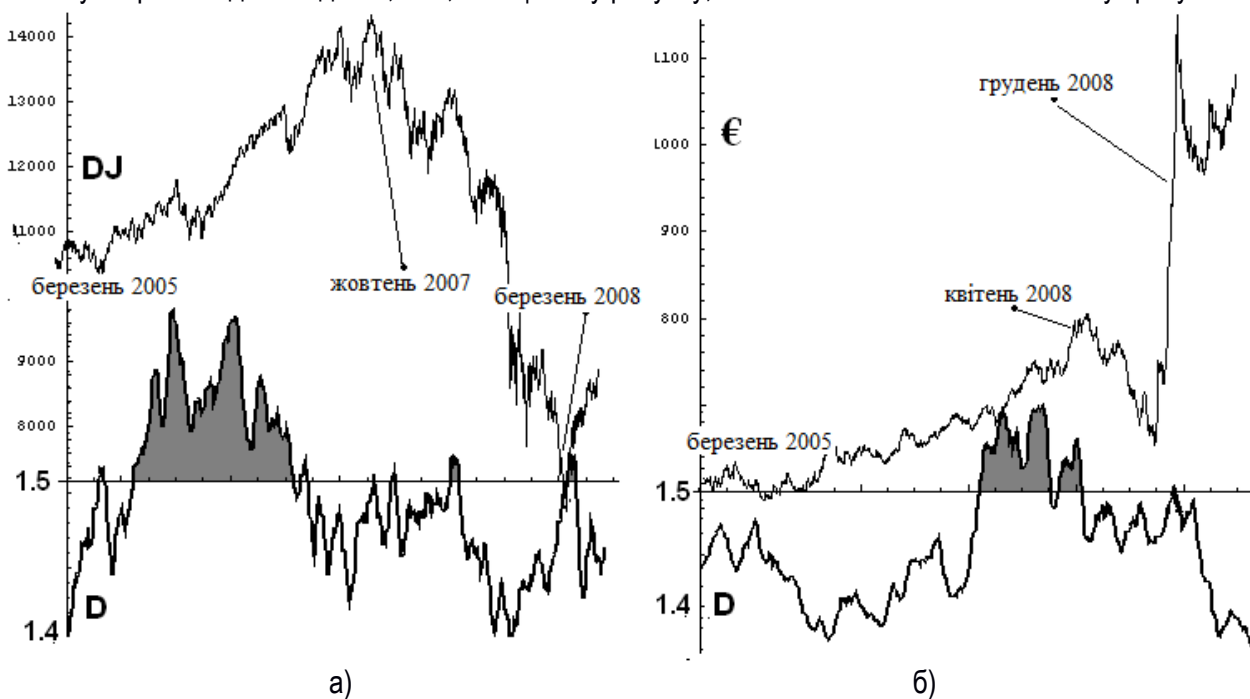


Рисунок 5.10 – Динаміка фрактальної розмірності

Аналогічні дослідження, проведені для курсів валют, так само показали стрибок фрактальної розмірності задовго до настання критичної ситуації. На рис. 5.10 б приведена денна динаміка співвідношення євро до гривні по курсу Національного Банку України та відповідні значення фрактальної розмірності D . Слід зазначити, що для валютних ринків «запізнювання» між стрибком D і різкою зміною курсу значно менше, ніж для ринків акцій. Це пояснюється тим, що вони менш персистентні, і, отже, менш інерційні.

5.2 Мультифрактальний аналіз часових рядів

Змінювання мультифрактальних характеристик дає більшу кількість інформації про динаміку системи, ніж один показник Херста. У цьому розділі наведені результати мультифрактального аналізу для часових рядів різної природи.

5.2.1 Прогнозування кризових явищ для фрактальних фінансових часових рядів

Одним із прикладів фрактальних стохастичних структур є сучасні фінансові ринки, для яких характерний ефект пам'яті, коли зміна ціни залежить від величини попередньої зміни. Гіпотеза фрактальності фінансових часових рядів передбачає, що ринок представляє собою саморегульовану макроекономічну систему зі зворотним зв'язком, в рамках якої діють інвестори з різними інвестиційними горизонтами, які використовують інформацію про минулі події, що впливають на рішення в сьогодні, і що містить довготривалі кореляції і тренди [Петерс, 2000; Петерс, 2004; Cont, 2004; Dabi-Prashad, 2009].

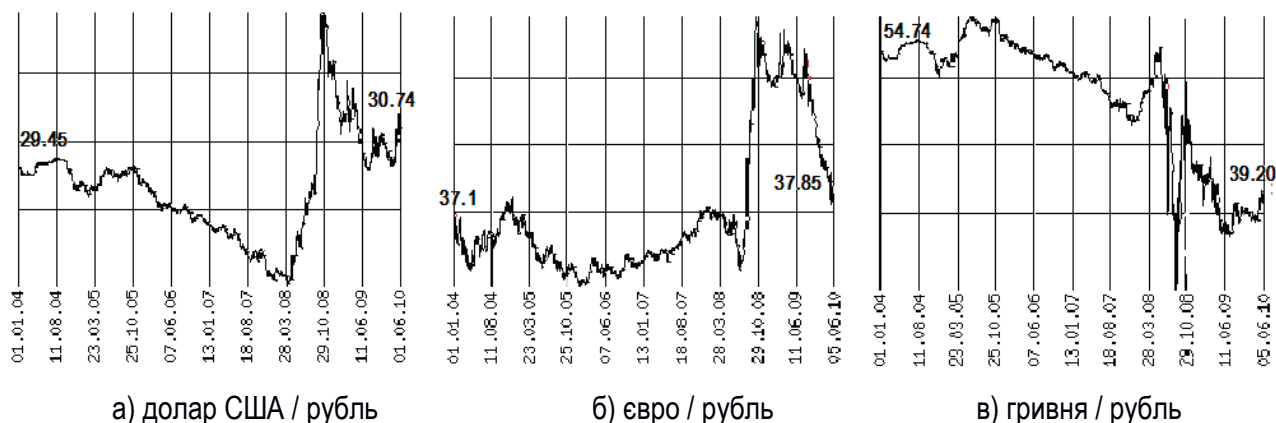
Дослідження фрактальної структури фінансових ринків показує, що значення параметра Херста на різних часових шкалах може відрізнятися, тобто в діапазоні хвилин часовий ряд може бути антиперсистентним, а в діапазоні місяців – персистентним. Більш ефективним і універсальним інструментом аналізу нестабільних фінансових систем є мультифрактальна модель, відповідно до якої фінансові часові ряди представляються об'єднанням множини монофракталів [Ganchuk, 2006; Calvet, 1997].

В даному підрозділі представлено застосування методів віконного аналізу для відстеження виникнення ділянок з різною мультифрактальною структурою для діагностики та прогнозування нестабільних станів (криз) ринку.

Мультифрактальний аналіз передкризових станів ринку

В роботі [Кириченко, 2010 (2)] представлений порівняльний аналіз мультифрактальної структури фінансових часових рядів до і після початку фінансової кризи 2008 року і виявлення доцільності використання такого аналізу для поточної діагностики стабільності економічних систем.

Проведемо порівняльний мультифрактальний аналіз МФДФА часових рядів обмінних курсових валют до і після початку фінансової кризи 2008 року, представлених на спеціалізованому сайті. В якості прикладів розглянемо динаміку зміни курсу долара США до російського рубля, євро до рубля і котирувань української гривні до російського рубля в період з 01.01.2004 по 01.06.2010, представлену на рисунку 5.11 (а, б, в).



а) доллар США / рубль

б) евро / рубль

в) гривня / рубль

Рисунок 5.11 – Динаміка котирувань в період з 01.01.2004 по 01.06.2010

Характерна особливість усіх наведених графіків полягає в наявності ділянки, що виявляє великі зміни різниці курсу. Ці зміни відображають фінансову кризу, яка вибухнула в 2008 році, коли вартість долара і євро по відношенню до рубля і гривні різко зросла.

Дотримуючись методу МФДФА, розглянемо вплив цієї кризи на мультифрактальні властивості досліджуваних часових рядів. З цією метою для кожного ряду проведемо роздільний аналіз двох ділянок, один з яких передуює кризі (період з 01.01.2004 по 30.12.2007), а інший слідує після пікової фази (період з 21.05.09 по 01.06.10). Період найбільш гострої фази кризи виключений нами з розгляду як непередбачуваний.

Розрахуємо узагальнений показник Херста $h(q)$ і окремо розглянемо звичайний показник Херста $H = h(2)$. Графіки функцій $h(q)$ представлені на рисунку 5.11. Наявність нелінійної залежності у всіх функцій говорить про те, що показник Херста змінюється при зміні параметра q , та є підтвердженням того, що часовий ряд коливання курсу валют є мультифрактальним.

У передкризовий період все часові ряди демонструють тільки слабкі часові кореляції. Узагальнений показник Херста лежить в діапазоні $0.4 < h(q) < 1.6$. Звичайний показник Херста $H = h(2)$ в цей період близький до 0.5. З економічної точки зору це означає скорочення інвестиційного горизонту ринку, який стає безладним і нестабільним.

З залежностей, наведених на рисунку 5.12, видно, що після піку кризи узагальнений показник Херста $h(q)$ для всіх фінансових рядів набуває більш широкий інтервал зміни $0.2 < h(q) < 2.8$. Це свідчить про посилення мультифрактальних властивостей і появи більш сильних кореляцій.

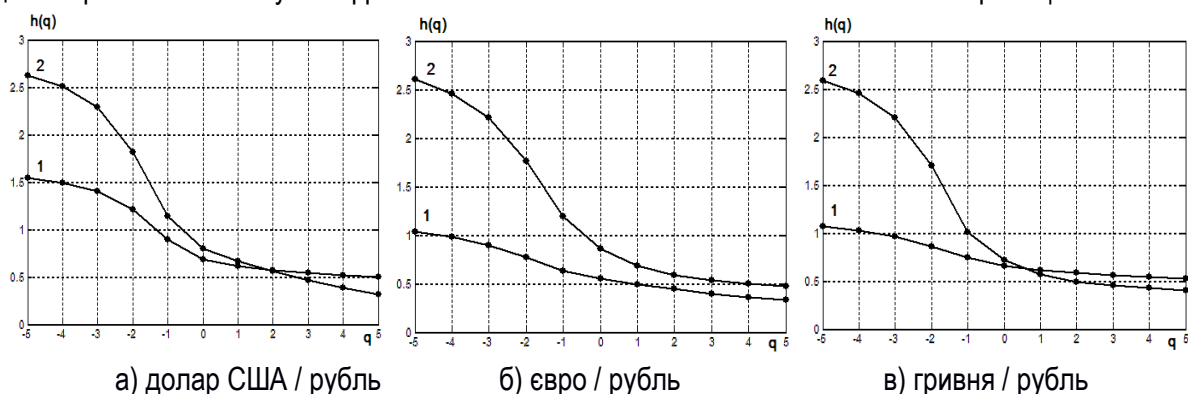


Рисунок 5.12 – Узагальнений показник Херста для рядів котирувань до (лінія 1) і після (лінія 2) початку кризи

Економічно це виражається в тому, що вартість валюти набуває сильну чутливість до зміни економічних, соціальних, політичних та інших факторів. Звичайний показник Херста $H = h(2)$ в цей період більше 0.5. Пройшовши пік фінансової кризи, часовий ряд обмінного курсу стає персистентним, що характерно для фінансових часових рядів при стабільному ринку.

Віконний мультифрактальний аналіз кризових станів ринку

Для дослідження динаміки узагальненого показника Херста був застосований метод «ковзаючого вікна», який полягає в наступному. У досліджуваному часовому ряді виділяється послідовність значень (вікно), і для цих даних обчислюються значення узагальненого показника Херста $h(q)$ для значень параметра $q = \{-5, 2, 5\}$. Далі вікно пересувається вправо уздовж ряду на задану величину зсуву Δt ,

і знову обчислюється $h(q)$. Повторюючи цю процедуру для обраного періоду часу, отримуємо локальні значення узагальненого показника Херста при $q = -5$, що характеризують динаміку сегментів, які виявляють малі флуктуації, при $q = 5$ характеризують динаміку сегментів, які виявляють великі флуктуації. Значення $H = h(2)$ характеризує персистентність фінансового ряду. При цьому мультифрактальні характеристики, отримані в момент часу t , визначаються значеннями ряду за період Δt значень, які передують цьому моменту. На рисунку 5.13 вгорі представлений часовий ряд котирувань долар США / рубль з 2006 р. по 2009 р. Нижче наведено динаміку показника $h(q)$. Очевидно, що в передкризовий період з травня по листопад 2008, відбувається зближення границь мультифрактального спектру (в даному випадку значень $h(-5)$ – лінія 1, і $h(5)$ – лінія 3). Показник Херста H (лінія 2) при цьому стає близьким до значення 0.5.

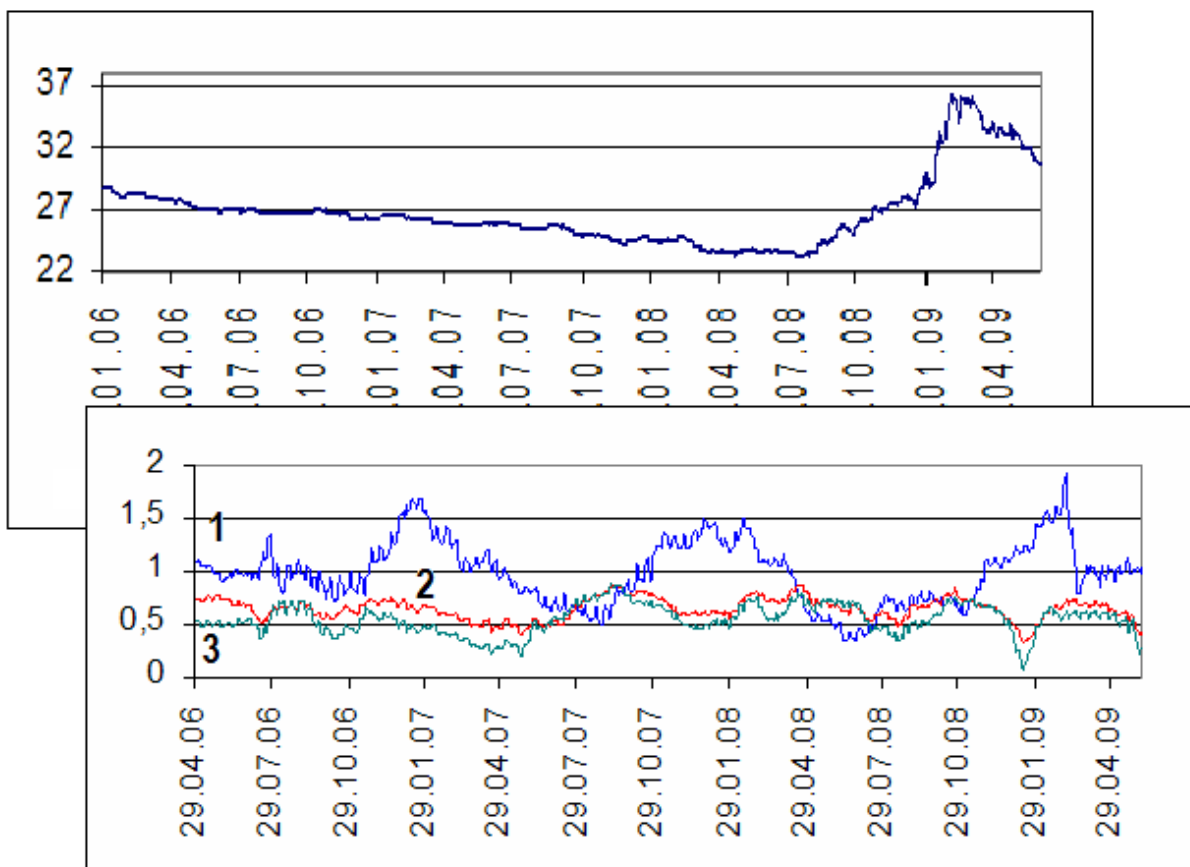


Рисунок 5.13 – Динаміка $h(q)$ для рядів котирувань долар США / рубль:
 $h(-5)$ – лінія 1, $h(5)$ – лінія 3, H – лінія 2

На рисунку 5.14 представлені часові ряди котирувань євро / долар, індексу S & P, індексу NASDAQ і відповідної динаміки показника $h(q)$ з 2006 р. по 2009 р. Як видно, для наведених часових рядів спостерігаються ті ж тенденції, що і для показника Херста ряду долар / рубль, однак, для рядів фінансових індексів зміна мультифрактальної структури відбувається в інші терміни. В іншому поведінка графіків узагальненого показника Херста збігається.

Результати проведених досліджень підтверджують можливість використання мультифрактального аналізу для виявлення прихованих порушень функціонування фінансових ринків і використання зміни мультифрактальних характеристик як передвісника кризових явищ.

5.2.2 Дослідження фрактальних біомедичних сигналів

Фрактальна геометрія застосовується в біології понад чверть століття. Використання фрактальних методів відкриває нові можливості у вивченні функціональної організації живих систем.

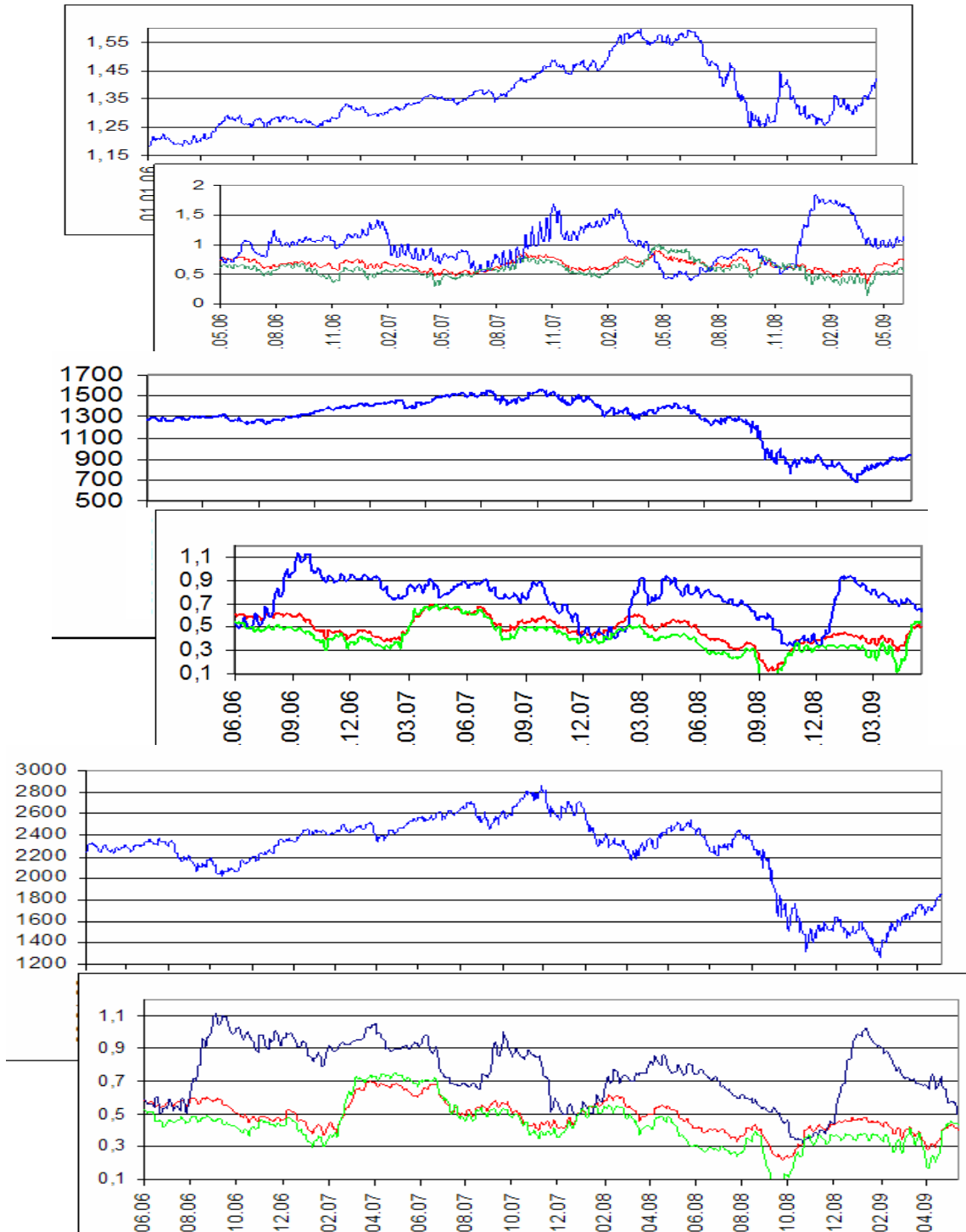


Рисунок 5.14 – Динаміка $h(q)$ для рядів євро / долар (вгорі); індексу S & P (посередині); індексу NASDAQ (внизу)

Стійка робота такої складної, ієрархічно організованої системи забезпечується взаємною підпорядкованістю структур, що відносяться до різних просторових масштабів. Численні експериментальні та клінічні дані дають підставу для висновку про те, що дослідження фрактальної топології різних біологічних систем дозволить закласти основи фрактальної діагностики [Bassingthwaighte, 1994; Ivanov, 2001; Ching, 2007; Harikrishnan, 2013; Philippe, 2001].

В даному підрозділі досліджено фрактальні властивості та виявлено характерні особливості таких важливих біомедичних сигналів, як електрична енцефалограма і кардіограма.

Оцінювання мультифрактальних властивостей електрокардіограм

Як відомо, для діагностики і виявлення різних захворювань серця важливе місце займає аналіз електрокардіограми (ЕКГ). ЕКГ являє собою запис електричної діяльності серця. Найменше відхилення від норми може свідчити про порушення роботи серцевого ритму, а також бути свідченням наявності різних захворювань. Одним з методів діагностики серцевих захворювань, є аналіз рядів, побудованих за RR- інтервалами.

RR-інтервал являє собою проміжок часу між сусідніми зубцями електрокардіограми і дорівнює тривалості серцевого циклу. Дані інтервали грають дуже важливу роль для визначення частоти серцевих скорочень і діагностики різних видів аритмій серця. На рисунку 5.15 показано побудову ряду за значеннями RR-інтервалів. Відомо, що такі ряди мають фрактальну структуру, тому їх можна досліджувати за допомогою мультифрактальних методів.

Вхідні дані для досліджень в роботах [Kirichenko, 2012; Alghawli, 2015] були отримані на спеціалізованому сайті [PhysioNet]. В ході медичного дослідження розглядалися пацієнти, що належать до вікової групи від 45 до 69 років і мають серцеву аритмію. Наведено дані RR-інтервалів до і після прийому медичного препарату «Flecainide», що застосовується для лікування і запобігання тахікардії – збільшення частоти серцевих скорочень.

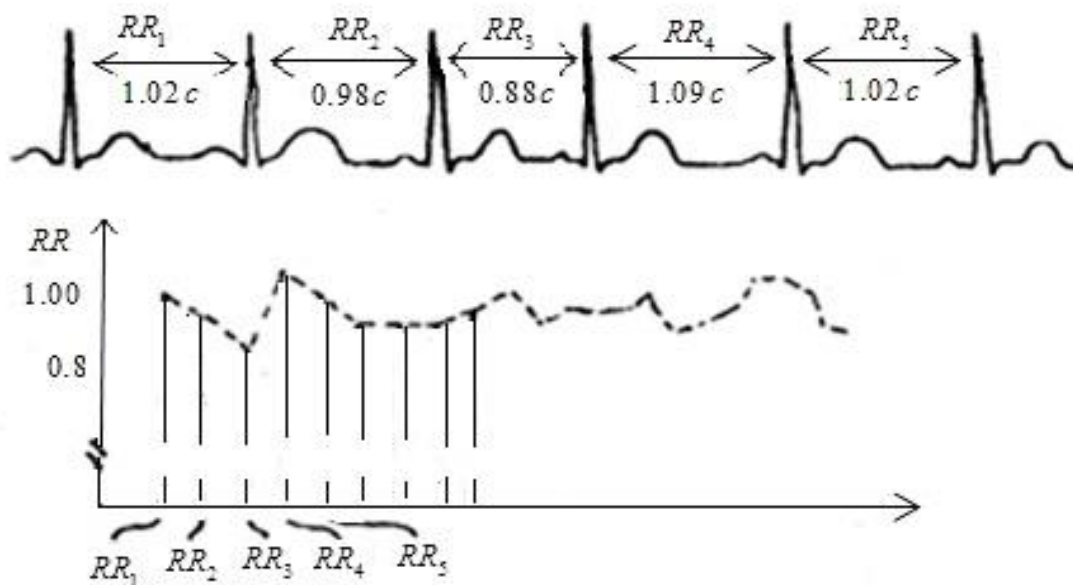


Рисунок 5.15 – Зображення нормального ЕКГ-сигналу, із зазначенням RR-інтервалів і побудова послідовності RR-інтервалів

На рисунку 5.16 наведені результати мультифрактального аналізу: скейлінгова експонента $\tau(q)$ і мультифрактальний спектр $f(\alpha)$, типові для послідовностей RR-інтервалів здорової людини. Тобто, типовий діапазон значень $f(\alpha)$ людини без кардіозахворювань лежить в межах $0.9 < \alpha < 1.7$.

Мультифрактальний аналіз послідовностей RR-інтервалів пацієнтів, які страждають тахікардією, показав, що в цьому випадку типовий діапазон значень $f(\alpha)$ лежить в межах $0.2 < \alpha < 1.5$, тобто є більш широким і зміщеним вліво (рисунок 5.16). Дослідження показали, що застосування препарату викликає зміну мультифрактальних характеристик послідовності RR-інтервалів.

Практично для всіх піддослідних в рядах RR-інтервалів після застосування препарату функція мультифрактального спектра була зрушена вправо, тобто отримані значення величини α збільшилися. На рис. 5.17 наведені значення скейлінгової експоненти і функції мультифрактального спектру рядів RR-інтервалів для пацієнтів до і після застосування медичного препарату.

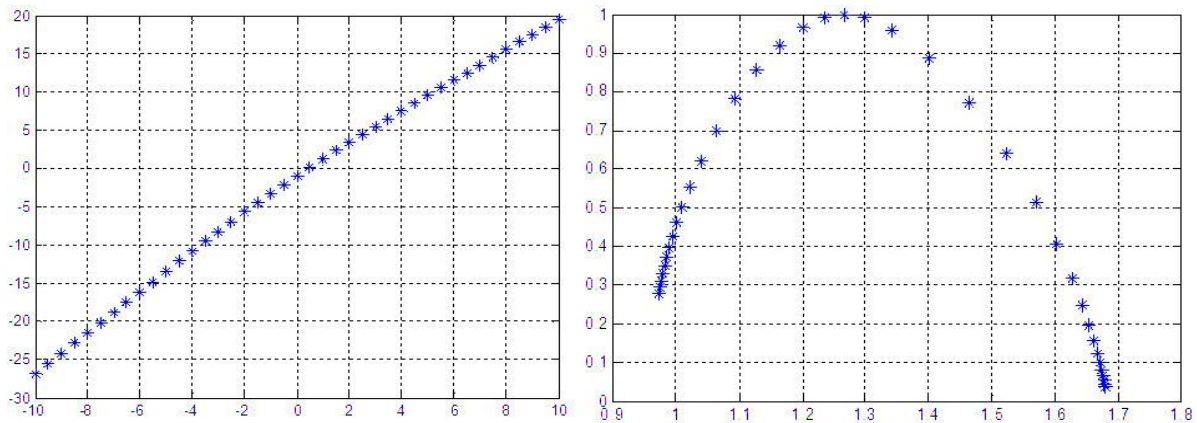


Рисунок 5.16 – Скейлінгова експонента $\tau(q)$ і мультифрактальний спектр $f(\alpha)$, типові для здорової людини

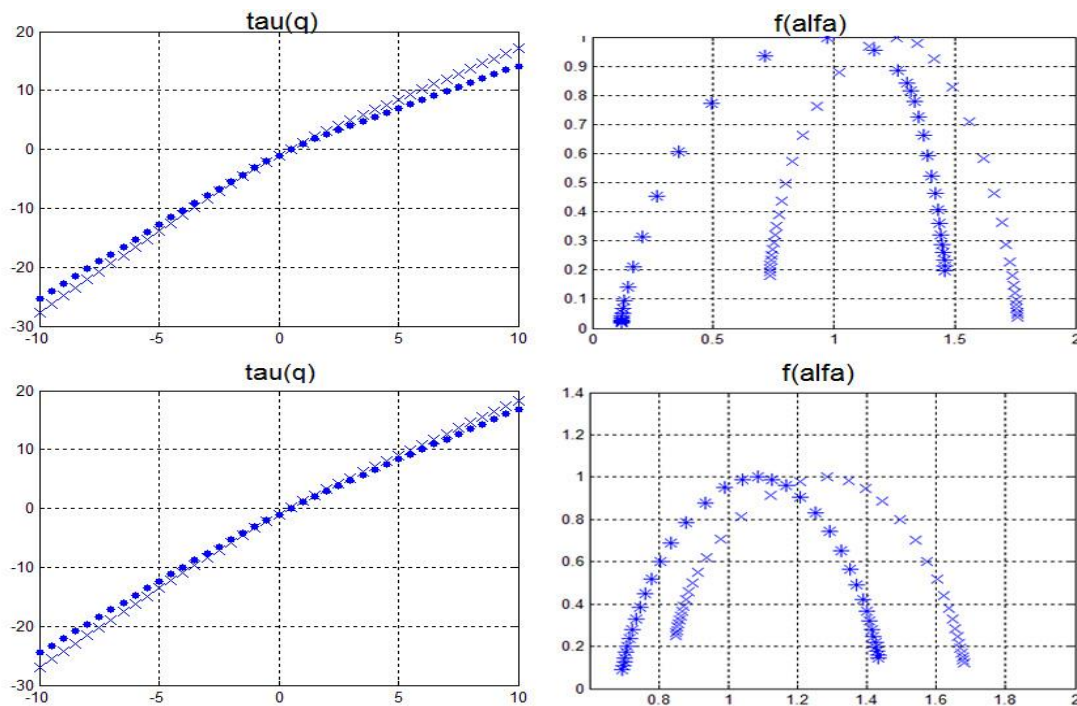


Рисунок 5.17 – Скейлінгова експонента $\tau(q)$ і мультифрактальний спектр $f(\alpha)$ до застосування препарату (*) і після його застосування (x)

Ці результати дозволяють припустити, що мультифрактальні методи можуть бути успішно використані в аналізі електрокардіологічних сигналів для визначення функціональних змін в діяльності серця. Мультифрактальний аналіз ЕКГ може бути основою для статистичних досліджень, які дозволять сформулювати методи аналізу ЕКГ для клінічної практики.

Дослідження мультифрактальних характеристик записів ЕЕГ

В роботі [Alghawli, 2015] було проведено дослідження, як змінюються мультифрактальні характеристики ЕЕГ людини, коли вона робить будь-які фізичні дії, і коли вона просто уявляє, що вона це робить. В якості експериментальних даних були використані сигнали ЕЕГ піддослідних, які виконують певні дії [PhysioNet]. Кожен піддослідний виконував наступний комплекс дій:

- в правому (лівому) кутку екрану комп'ютера з'являлося коло, і піддослідний стискав відповідно праву (ліву) руку в кулак;
- в правому (лівому) кутку екрану комп'ютера з'являлося коло, і піддослідний тільки уявляв собі, що він стиснув руку в кулак, хоча насправді рука не рухалася.

На рисунку 5.18 наведені графіки досліджуваних часових рядів ЕЕГ для двох піддослідних, які виконали описані вище завдання. Зліва представлені записи ЕЕГ, коли піддослідний стискає руку в кулак. Справа показані записи ЕЕГ, коли піддослідний просто уявляє, що він це робить.

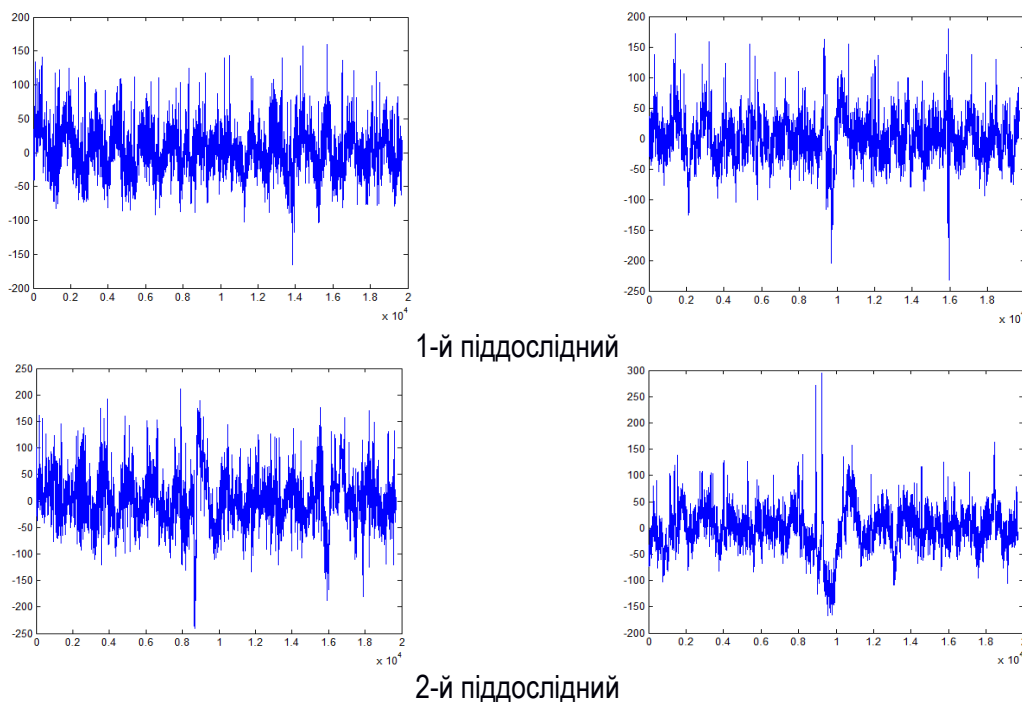


Рисунок 5.18 – Записи ЕЕГ: піддослідний стискає руку в кулак (зліва) і піддослідний тільки уявляє, що він стискає руку (справа)

Були вивчені мультифрактальні характеристики відповідних часових рядів. Найбільш наочно демонструє відмінності між двома станами функція мультифрактального спектру $f(\alpha)$. На рисунку 5.19 представлені функції мультифрактального спектру, відповідні записам ЕЕГ, показаним на рисунку 5.18. Лінія 1 відповідає стану, коли піддослідний стискає кулак, а лінія 2 відповідає випадку, коли він просто представляє, що стискає.

Таким чином, експеримент показує, що функція мультифрактального спектру $f(\alpha)$ для уявних дій значно зсувається вправо, що дозволяє розрізнити два стани піддослідного. В ході дослідження були вивчені записи ЕЕГ, отримані з використанням різних електродів. Було виявлено, що записи ЕЕГ ряду електродів більш чутливі до змін фізичної активності людини і мультифрактальні характеристики, отримані з цих записів для реальних і уявних дій, значно відрізняються. При дослідженні записів ЕЕГ інших електродів явний зв'язок між мультифрактальними характеристиками не було виявлено.

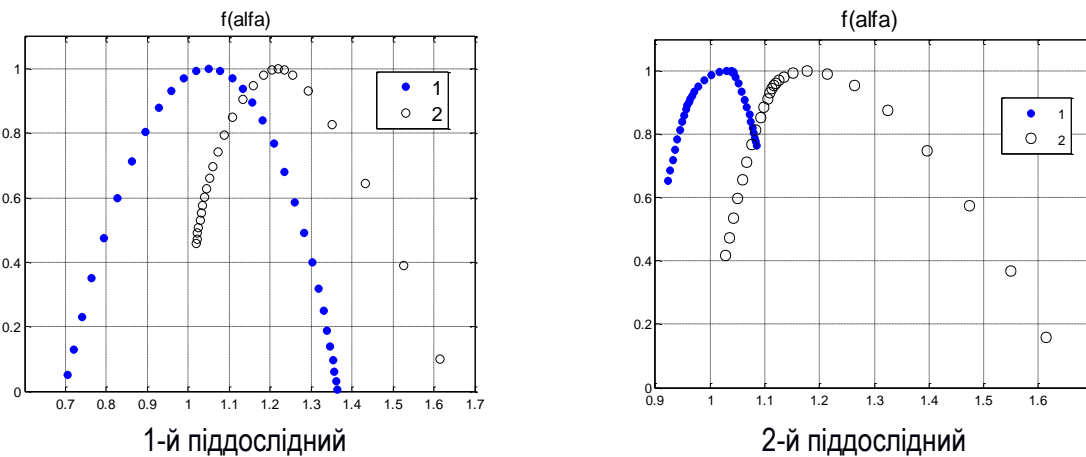


Рисунок 5.19 – Функції мультифрактального спектру ЕЕГ. Лінія 1: піддослідний стискає кулак; лінія 2: піддослідний представляє, що він стискає кулак

Дослідження мультифрактальних характеристик записів ЕЕГ для різних фаз бадьорості і сну.

В роботі [Alghawli, 2015] були досліджені записи ЕЕГ лабораторних тварин, які були розділені на фази неспання (AWAKE), повільний сон (SWS) і швидкий сон (REM). На рисунку 5.20 показані типові реалізації ЕЕГ для різних фаз неспання і сну.

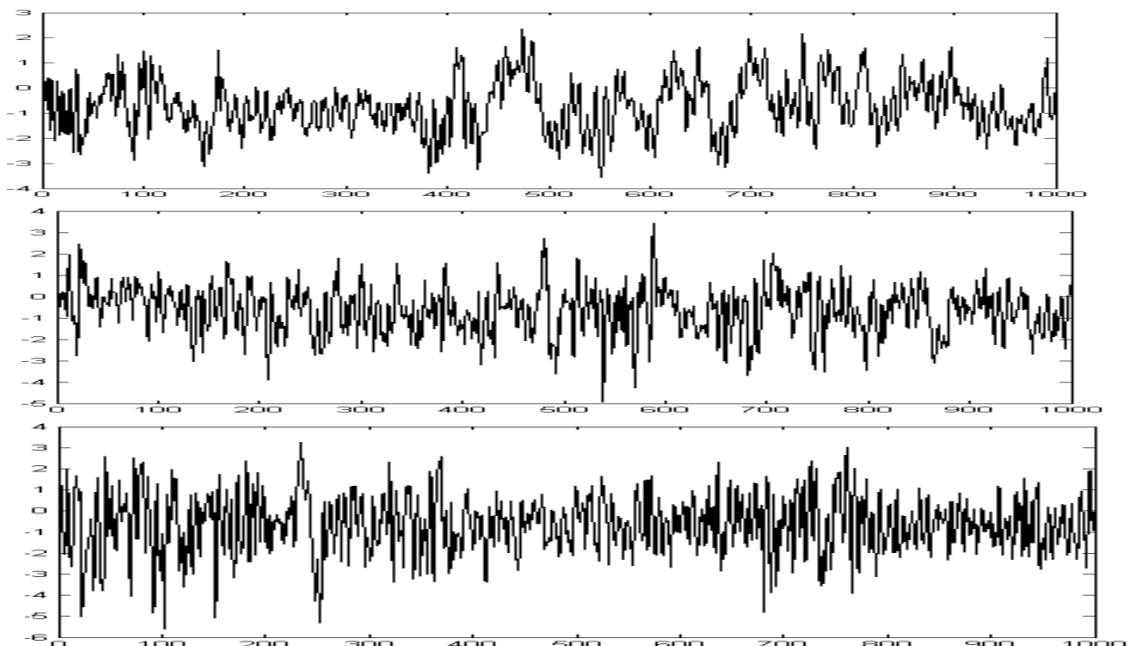


Рисунок 5.20 – Реалізації ЕЕГ: AWAKE (вгорі), SWS (посередині) і REM (внизу)

Проведений мультифрактальний аналіз показав значні відмінності в характеристиках записів ЕЕГ в фазах бадьорості і сну. На рисунку 5.21 показано узагальнений показник Херста $h(q)$ і мультифрактальний спектр $f(\alpha)$, які відповідають реалізаціям ЕЕГ, показаним на рисунку 5.20.

Аналіз також показав, що існує безсумнівна довгострокова залежність для реалізацій ЕЕГ в фазі неспанн'я: в цьому випадку показник Херста помітно перевищує 0.5. Фаза повільного сну характеризується антиперсистентністю, в цьому випадку показник Херста приймає значення в діапазоні менше 0.5. Для REM-сну оцінки показника Херсту близькі до значення 0.5, вони приймають значення і більше, і менше 0.5. В цьому випадку реалізації ЕЕГ характеризуються дуже слабкою автокореляційною залежністю.

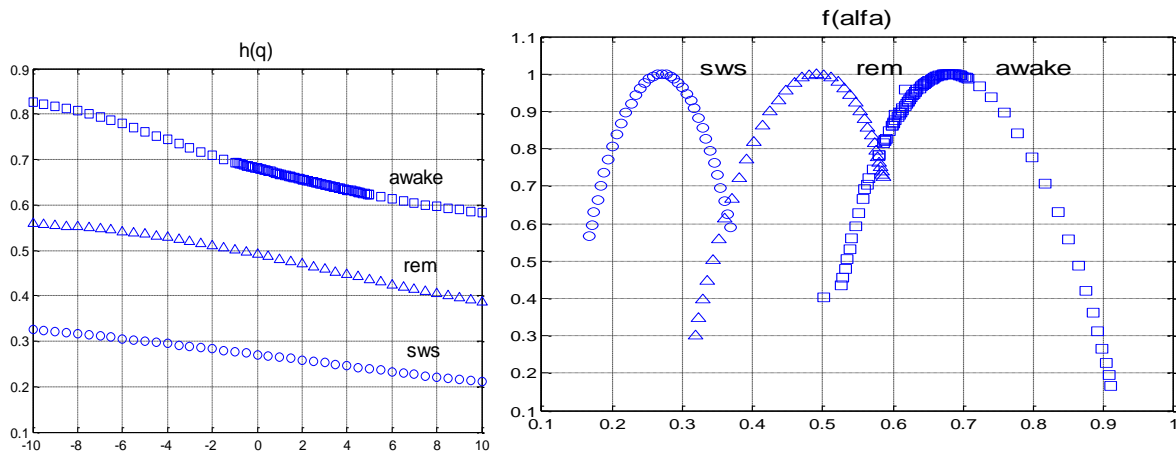


Рисунок 5.21 – Узагальнений показник Херста і мультифрактальний спектр AWAKE (квадрати), SWS (кола) і REM (трикутники)

5.2.3 Аналіз самоподібних і мультифрактальних властивостей сигналів, пов'язаних з природними явищами

Добре відомо, що багато часових рядів, що відповідають природним явищам, мають самоподібну структуру. До таких явищ належать розливи річок, кількість опадів, зміна температури, збільшення діаметру кілець дерев [Мандельброт, 2002; Федер, 1991; Шредер, 2005]. В даному підрозділі були проведені дослідження властивостей деяких сигналів такого роду, і встановлена їх фрактальна структура.

Фрактальні властивості сигналів, що відображені атмосферним шаром

Сучасні проблеми досліджень і прогнозування термодинамічних процесів в атмосферному прикордонному шарі вимагають розробки і застосування нових математичних моделей і методів аналізу даних. Одним з методів дослідження процесів, що протікають в атмосферному прикордонному шарі, є акустичне зондування і подальший аналіз як ехо-сигналів, так і ансамблів послідовно отриманих профілів ехо-сигналів – ехограм. В результаті експериментальних досліджень, проведених на діючій станції акустичного зондування Харківського національного університету радіоелектроніки в період з 2007 по 2009 р, отримано великий експериментальний матеріал у вигляді ехограм акустичного зондування, записаних в цифровому вигляді [Леонідов, 2010].

В роботі [Кириченко, 2011 (1)] був проведений аналіз деяких з цих експериментальних даних. На рисунку 5.22 наведено приклад ехограми, отриманої в спекотний літній день за допомогою бістатичних

системи акустичного зондування, встановленої на даху п'ятиповерхового будинку, розташованого в центрі мегаполісу. Такий вид ехограми можна вважати типовим для даних умов спостереження.

На осі абсцис відкладено час в секундах, на осі ординат – висота шару, що зондується, в метрах. Максимальна висота шару атмосфери $h_z \cong 372,3 \text{ м}$; значення розв'язної здатності сигналу $f_o = 1800 \text{ Гц}$, період повторення зондуючих імпульсів $T_u = 2 \text{ с}$. Горизонтальні смуги, які проглядаються на ехограмі, обумовлені віддзеркаленням від близько розташованих будівель.

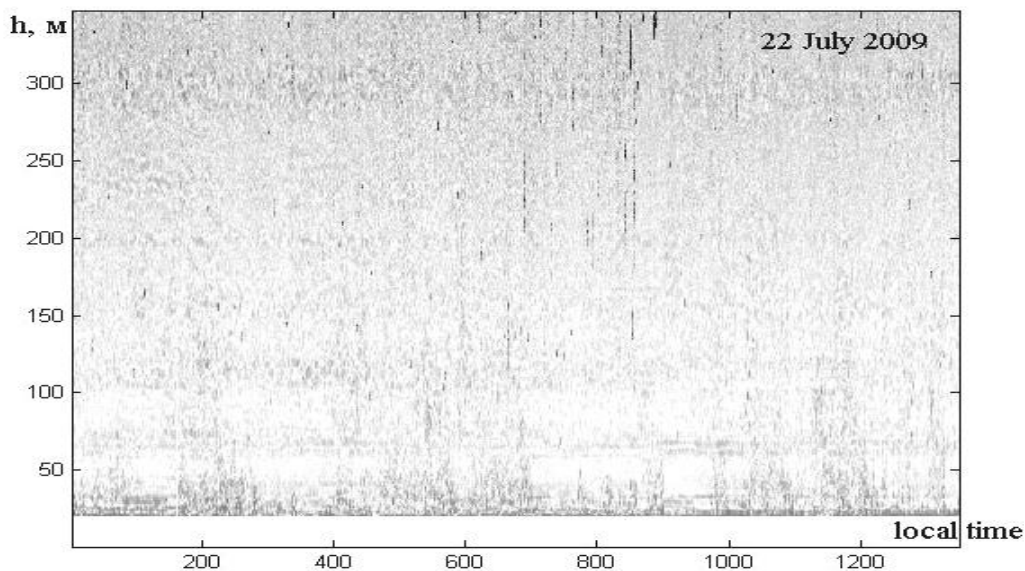


Рисунок 5.22 – Ехограма акустичного зондування

На рисунку 5.23 представлений сигнал, віддзеркалений при висоті шару, що зондується, 50 м, його кореляційна функція і спектр, які демонструють властивість довгострокової залежності.

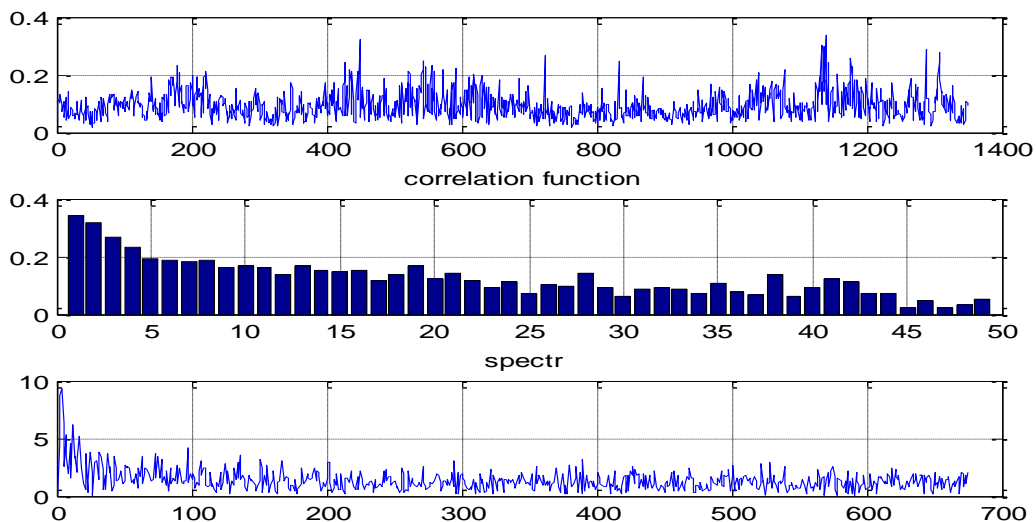


Рисунок 5.23 – Сигнал, його кореляційна функція і спектр

На рисунку 5.24 наведені графіки значень сигналів $X(t)$, віддзеркалених при різній висоті шару, що зондується – 50 м і 200 м. Оцінки параметра Херста, отримані для цих сигналів, відповідно рівні $H_{50} = 0.73$ та $H_{200} = 0.55$.

Методом вейвлет-перетворення були отримані оцінки показника Херста для сигналів, віддзеркалених при різній висоті шару, що зондується. На рисунку 5.25 показані значення параметра Херста H , як функції висоти шару, що віддзеркалює h , розраховані для чисельних даних ехограми, представлені на рисунку 5.22.

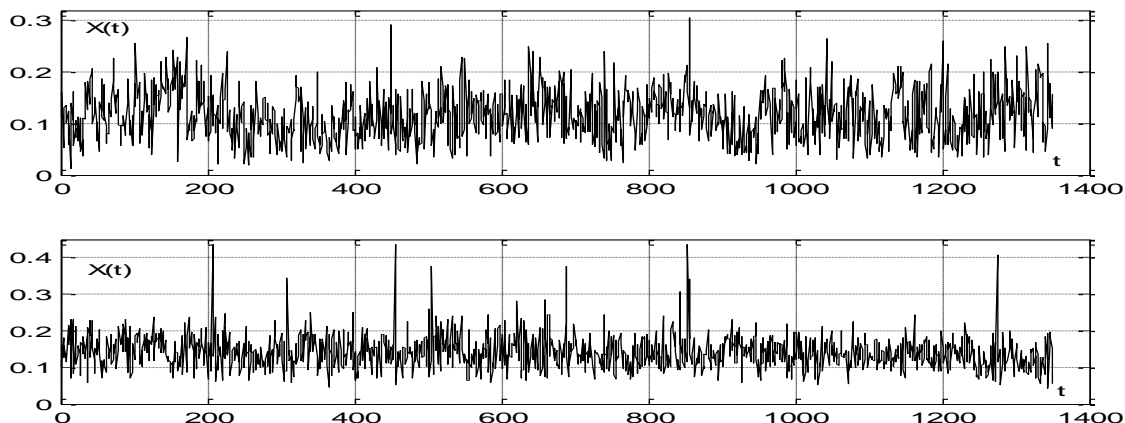


Рисунок 5.24 – Віддзеркалені сигнали при висоті шару, що зондується, 50 м (вгорі) і 200 м (внизу)

Як видно з рисунка, на малих висотах, де впливає близькість будівель, споруд, високих дерев та інших об'єктів мегаполісу, значення показника Херста не перевищують 0.6. Потім, у зв'язку з припливом тепла в нижніх шарах атмосфери, значення показника Херста зростають до 0.75, що говорить про наявність довгострокової залежності в атмосферних процесах на невеликих висотах. У міру збільшення висоти і віддаленості від мегаполісу показник Херста зменшується і прагне до 0.5, що відповідає слабкорельшованим випадковим процесам.

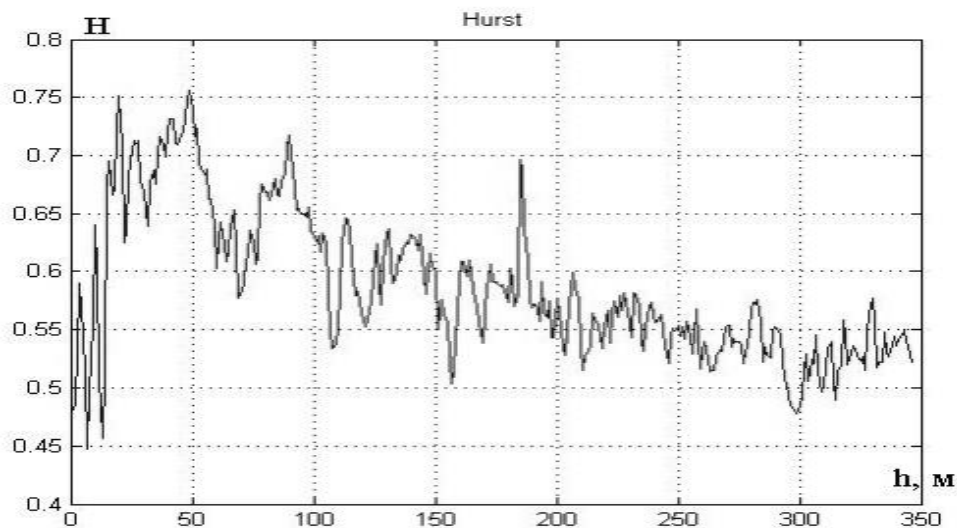


Рисунок 5.25 - Параметр Херста H як функція висоти шару h , що віддзеркалює

Мультифрактальний аналіз, проведений за допомогою ММВП, підтверджує, що зі збільшенням висоти шару атмосфери змінюється кореляційна структура процесів, що позначається у зменшенні значень узагальненого показника Херста $h(q)$. На рисунку 5.26 наведені значення узагальненого показника Херста для сигналів, віддзеркалених при висотах 50, 150 і 200 м.

Значення параметра q в даному випадку змінювалися в діапазоні $1 \leq q \leq 10$. Слід зазначити, що діапазон функції $h(q)$ не змінюється зі збільшенням висоти h . Крім того, дані сигнали не виявляють сильної неоднорідності (якщо порівняти з діапазоном $h(q)$ для біноміального каскаду). Таким чином, можна вважати, що математичними моделями сигналів, віддзеркалених від атмосфери, можуть виступати монофрактальні випадкові процеси.

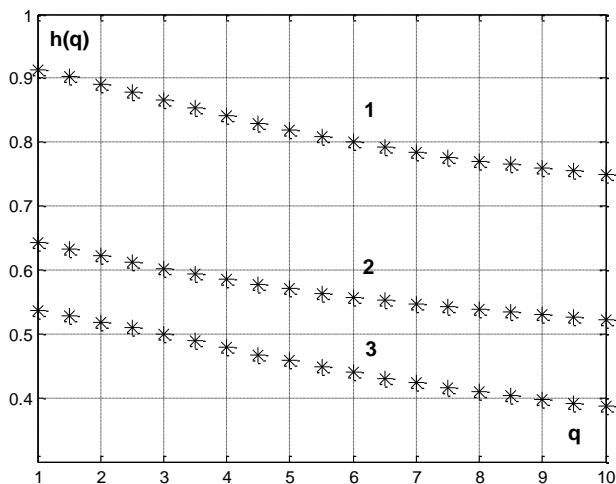


Рисунок 5.26 – Узагальнений показник Херста для сигналів, віддзеркалених при висотах 50 м (лінія 1), 150 м (лінія 2) і 200 м (лінія 3)

Фрактальні властивості часових рядів показань приладів, пов'язаних із сонячною активністю

В останні роки з'явився ряд робіт, присвячених фрактальному аналізу даних, пов'язаних із сонячною активністю [Abramenko, 2008]. Одним з приладів, що реагує на сонячну активність, є надлегкі крутильні терези (КТ). З їх допомогою Ш. Кулон встановив закон взаємодії електричних зарядів, а Г. Кавендіш виміряв величину світової гравітаційної постійної. Крутильні терези відносяться до числа винятково чутливих приладів і до теперішнього часу застосовуються в відповідальних експериментах при вивченні так званих «надслабких взаємодій» в біології і пов'язаних з нею дисциплінах, а також у фізиці для уточнення значення гравітаційної постійної.

У роботах українського радіоастронома А.Ф.Пугача [Пугач, 2009] вперше були проведені тривалі однорідні спостереження за поведінкою надлегких КТ, забезпечених автоматичною системою реєстрації даних. Показання КТ реєструвалися кожну хвилину. Аналіз спостережуваних даних вказує на те, що добова змінність показань КТ не пов'язана зі змінами температури, тиску, умовами освітленості, гравітаційним впливом Сонця. Однак КТ однозначно реагують на сонячні і місячні затемнення, на схід і захід Сонця, на покриття планет Місяцем і т.д. На рис. 5.27 представлені показники КТ за період з 13 по 23 листопада 2010 р.

Дослідження фрактальної структури даних КТ представляє безперечний науковий інтерес. Особливу важливість представляє аналіз спостережень, отриманих протягом одно–двох діб, що дозволить відстежувати зміни фрактальної структури в залежності від зміни сонячної активності. В роботі [Кириченко, 2011 (2)] проведено аналіз часових рядів, отриманих в різні періоди року, який показав наявність явно виражених мультифрактальних властивостей. На рисунку 5.28 показані мультифрактальні спектри, отримані методом МФДФА (зліва) і ММВП (справа), побудовані за рядами дводобових спостережень (2880 значень), типові для лютого, травня та жовтня.

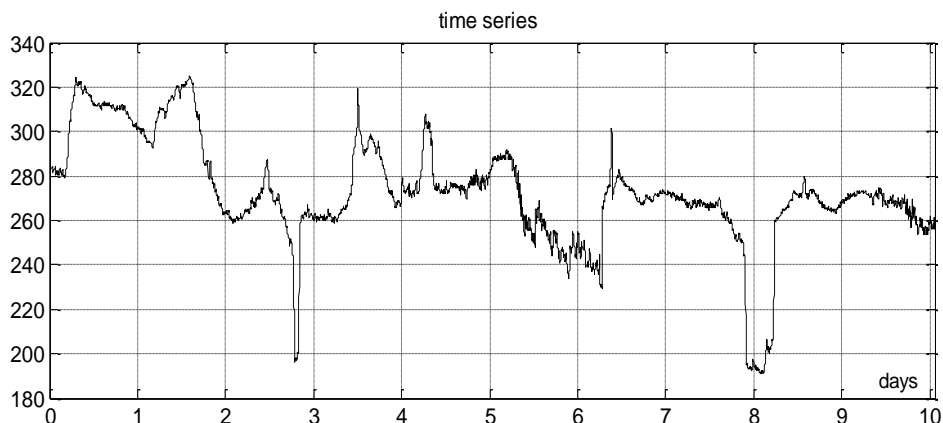


Рисунок 5.27 – Часовий ряд показників КТ

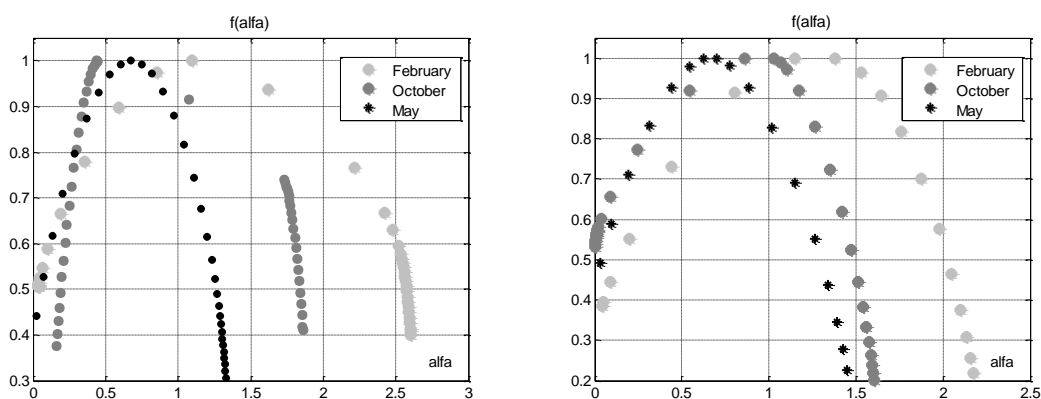


Рисунок 5.28 – Вибіркові функції $f(\alpha)$ для показників КВ, отримані методом МФДФА (зліва) і ММВП (справа)

Результати досліджень показали, що мультифрактальна структура рядів показань КВ змінюється в залежності від пори року. Залежність цієї структури від сонячної активності вимагає подальших досліджень.

Фрактальні властивості температурних рядів.

В роботі [Кириченко, 2011 (3)] розглянуті ряди щоденної температури (максимальне, мінімальне та середнє значення) у місті Києві за 50 років з 1942 по 1992 роки. Дані взяті на спеціалізованому сайті [Архив погоды]. На рисунку 5.29 показаний фрагмент температурного ряду за 1952-1956 рр. (вгорі) і відповідний ряд щоденних приростів (внизу).

Перед проведенням мультифрактального аналізу, необхідно дослідити флуктуаційну функцію $F(\tau)$. Самоподібна поведінка відповідає наявності ділянки з лінійною залежністю. Якщо функція $F(\tau)$ має кілька лінійних ділянок, це передбачає наявність декількох скейлінгів для різних часових інтервалів. На рисунку 5.30 зліва наведено графік $F_2(s)$, побудованої на часовому інтервалі від 2^5 (місяць) до $2^{9.5}$ (два роки) днів.

Візуально очевидно, що графік має дві близьких до лінійних ділянок з різними кутами нахилу. Варто відзначити сильний викид на другій ділянці, який відповідає значенню аргументу $2^{8.5}$ та практично дорівнює одному року, що відповідає річній сезонній складовій процесу. Мультифрактальний

аналіз був проведений окремо для кожної ділянки. Для першої ділянки параметр Херста $H = 0.21$, для другої $H = 0.92$. На рисунку 5.30 справа показані функції мультифрактального спектру для обох ділянок.

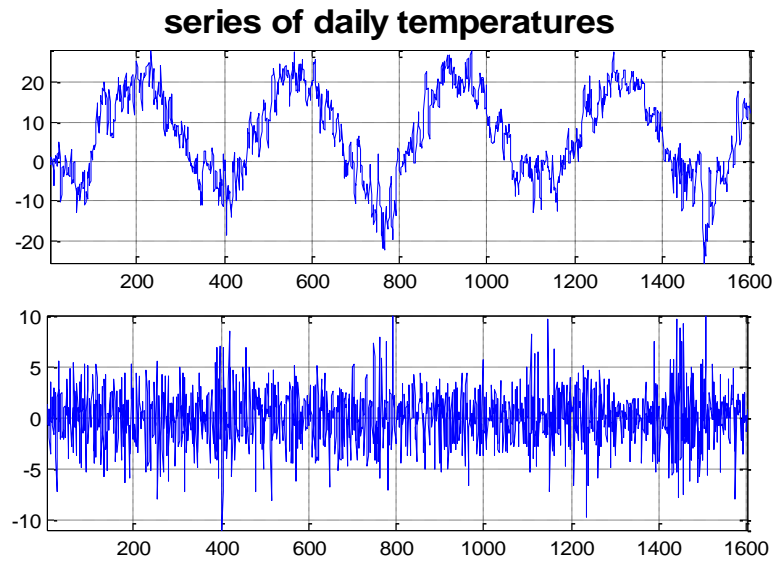


Рисунок 5.29 – Ряд щоденних температур і ряд щоденних приростів

Таким чином, можна зробити висновок, що на інтервалах від двох місяців до півроку (ділянка 1) ряд температурної залежності є антиперсистентним, а при часових значеннях від півроку до півтора років (ділянка 2), ряд має сильну довгострокову залежність. В обох випадках ряди мають слабо виражені мультифрактальні властивості.

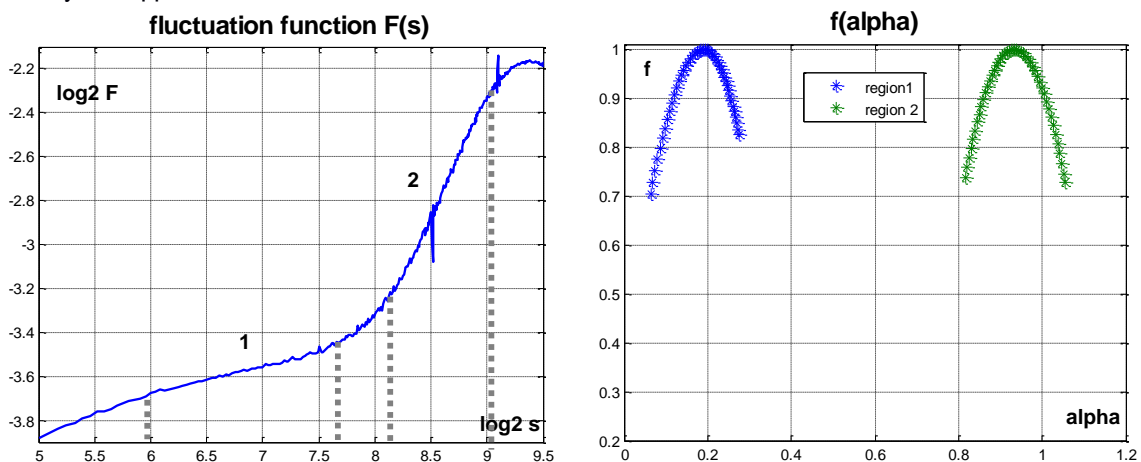


Рисунок 5.30– Флуктуаційна функція $F_2(s)$ для температурного ряду і функції $f(\alpha)$ для ділянок антиперсистентної та персистентної залежності

Мультифрактальний аналіз сейсмічних хвиль.

Одним з відомих прикладів часових рядів, що мають явно виражені фрактальні властивості, є сейсмічні хвилі. Сейсмічні хвилі являють собою хвилі енергії, які пересуваються на землі або інших пружних тілах в результаті процесу, що виробляє низькочастотну акустичну енергію (землетрус, вибух і т. д.).

На сьогоднішній день сейсмічний моніторинг є актуальною проблемою. Однією з практичних цілей сейсмічного моніторингу є створення систем сигналізації та попередження про сейсмічну небезпеку від

тектонічних землетрусів в населених регіонах або навколо великих інженерно-технічних і екологічно небезпечних об'єктів, таких як атомні гідроелектростанції і річкові дамби. Автоматичний сейсмічний моніторинг реального часу є не тільки найважливішим, але одночасно і складним завданням сейсмологічної практики. Існують різні методи детектування сейсмічних сигналів, що базуються на аналізі відношення амплітуд, спектральних характеристиках, вейвлет-аналізі і т.д. [Sabbione, 2010]. Ряд методів заснований на оцінюванні фрактальних характеристик сейсмічних процесів, таких як показник Херста і фрактальна розмірність [Boschetti, 1996; Cao, 2005].

У роботах [Кириченко, 2014; Кириченко, 2015] показано, що сейсмічні сигнали мають мультифрактальні властивості, і запропонований метод детектування сейсмічної події за зміною мультифрактальних характеристик сейсмічного ряду.

Проведені чисельні дослідження показали, що сейсмічні хвилі мають мультифрактальні властивості і різні стадії їх розвитку мають різні функції узагальненого показника Херста. На рисунку 5.31 вгорі представлений сейсмічний часовий ряд, де виділені два вікна: до сплеску активності і після, в цих вікнах узагальнений показник Херста $h(q)$, показаний на рис. 5.31 внизу має великі відмінності.

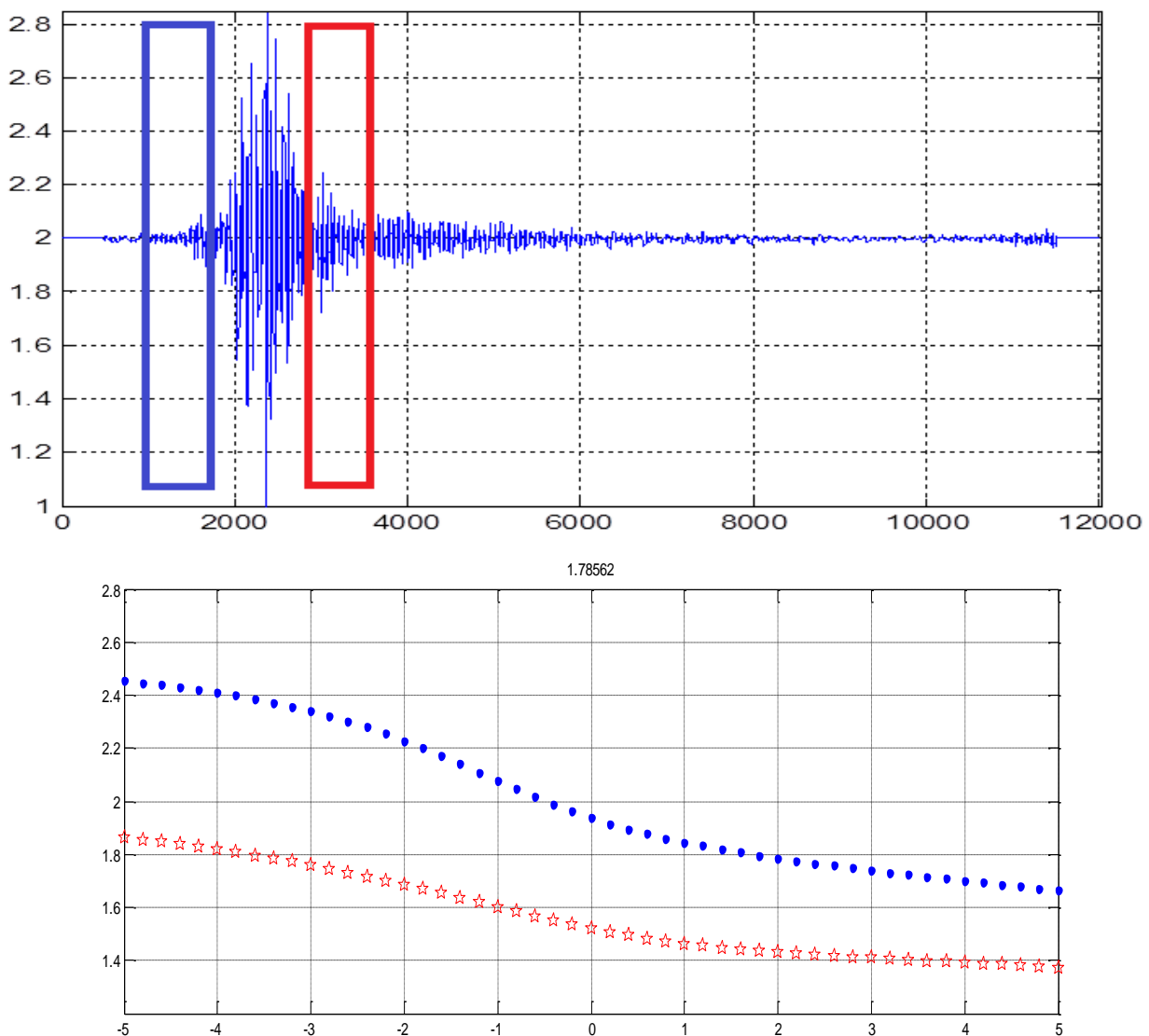


Рисунок 5.31 – Сейсмічний ряд і узагальнений показник Херста до сплеску (нижня лінія) і після (верхня лінія)

Для визначення моменту вступу хвилі був застосований метод «ковзаючого вікна». У досліджуваному часовому ряді виділяється послідовність значень (вікно), і для цих даних оцінюється функція узагальненого показника Херста. Далі вікно пересувається уздовж ряду на задану величину зсуву. Аналізуючи динаміку виникнення ділянок сейсмічного часового ряду з різною мультифрактальною структурою, можна діагностувати і прогнозувати виникнення сейсмічних подій. Значення $h(q)$ для різних «вікон» представлені на рисунку 5.32. значення параметра q в даному випадку змінювалися в діапазоні $1 \leq q \leq 10$.

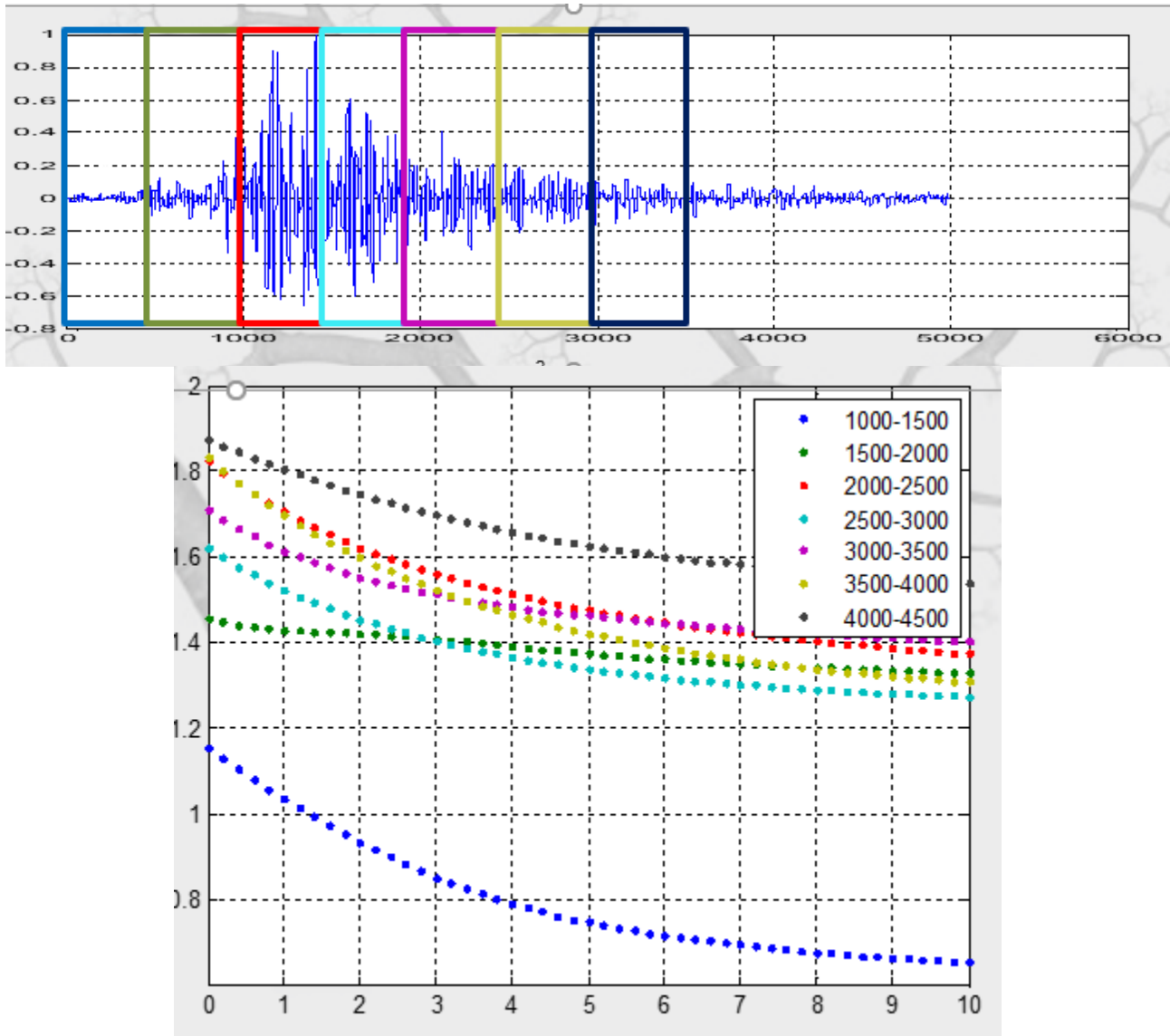


Рисунок 5.32 – Сейсмічний ряд і узагальнений показник Херста для різних виділених «вікон»

5.2.4 Аналіз самоподібних і мультифрактальних властивостей часових рядів активностей спільнот в соціальних мережах

В даний час соціальні мережі стали важливою частиною життя. Люди використовують соціальні мережі, щоб залишатися на зв'язку з друзями, знайомитися з новими людьми, дізнаватися нову інформацію і так далі. Головна причина – спілкування і збереження відносин. Також соціальні мережі активно використовуються в бізнесі для реклами і просування продуктів і брендів, для створення нового

бізнесу. Завдяки розвиненим соціальним мережам активно створюються інтерактивні платформи, де користувачі спільно використовують, створюють і обговорюють контент, створований користувачами.

В останні роки з'явилися дослідження динаміки спільнот в соціальних групах, які показують, що відповідні часові ряди мають властивості самоподібності [Yang, 2009; Rybski, 2012; Qingyun, 2016]. В роботі [Кириченко, 2017] був проведений порівняльний фрактальний аналіз для двох груп в соціальній мережі Facebook, знайденим за ключовими словами, пов'язаних з кіберзагрозами. Для проведення досліджень в мережі були обрані дві групи ThreatPost і Threat Signal, кожна чисельністю 13980 і 84375 користувачів відповідно. Для кожної з цих соціальних груп були зняті дані за останні п'ять років про кількість лайків, коментарів та рівні залученості (показник рівня залученості аудиторії в активності групи вимірюється в процентному співвідношенні дій користувачів до охоплення аудиторії).

На рис. 5.33 зліва показані часові ряди щоденної кількості лайків для обох груп. Фрактальний аналіз показав, що часові ряди показників цих груп мають сильні мультифрактальні властивості. На рис. 5.33 справа представлені значення узагальненого показника Херста для цих рядів. Обидва ряди мають фрактальні властивості та є персистентними ($H_1, H_2 > 0.5$), проте ряд лайків для групи Threat Signal має значно більшу статистичну неоднорідність, що проявляється в значно більшому діапазоні величини $\Delta h(q)$.

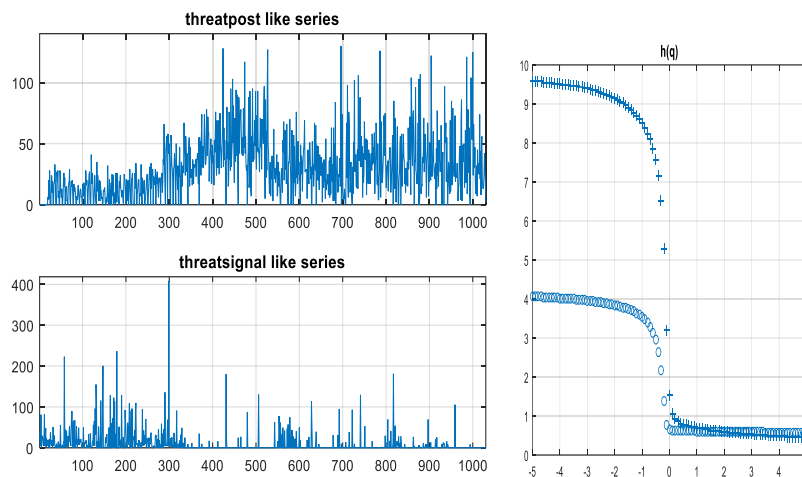


Рисунок 5.33 – Зліва: часові ряди лайків для груп; справа: відповідні значення $h(q)$ (+ – група Threat Post, o – Threat Signal)

Дослідження показали, що ряди лайків досить сильно корелюють з рядами рівня залученості, тому їх відповідні мультифрактальні характеристики дуже близькі. Ряди кількості коментарів (рис. 5.34, зліва), на відміну від рядів лайків, також мають фрактальні властивості, але мають досить близьку між собою мультифрактальну структуру (рис. 5.34, справа).

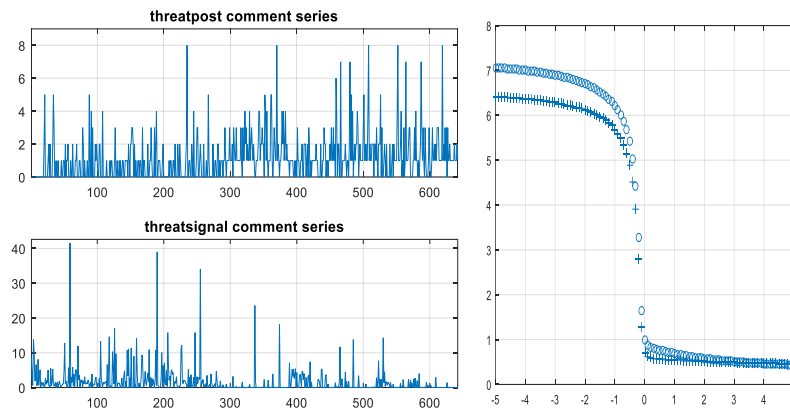


Рисунок 5.34 – Зліва: часові ряди коментарів для груп; справа: відповідні значення $h(q)$ (+ – група Threat Post, o - Threat Signal)

Можна припустити, що механізм генерації коментарів, який формує фрактальну структуру часового ряду, досить сильно відрізняється від механізму проставлення лайків. Таким чином, проведені в роботі дослідження підтвердили, що багато часових рядів показників активності користувачів соціальних мереж мають фрактальні властивості і застосування фрактального аналізу дозволяє виявити відмінності і виявити характерні риси динаміки різних соціальних груп.

Одним з напрямків досліджень даних в соціальних мережах і фінансовому секторі є проведення аналізу відносин між інформацією про біткойни, що міститься в соціальних мережах, і ціною біткойну. Біткойн (Bitcoin) – децентралізована платіжна система електронних валют, інновація в області ІТ, яка використовує складні криптографічні методи для підпису транзакцій і визначення контролю над засобами. Біткойн є одноранговою системою, в якій користувачі здійснюють транзакцію безпосередньо, без необхідності посередника і в яких транзакції записуються для подальшої перевірки всіма вузлами в публічній розподіленій книзі, званою Blockchain.

В роботі [Lyudmyla, 2017] був проведений порівняльний фрактальний аналіз для трьох груп в соціальній мережі і курсу криптовалюти біткойн. Для проведення досліджень в мережі Facebook були обрані три соціальні групи: Bitcoin Product / service чисельністю 196 113 користувачів, Bitcoin Finance company чисельністю 70195 користувачів, група Blockchain – 61805 користувачів. Для періоду часу з 17.10.2016 по 30.06.2017 було записано дані лайків, репостів для кожної групи і курсу криптовалюти Bitcoin.

На рис. 5.35 показаний ряд значень криптовалюти Bitcoin в період з 17 10 2016 по 30 05 2017 і відповідно ряди Bitcoin_like та blockchain_likes.

Перед проведенням мультифрактального аналізу, були досліджені флуктуаційні функції $F(\tau)$ часових рядів. Самоподібній поведінці відповідає наявність ділянки з лінійною залежністю. На рис.5.36 наведено графік $F(\tau)$ для часового ряду Bitcoin_like. Отриманий графік досить добре апроксимується прямою лінією з кутом нахилу, що визначає показник Херста $H=0.68$. Для інших досліджуваних рядів флуктуаційні функції виглядають аналогічно.

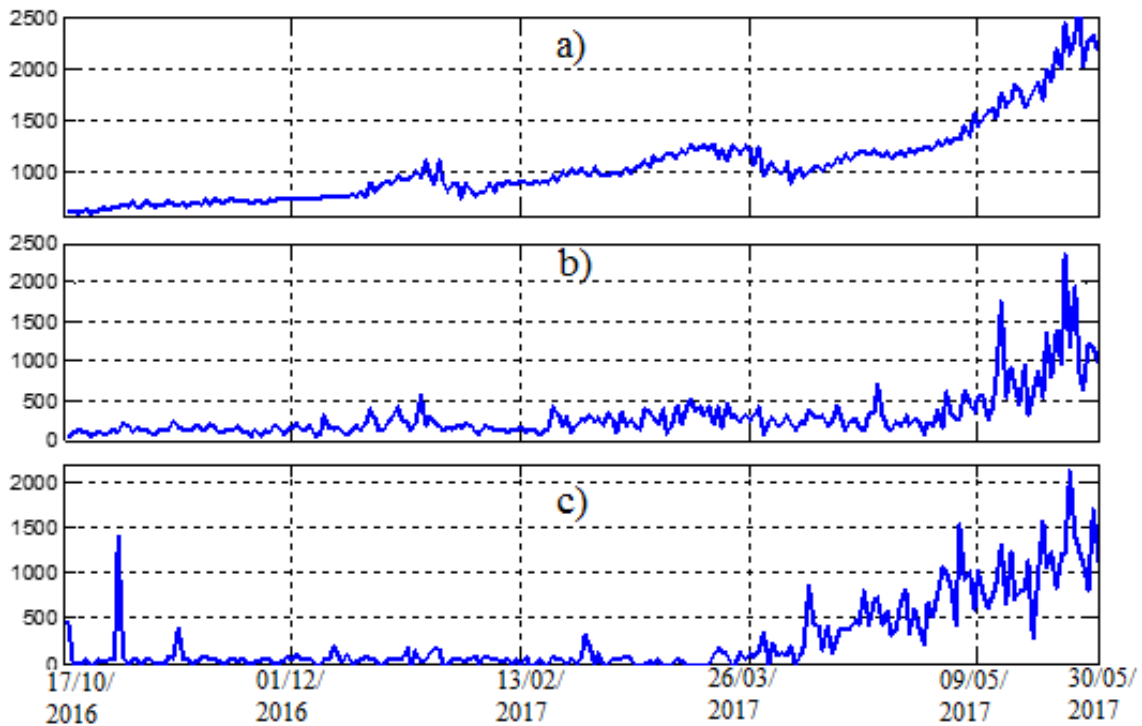


Рисунок 5.35 – Часові ряди Bitcoin (a), Bitcoin_like (b) та blockchain_like (c)

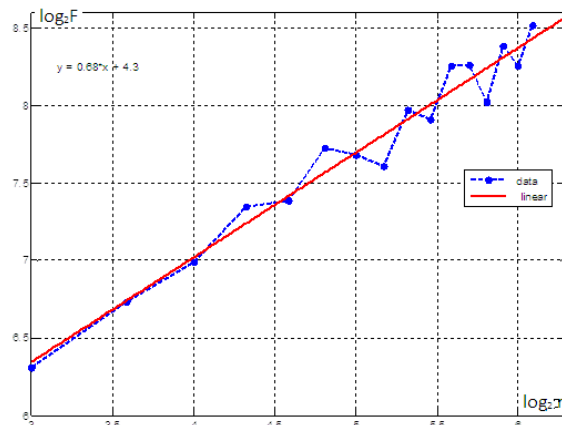


Рисунок 5.36 – Флуктуаційна функція для ряду Bitcoin_like

Після дослідження флуктуаційних функцій для розглянутих рядів вартості біткойну та активностей груп, пов'язаних з цією криптовалютою, були проведені дослідження мультифрактальних властивостей цих рядів. На рис. 5.37 представлені функції узагальненого показника Херста для рядів, показаних на рис. 5.35.

Проведені дослідження показали, що ряди, які мають кореляційну залежність, мають схожу мультифрактальну структуру. Кореляційний аналіз взаємозв'язку рядів біткойнів та активностей соціальних груп показав, що часові ряди Bitcoin та Bitcoin_like мають сильну кореляцію і близькі значення мультифрактальних характеристик, а слабкий зв'язок біткойну та ряду Blockchain_like проявляється у відмінності мультифрактальної структури.

Дослідження показало наявність мультифрактальних властивостей для всіх рядів активностей спільнот. У табл.5.2 наведені значення $h(q)$ при $q = -5, 5$ і значення показника Херста H для досліджених рядів активностей спільнот.

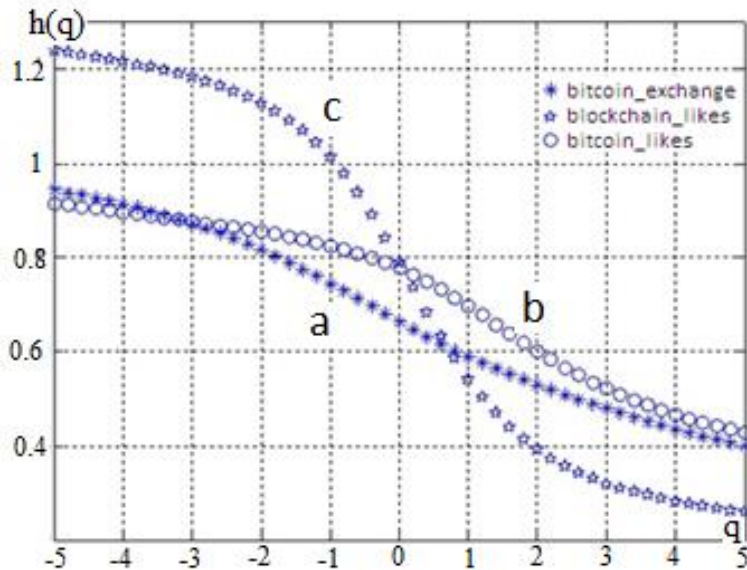


Рисунок 5.37 – Узагальнений показник Херста рядів Bitcoin (a), Bitcoin_like (b), blockchain_like (c)

Таблиця 5.2. – Мультифрактальні характеристики для рядів активностей спільнот

	$h(q = -5)$	$h(q = 5)$	H
Bitcoin_likes	0.78	0.42	0.54
Bitcoin_reposts	0.75	0.38	0.55
BitcoinF_likes	0.95	0.52	0.63
BitcoinF_reposts	1.15	0.43	0.64
Blockchain_likes	1.23	0.25	0.41
Blockchain_reposts	1.41	0.23	0.45

Таким чином, фрактальний аналіз часових рядів показав наявність самоподібних і мультифрактальних властивостей як для ряду криптовалюти, так і для рядів активностей соціальних груп. Результати продемонстрували, що ряди, які мають кореляційну залежність, мають подібну мультифрактальну структуру: чим більше кореляція між фрактальними рядами, тим більше схожі їх фрактальні характеристики. Також дослідження показали, що фрактальна структура часових рядів криптовалюти і діяльності соціальних спільнот і, як наслідок, динаміка їх розвитку взаємопов'язані.

5.3 Перевірка гіпотези про наявність моно- і мультифрактальних властивостей

Розрізнення властивостей моно- і мультифрактального стохастичного процесу за часовими рядами малої довжини є непростим завданням. У роботах [Кириченко, 2011 (2); Kirichenko, 2014] запропоновано метод, що дозволяє приймати або відкидати гіпотезу про наявність монофрактальних властивостей для часового ряду. В основі методу лежать дослідження статистичних характеристик вибірових значень узагальненого показника Херста $h(q)$, які отримані методом мультифрактального детрендованого флуктуаційного аналізу (див. розділ 4).

Проведений аналіз вибірових законів розподілу $h(q)$ показав, що оцінки $h(q)$ мають нормальний розподіл, параметри якого залежать від довжини реалізації та обраних значень величини q . Для реалізацій мультифрактальних процесів величина $\Delta h = h(q1) - h(q2)$ має набагато більший діапазон значень, ніж для реалізацій самоподібних процесів. Значення випадкової величини Δh можна використовувати в якості статистичного критерію для прийняття гіпотези про монофрактальність ряду. Гіпотеза приймається, якщо отримане значення потрапляє в область допустимих значень, чисельно розрахованих для модельних монофрактальних процесів.

В роботі [Kirichenko, 2014] проведено ряд досліджень з виявлення моно- і мультифрактальних властивостей для часових реалізацій різної природи. У таблиці 5.3 представлені результати аналізу вибірових значень узагальненого показника Херста $\hat{h}(q)$ для електроенцефалограм лабораторних тварин для різних фаз сну, фінансових рядів – індексу Доу-Джонса і цін на золото за 2004-2008 рр. і ряду середніх щоденних температур у Києві за 2000-2006 рр. Критичні значення Δh наведені на основі розрахункових даних для рівня значущості $\alpha = 0.05$ і відповідної довжини ряду.

Результати досліджень свідчать про те, що неоднорідність фрактальної структури визначається не тільки природою ряду, але і його локальними характеристиками. Виявивши наявність або відсутність мультифрактальних властивостей, ми можемо підібрати більш ефективну математичну модель випадкового процесу, що генерує аналогічні часові реалізації. Варто також відзначити, що зазвичай математичні моделі монофрактальних випадкових процесів мають менш громіздкий математичний апарат і є більш простими в реалізації, ніж моделі мультифрактальних процесів.

Таблиця 5.3 – Перевірка властивості монофрактальності

ряд	довжина	вбірове значення \hat{h}	критичне значення Δh	
ЕЕГ (неспаня)	1000	0.1743	0.0859	мульти
ЕЕГ (швидкий сон)		0.169		мульти
ЕЕГ (повільний сон)		0.068		моно
Індекс Доу-Джонса	500	0.2416	0.1248	мульти
Ціни на золото		0.0991		моно
Ряд температур	2000	0.0264	0.07312	моно

Висновки за розділом 5

1. Розробленими в роботі методами досліджені реалізації інфокомунікаційного трафіку. Показано наявність як довгострокової залежності (властивості самоподібності), так і короткострокової пам'яті (авторегресійної складової), що дозволяє уявити реалізацію трафіку у вигляді суми реалізацій самоподібного процесу і процесу авторегресії.

2. Фрактальний аналіз на основі R/S-аналізу зміни показника Херста для часових рядів споживання електроенергії в Україні показав наявність короткострокової і довгострокової пам'яті даних випадкових процесів. Часовий інтервал, на якому простежується довгострокова залежність, лежить в діапазоні від тижня до року. Таким чином, для математичного моделювання та прогнозування процесів

виробництва і споживання електроенергії необхідно використовувати стохастичні процеси, що мають як довгострокову, так і короткострокову залежність.

3. Досліджено фрактальні властивості електроенцефалограм лабораторних тварин, що знаходяться в різних фазах неспання і сну. Показано, що значення показника Херста, які відповідають кожній фазі, істотно відрізняються, і оцінювання показника Херста дозволяє визначати фізіологічний стан тварини в режимі реального часу. В цьому випадку оптимально використовувати метод оцінювання, заснований на швидкому вейвлет-перетворенні.

4. Проведено аналіз фрактальної динаміки макроекономічних фінансових показників і курсів валют, який показав, що зміна динаміки показника Херста і фрактальної розмірності служить індикатором нестабільного стану системи. Результати досліджень можуть бути використані для розробки інструментів діагностики і прогнозування критичних явищ для фрактальних рядів різної природи.

5. Досліджені часові ряди щоденних значень фінансових показників різних типів: котирування валюти, фінансові індекси, акції компаній, і показано, що вони мають мультифрактальні властивості. Показано, що мультифрактальні властивості фінансових часових рядів в передкризовий період і період спаду кризи істотно відрізняються, зокрема, за діапазоном узагальненого показника Херста. Застосування віконних методів аналізу фрактальної структури дозволяє виявити зміну мультифрактальних характеристик, яка є індикаторами кризового стану фінансового ринку.

8. Досліджені мультифрактальні властивості електрокардіограм і енцефалограм. Показано, що значення функції мультифрактального спектра для здорових людей і пацієнтів, що мають серцеву аритмію, істотно відрізняються. Таким чином, мультифрактальний аналіз електрокардіологічних сигналів може бути використаний для визначення функціональних змін в діяльності серця. Досліджено зміни мультифрактальних характеристик ЕЕГ людини, коли вона робить будь-яку фізичну дію, і коли вона просто представляє, що вона це робить. Результати можуть бути використані для аналізу і розпізнавання різних фізіологічних станів організму.

9. Були проведені дослідження і вперше показана мультифрактальна структура наступних природних процесів: акустичних сигналів, віддзеркалених атмосферним шаром; рядів показань надлегких крутильних терез, що реагують на сонячну активність; рядів щоденної температури (максимальне, мінімальне та середнє значення) у місті Києві.

10. Проведені дослідження показали, що сейсмічні хвилі мають мультифрактальні властивості та різні стадії їх розвитку мають різні мультифрактальні характеристики. Результати можна використовувати для розробки методики детектування сейсмічних сигналів, заснованої на зміні мультифрактальних характеристик.

11. Досліджено динаміку співтовариств в соціальних групах. Проведені дослідження підтвердили, що часові ряди показників активності користувачів соціальних мереж мають фрактальні властивості і застосування фрактального аналізу дозволяє виявити відмінності і характерні риси динаміки різних соціальних груп.

12. Проведено аналіз відносин між інформацією про біткойн, що міститься в соціальних мережах, і ціною біткойна. Порівняльний фрактальний аналіз для спільнот соціальної мережі і курсу криптовалюти показав наявність самоподібних і мультифрактальних властивостей як для ряду криптовалюти, так і для рядів активностей соціальних груп. Результати продемонстрували, що фрактальна структура часових рядів криптовалюти і діяльності соціальних спільнот і, як наслідок, динаміка їх розвитку взаємопов'язані.

13 Представлені результати досліджень з виявлення моно- і мультифрактальних властивостей часових рядів різної природи. Виявивши наявність або відсутність мультифрактальних властивостей, можливо підібрати більш ефективну математичну модель випадкового процесу, що генерує аналогічні часові реалізації.

Література до розділу 5

- [Abramenko, 2008] Abramenko, V. I. Multifractal Nature of Solar Phenomena. Solar Physics Research Trends, Edited by P. Wang, Nova Publisher, 2008. pp. 95–136.
- [Alghawli, 2015] Alghawli, Abed Saif, Kirichenko, Lyudmyla. Multifractal properties of bioelectric signals under various physiological states. International Journal «Information Content And Processing», Vol.2(2), 2015. pp.138-163.
- [Bassingthwaighte, 1994] Bassingthwaighte, J.B., Liebovitch, L.S., West, B.J. Fractal Physiology. Oxford University Press, New York, 1994.
- [Boschetti, 1996] Boschetti, F., Dentith, M. D. A fractal-based algorithm for detecting first arrivals on seismic traces. Geophysics, V. 61, N. 4, 1996. pp. 1095-1102.
- [Cao, 2005] Cao, M.-S., Ren, Q.-W., Wang, H.-H., Gong, T. A method of detecting seismic singularities using combined wavelet with fractal. Chinese journal of Geophysics, Vol.48, No. 3, 2005, pp. 740-749.
- [Ching, 2007] Ching, Emily S.C., Tsang, Yue-Kin. Multifractality and scale invariance in human heartbeat dynamics. Physical Review E, Vol. 76, 2007, 041910.
- [Cont, 2004] Cont, R., Tankov, P. Financial modelling with jump processes. Chapman & Hall, CRC Press, 2004. – 527 p
- [Crovella, 1997] Crovella, M. E., Bestavros, A. Self-similarity in Word Wide Web traffic: evidence and possible causes. IEEE/ACM Transactions on Networking, № 6 (5), 1997. pp. 835–846.
- [Dabi-Prashad, 2009] Dabi-Prashad, O., Kirichenko, L. Investigation of Time Series of Original Values of Currency Rates Measured on Small Time Frames on FOREX Using Methods of Chaos Theory. Radioelectronics & Informatics, №4, 2009. pp. 18–24.
- [Harikrishnan, 2013] Harikrishnan, K.P., Misra, R., Ambika, G. Can the multifractal spectrum be used as a diagnostic tool? Chaotic Modeling and Simulation, Vol. 1, 2013. pp. 51-57.
- [Ivanov, 2001] Ivanov, P., Amaral, L. N., Goldberger, A. L., Havlin, S., Rosenblum, M.G., Stanley, H., Struzik, Z.R. From $1/f$ noise to multifractal cascades in heartbeat dynamics. Chaos, Vol. 11, № 3, 2001. pp. 641–652.
- [Kirichenko, 2012] Kirichenko, L.O., Ostroverkh, N.V., Timko, A.V. Analysis of multifractal properties of chaotic maps. Восточно-Европейский журнал передовых технологий. №3/9 (57), 2012. с. 53–58.
- [Kirichenko, 2014] Kirichenko, L. The method of distinction monofractal and multifractal process from time series. Системні технології. №6 (95), 2014. сс. 121-127.
- [Leland, 1994] Leland, W. E., Taqqu, M. S., Willinger, W., Wilson, D. V. On the self-similar nature of ethernet traffic. IEEE/ACM Transactions of Networking, № 2(1), 1994. pp. 1–15.
- [Lyudmyla, 2017] Lyudmyla, K., Vitalii, B., Tamara, R. Fractal time series analysis of social network activities. 2017 4th International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications. Science and Technology (PIC S&T), Kharkov, Ukraine, 2017. pp. 456-459.
- [Park, 2000] Park, K., Willinger, W. Self-similar network traffic and performance evaluation. IEEE/ACM Transactions on Networking, № 6(3), 2000. pp. 65-84.
- [Philippe, 2001] Philippe, F., Henri, K. Is there chaos in the brain? Concepts of nonlinear dynamics and methods of investigation. Life Sciences, Vol. 324, 2001. pp. 773–793.
- [PhysioNet] PhysioNet: the research resource for complex physiologic signals [Электронный ресурс] – Режим доступа: www.physionet.org.
- [Qingyun, 2016] Qingyun, L., Zhao, X., Willinger, W., Wang, X., Zhao, B.Y., Zheng, H. Self-Similarity in Social Network Dynamics. ACM Trans. Model. Perform. Eval. Comput. Syst., Vol. 2, No. 1, Article 5, 2016.

- [Rybski, 2012] Rybski, D., Buldyrev, S.V., Havlin, S., Liljeros, F., Makse, H.A. Communication activity in a social network: relation between long-term correlations and inter-event clustering Scientific reports, №2, Article 560, 2012. Doi: 10.1038/srep00560.
- [Ryu, 2001] Ryu, B. Fractal network traffic: from understanding to implications. IEEE/ACM Transactions on Networking, № 9, 2001. pp. 634– 649.
- [Sabbione, 2010] Sabbione, J., Velis, D. Automatic first-breaks picking: New strategies and algorithms. Geophysics, V. 75, N. 4, 2010. pp. V67–V76.
- [Sheluchin, 2007] Sheluchin, O. I., Smolskiy, S. M., Osin, A. V. Self-Similar Processes in Telecommunications. New York: John Wiley & Sons, 2007, 320 p.
- [Willinger, 1996] Willinger, W., Taqqu, M. S., Erramilli, A. A. Bibliographical guide to self-similar traffic and performance modeling for modern high-speed network in «Stochastic networks: theory and applications». Oxford: Clarendon Press, 1996. 286 p
- [Yang, 2009] Yang, C.C., Sageman, M. Analysis of terrorist social networks with fractal views. Journal of Information Science, V. 35, Issue 3, 2009. pp. 299–320.
- [Архив погоды] Архив погоды по городам СНГ [Электронный ресурс]: http://thermo.karelia.ru/weather/w_history.php.
- [Дейнеко, 2010] Дейнеко, Ж. В., Кирий, В. В., Кіриченко, Л. О. Дослідження фрактальних властивостей рядів виробництва та споживання електроенергії в Україні. Наукові вісті НТУУ «КПІ», № 5 (73), 2010. Сс. 41–47.
- [Кириченко, 2006] Кириченко, Л. О., Радивилова, Т. А. Исследование долгосрочной зависимости сетевого трафика методом R/S-анализа. Автоматизированные системы управления и приборы автоматики, Вып. 135, 2006. сс. 51–55.
- [Кириченко, 2009] Кириченко, Л. О., Радивилова, Т. А. Применение фрактального анализа для обнаружения разладки временного ряда. Компьютерные науки и технологии: первая Междунар. науч.-техн. конф., 8-10 окт. 2009 г.: сб. Трудов, Ч.2, Белгород, 2009. сс. 160–163.
- [Кириченко, 2010 (1)] Кириченко, Л. О., Гранкина, Н. А., Кузьмина, О. А., Разина, М. В. Фрактальный анализ электроэнцефалограмм для состояний бодрствования и сна. Интеллектуальні системи прийняття рішень і проблеми обчислювального інтелекту (ISDMCI'2010): міжнар. наук. конф., 17–21 трав. 2010 р.: матеріали конф., Т.2, Євпаторія, 2010. сс. 381–383.
- [Кириченко, 2010 (2)]. Л. О. Кириченко, О. А. Кузьмина, С. Г. Удовенко. Мультифрактальный анализ нестабильных финансовых рядов . Системы обработки інформації. – 2010. – Вип. 6 (87). – С. 194–198
- [Кириченко, 2011 (1)] Кириченко, Л. О., Дейнеко, Ж. В. Анализ самоподобных и мультифрактальных свойств временных рядов, основанный на дискретном вейвлет-преобразовании. Радиоэлектроника и информатика, № 3, 2011. сс. 69–74.
- [Кириченко, 2011 (2)] Кириченко, Л. О. Сравнительный мультифрактальный анализ временных рядов методами детрендированного флуктуационного анализа и максимумов модулей вейвлет-преобразования. Автоматизированные системы управления и приборы автоматики, Вып. 157, 2011. сс.66–77.
- [Кириченко, 2011 (3)] Кириченко, Л. О. Исследование выборочных характеристик, полученных методом мультифрактального флуктуационного анализа. Вісник НТУУ «КПІ». Інформатика, управління та обчислювальна техніка: зб. наук. пр., № 54, 2011. сс.101–111.
- [Кириченко, 2014] Кириченко, Л.О., Кобицкая, Ю.А., Хабачёва, А.Ю. Детектирование сейсмических сигналов с помощью мультифрактального анализа. Матеріали 16 міжнародної науково-технічної конференції «Системний аналіз інформаційних технологій» (САІТ-2014), Київ 19-20 квітня, 2012. с. 99.

- [Кириченко, 2015] Кириченко, Л.О., Хабачёва, А.Ю, Иванисенко, И.Н. Исследование зашумленных мультифрактальных рядов. Материалы международной научно-технической конференции “Информационные системы и технологии”, Харьков, ХНУРЭ, 21-27 сентября, 2015. сс. 62-63.
- [Кириченко, 2017] Кириченко, Л., Радивилова, Т., Барановский, А. Обнаружение киберугроз с помощью анализа социальных сетей. International journal "Information Technologies & Knowledge", Volume 11, Number 1, 2017. pp.23-48.
- [Леонидов, 2010] Леонидов, В. И., Семенец, В. В. Формализация описания эхограмм акустического зондирования атмосферы в зоне мегаполиса. Радиотехника, X., Вып. 160, 2010. сс. 177–183.
- [Мандельброт, 2002] Мандельброт, Б. Фрактальная геометрия природы. М., Ин-т компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
- [Митилино, 2001] Митилино, С. Фрактальная катастрофа TCP/IP [Электронный ресурс] Компьютерное обозрение, № 9, 2001. Режим доступа: <http://itc.ua/node/5571>.
- [Петерс, 2004] Петерс, Э. Фрактальный анализ финансовых рынков. Применение теории хаоса в инвестициях и экономике : пер. с англ. М : Интернет-трейдинг, 2004. – 304 с.
- [Пугач, 2009] Пугач, А. Ф. Наблюдения астрономических феноменов с помощью крутильных весов. Physics of consciousness and life, cosmology and astrophysics, №2, 2009. сс. 30–51.
- [Федер, 1991] Федер, Е. Фракталы. М.: Мир, 1991.
- [Шелухин, 2011] Шелухин, О. И. Мультифракталы. Инфокоммуникационные приложения. М. : Горячая линия – Телеком, 2011. – 576 с.
- [Шредер, 2005] Шредер, М. Фракталы, хаос и степенные ряды. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. – 528 с.