

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

І.П. Захаров, І.О. Милютченко

**ОСНОВИ АНАЛІЗУ
ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ**

для студентів спеціальності

152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка»

РЕКОМЕНДОВАНО
Вченою радою ХНУРЕ
Протокол № 6/13 від 02.07.2021 р.

Харків 2021

УДК 621. 3.011.1(07)
З ХХ

12 Захаров І.П., Милютченко І.О. Основи аналізу лінійних електричних кіл: Навчальний посібник для студентів ЗВО. / І.П.Захаров, І.О. Милютченко. Харків: ХНУРЕ, 2021. – 104 с.

У посібнику викладено основні методи аналізу електричних кіл постійного і синусоїдного струму з активними і пасивними елементами. Розглянуто закони теорії електричних кіл, еквівалентні перетворення схем, методи визначення динамічних характеристик лінійних електричних кіл.

Запропоновано велику кількість варіантів індивідуальних завдань і прикладів їх виконання з кожного розділу, які призначені для проведення практичних занять, контрольних робіт, проміжного та підсумкового контролю успішності здобувачів вищої освіти.

Рекомендований як навчальний посібник для студентів усіх форм навчання спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка».

Іл. 61. Табл. 10. Бібліогр. 7 наймен.

Рецензенти:

Олейніков А.М., канд. техн. наук, професор кафедри комп'ютерної радіоінженерії та систем технічного захисту інформації ХНУРЕ;

Єгоров А.Б., канд. техн. наук, професор кафедри інформаційно-вимірювальних технологій ХНУРЕ.

ISBN 978-966-659-324-8

DOI 10.30837/978-966-659-324-8

© І.П. Захаров, І.О. Милютченко 2021

© Харківський національний
університет радіоелектроніки, 2021

ЗМІСТ

Скорочення та умовні позначки	5
Вступ.....	6
1 ГОЛОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ	7
1.1 Елементи електричного кола	8
1.2 Схема електричного кола та її компоненти.....	11
1.3 Основні закони електричних кіл	11
1.4 Потужність та енергія електричного кола.....	14
1.5 Умова передачі максимальної потужності у навантагу	14
1.6 Контрольні запитання та завдання	15
2 ЕКВІВАЛЕНТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ СХЕМ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ...	16
2.1 Послідовне з'єднання опорів	16
2.2 Паралельне з'єднання опорів.....	16
2.3 Змішане з'єднання опорів	17
2.4 З'єднання типу «зірка» і «трикутник»	18
2.5 Еквівалентні перетворення з'єднань активних елементів	21
2.6 Контрольні запитання.....	23
2.7 Контрольні завдання	24
2.8 Приклади виконання контрольних завдань.....	30
3 МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ	35
3.1 Метод рівнянь Кірхгофа.....	35
3.2 Метод контурних струмів	38
3.3 Метод вузлових напруг	40
3.4 Метод накладання (суперпозиції)	42
3.5 Контрольні запитання.....	44
3.6 Контрольні завдання	44
3.7 Приклади виконання контрольних завдань.....	47
4 КОЛА СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ	52
4.1 Параметри синусоїдних коливань	52
4.2 Векторне подання синусоїдного струму.....	54
4.3 Синусоїдний струм в пасивних елементах кола	55
4.4 Метод комплексних амплітуд.....	60
4.5 Потужність у колі синусоїдного струму.....	66

4.6 Умова передачі максимальної активної потужності від джерела до приймача	68
4.7 Контрольні запитання.....	68
4.8 Контрольне завдання	70
4.9 Приклад виконання контрольного завдання	73
5 ДИНАМІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ	75
5.1 Динамічні характеристики та їх взаємозв'язок.....	75
5.2 Складання диференціального рівняння кола	78
5.3 Частотні характеристики кіл синусоїдного струму.....	82
5.4 Операторна передатна функція	86
5.5 Часові характеристики.....	87
5.6 Контрольні запитання.....	90
5.7 Контрольне завдання	91
5.8 Приклад виконання контрольного завдання	94
Перелік джерел посилання	98
Глосарій	99

СКОРОЧЕННЯ ТА УМОВНІ ПОЗНАКИ

АФХ	амплітудно-фазова характеристика
АЧХ	амплітудно-частотна характеристика
ВАр	вольт-ампер реактивний
ВАХ	вольт-амперна характеристика
ДХ	динамічна характеристика
ЕРС	електрорушійна сила
КЗ	коротке замикання
ККД	коефіцієнт корисної дії
КПФ	комплексна передатна функція
ЛЕК	лінійне електричне коло
ОПФ	операторна передатна функція
СП	смуга пропускання
ФНЧ	фільтр нижніх частот
ФВЧ	фільтр верхніх частот
ФЧХ	фазочастотна характеристика
ХХ	холостий хід
ЧХ	частотна характеристика

ВСТУП

Аналіз лінійних електричних кіл значною мірою визначає зміст початкової дисципліни «Основи електротехніки та електроніки» (ОЕТЕ) та інших споріднених дисциплін у програмах здобувачів вищої освіти з декількох спеціальностей. Дисципліна ОЕТЕ є обов'язковою компонентою освітніх програм «Технічна експертиза», «Якість продукції, процесів та програмного забезпечення» і належить до циклу базової (професійної) підготовки студентів спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка».

Матеріал посібника складено на підставі багаторічного досвіду викладання та написання навчально-методичної літератури з цієї та споріднених дисциплін на кафедрі комп'ютерної радіоінженерії та систем технічного захисту інформації та кафедрі інформаційно-вимірювальних технологій ХНУРЕ. Зміст посібника пов'язаний, насамперед, з навчальними книгами [1–4], стандартами [5, 6], а також з довідковими джерелами, зокрема [7].

У посібнику викладено основні методи аналізу лінійних електричних кіл постійного і синусоїдного струму. Розглянуто закони теорії електричних кіл, еквівалентні перетворення схем, методи визначення динамічних характеристик електричних кіл. Структуру посібника складають п'ять розділів, переліки скорочень, джерел посилань, глосарій ключових термінів теорії електричних кіл.

Запропоновано багато варіантів індивідуальних завдань і прикладів їхнього виконання з кожного розділу, які призначені для проведення практичних занять, контрольних робіт, проміжного та підсумкового контролю успішності студентів.

Навчальний посібник рекомендований для студентів усіх форм навчання спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка», а також може бути корисним студентам інших спеціальностей під час вивчення навчальних дисциплін, зміст яких пов'язаний з теорією електричних кіл.

1 ГОЛОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Електричне коло – це сукупність пристроїв чи середовищ, в яких можуть проходити електричні струми. Ці пристрої призначені для передачі, розподілу та перетворення електромагнітної енергії. Процеси в електричному колі описують, застосовуючи поняття струм, напруга, електрорушійна сила.

Основними елементами електричного кола є джерела та приймачі електричної енергії, а також з'єднувальні елементи.

Ідеальне електричне коло – це модель, яка містить обмежену кількість ідеальних елементів (пасивних і активних) і призначена для інтерпретації реального кола (пристрою).

У **джерелах** електричної енергії (гальванічні елементи, акумулятори, генератори тощо) хімічна, механічна, теплова енергія перетворюється в електричну. У **приймачах** електричної енергії (електричні двигуни, освітлювальні елементи, електротермічні пристрої) електрична енергія перетворюється в механічну, світлову, теплову.

Електричний струм – це впорядковане переміщення електричних зарядів (у металах відбувається рух електронів).

Постійний струм – струм, значення якого не залежить від часу (позначають I).

Змінний струм – струм, який змінюється за часом, описують миттєвим значенням (позначають $i(t)$).

Одиниця вимірювання електричного струму – ампер (А), використовують також міліампери ($1 \text{ mA} = 10^{-3} \text{ A}$), мікроампери ($1 \text{ mA} = 10^{-6} \text{ A}$). Постійний струм характеризують позитивним напрямом, який обирають довільно. Якщо у розв'язку задачі отримують від'ємне значення, це означає, що струм спрямовано у протилежному напрямку.

Електрична напруга – це різниця електричних потенціалів між двома точками кола. Постійну напругу позначають U , змінну – $u(t)$. Одиниця вимірювання електричної напруги та потенціалу – вольт (В), використовують також кратні та часткові одиниці: $1 \text{ kV} = 10^3 \text{ V}$, $1 \text{ mV} = 10^{-3} \text{ V}$, $1 \text{ mV} = 10^{-6} \text{ V}$.

Електрорушійна сила (ЕРС) визначає роботу сторонніх (неелектричних) сил, притаманних джерелу, яка витрачається на переміщення заряду всередині джерела від «-» до «+». ЕРС вимірюють у вольтах. Постійну ЕРС позначають E , змінну – $e(t)$.

1.1 Елементи електричного кола

Елементи електричного кола поділяють на пасивні та активні. Усі елементи можуть бути ідеальними і реальними.

1.1.1 Пасивні елементи

До **ідеальних пасивних елементів** належать опір, індуктивність, ємність (рис.1.1).

Схема – це графічна модель кола, яка зображує його за допомогою ідеальних елементів.



Рисунок 1.1 – Пасивні елементи ідеального кола

Опір – ідеальний елемент електричного кола, в якому відбувається незворотне перетворення електричної енергії у теплову. Електротехнічний пристрій, який характеризується опором та застосовується для обмеження струму, називають **резистором**. Позначення на схемі – R (рис.1.1, а). Одиниця вимірювання – ом, кОм ($1 \text{ кОм} = 10^3 \text{ Ом}$, $1 \text{ МОм} = 10^6 \text{ Ом}$). 1 Ом дорівнює електричному опору ділянки кола, на якій постійний струм силою 1 А спричиняє спад напруги 1 В .

Величина G , обернена опору $G = 1/R$, називається провідністю. Одиниця вимірювання провідності – сименс ($1 \text{ См} = 1 \text{ Ом}^{-1}$).

Індуктивність – ідеальний елемент електричного кола, який накопичує енергію магнітного поля. Електротехнічний пристрій, що характеризується індуктивністю та застосовується для накопичення магнітного поля, називають котушкою індуктивності (дроселем). Позначення на схемі – L (рис.1.1, в), одиниця вимірювання – генрі (Гн). 1 Гн дорівнює індуктивності електричного кола, з якою при силі постійного струму у ній 1 А зчеплюється магнітний потік 1 Вб (вебер). Опір індуктивності постійному струму (активний опір) дорівнює нулю.

Ємність – ідеальний елемент електричного кола, який накопичує енергію електричного поля. Електротехнічний пристрій, що характеризується ємністю та застосовується для накопичення електричного поля, називають конденсатором. Позначення на схемі – C (рис.1.1, б), одиниця вимірювання – фарада (Ф).

1 Ф дорівнює ємності конденсатора, при якій заряд 1 Кл (кулон) створює на ньому напругу 1 В. Опір ємності постійному струму (активний опір) дорівнює нескінченності.

Розглянуті ідеальні пасивні елементи кола є моделями резисторів, високоякісних котушок індуктивності та конденсаторів з високими діелектричними властивостями на постійному струмі, а також у діапазонах низьких та середніх частот.

Реальні резистори, дроселі та конденсатори через резистивні втрати, паразитні ємності та індуктивності у діапазонах високих та надвисоких частот моделюють складнішими схемами.

1.1.2 Активні елементи

До активних елементів електричного кола належать джерела напруги і джерела струму.

Ідеальне джерело напруги – активний елемент, напруга на затискачах якого не залежить від струму, що протікає через джерело (рис.1.2, *a*).



Рисунок 1.2 – Джерела напруги: *a* – ідеальне; *б* – реальне

Вольт-амперна характеристика (ВАХ), тобто залежність напруги ідеального джерела напруги від струму показана на рис.1.3, *a*.

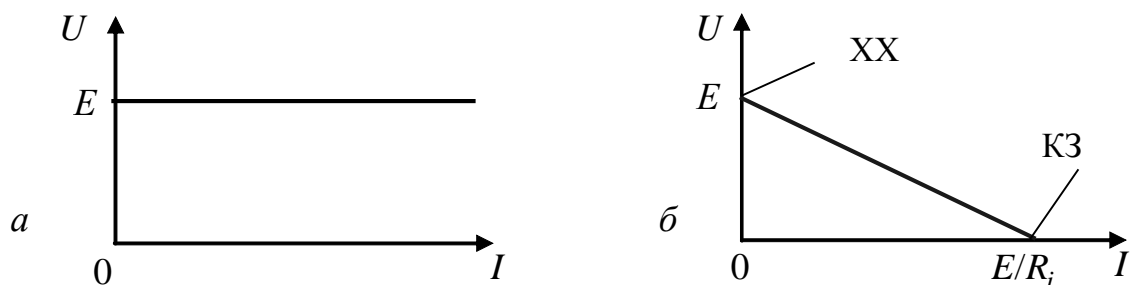


Рисунок 1.3 – ВАХ джерела напруги: *a* – ідеальне; *б* – реальне

Потужність джерела P дорівнює добутку напруги U на його затискачах на струм I , який віддає джерело:

$$P = UI . \quad (1.1)$$

Ідеальне джерело характеризується нескінченною потужністю. Це означає, що внутрішній опір ідеального джерела дорівнює нулю.

У реального джерела внутрішній опір R_i відрізняється від нуля. У цьому випадку напруга на затискачах джерела залежить від опору навантаги R_n (рис.1.3, б). При $R_n = 0$ струм навантаги максимальний і дорівнює струму короткого замикання (КЗ): $I_{кз} = E / R_i$.

При $R_n \rightarrow \infty$ струм навантаги дорівнює нулю, і у колі існує режим холостого ходу (ХХ).

Ідеальне джерело струму – активний елемент, струм якого не залежить від напруги на його затискачах (рис.1.4, а).

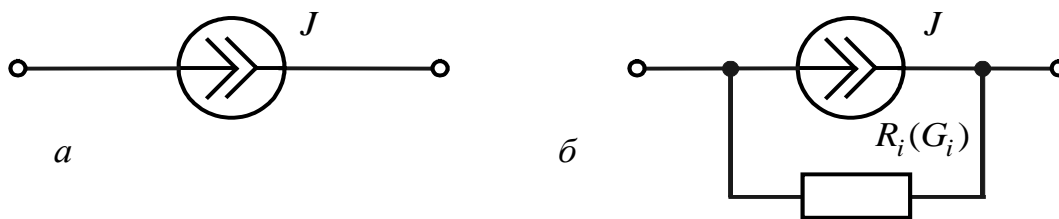


Рисунок 1.4 – Джерела струму: а – ідеальне; б – реальне

Внутрішній опір ідеального джерела струму дорівнює нескінченності, а провідність дорівнює нулю. ВАХ ідеального джерела струму показана на рис.1.5, а. Опір реального джерела струму відрізняється від нескінченності, а провідність – від нуля. ВАХ реального джерела струму показана на рис.1.5, б.

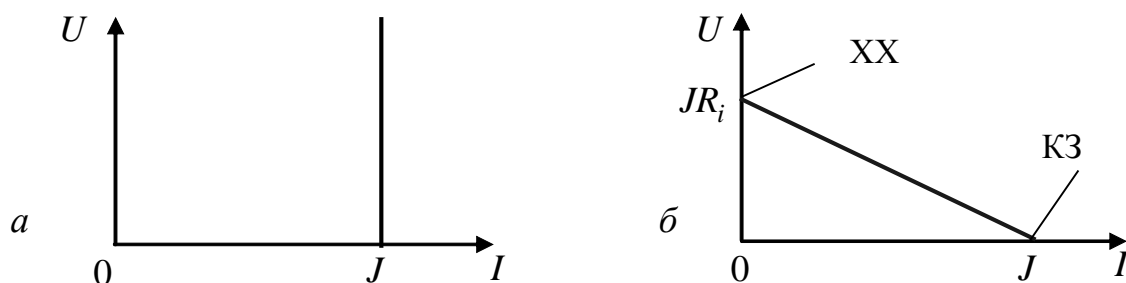


Рисунок 1.5 – ВАХ джерела струму: а – ідеальне; б – реальне

Під час розрахунків електричних кіл реальне джерело струму J можна еквівалентно замінити джерелом напруги з одним і тим самим внутрішнім опором R_i та ЕРС $E = JR_i$ (і, навпаки, джерело ЕРС E можна замінити на джерело струму з одним і тим самим внутрішнім опором R_i та струмом $J = E/R_i$), що іноді спрощує аналіз кола.

1.2 Схема електричного кола та її компоненти

Схема – це графічна модель, яка відображує спосіб з'єднання активних і пасивних елементів електричного кола. Приклад схеми показано на рис.1.6.

Компоненти схеми – вітка, вузол, контур.

Вітка – один або декілька послідовно з'єднаних елементів схеми, по яких протікає один і той самий струм (на рис.1.6 – п'ять віток).

Вузол – точка схеми кола, в якій сходяться не менше трьох струмів (на рис.1.6 – три вузла).

Контур – будь-який замкнений шлях по вітках схеми (на рис.1.6. – шість контурів).

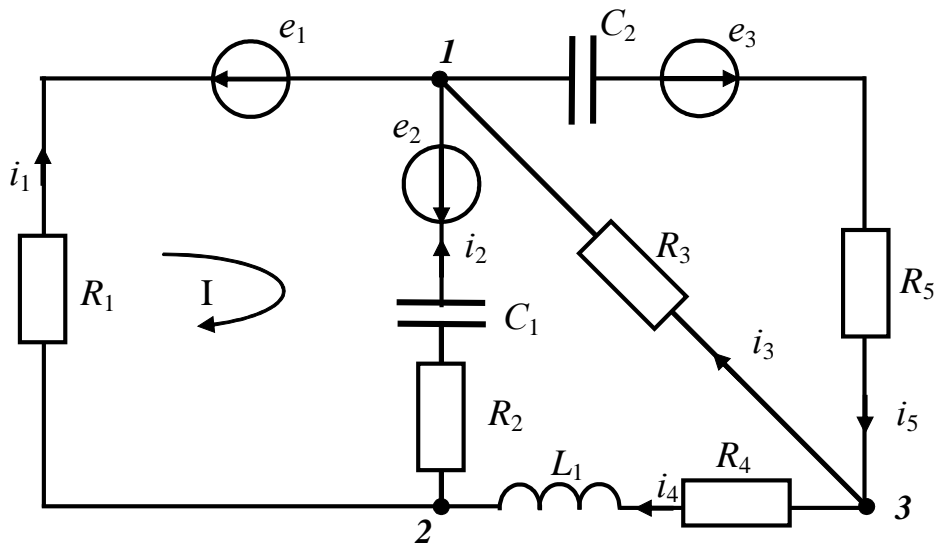


Рисунок 1.6 – Приклад схеми електричного кола

1.3 Основні закони електричних кіл

Основні закони електричних кіл доцільно розглянути на прикладі кіл постійного струму, маючи на увазі, що ці закони є справедливими також для кіл синусоїдного струму.

1.3.1 Закон Ома

Формулюється для ділянки кола (вітки) за відсутності або наявності джерел ЕРС.

1. Вітка без джерел (рис.1.7).

Струм, який протікає крізь вітку, прямо пропорційний прикладеній напрузі та обернено пропорційний опору цієї вітки:

$$I = U / R. \quad (1.2)$$

Вважається, що напрям струму у вітці збігається з напрямом прикладеної напруги. Опір R може бути сумою опорів, які утворюють вітку.

2. Вітка з джерелом ЕРС (рис.1.8).

Струм, який протікає крізь вітку, прямо пропорційний прикладеній напрузі на усіх опорах вітки, та обернено пропорційний загальному опору вітки:

$$I = (U - E) / (R + R_i), \quad (1.3)$$

де E – ЕРС джерела у вітці (зі знаком «-», якщо напрям ЕРС збігається з напрямом прикладеної напруги і навпаки).

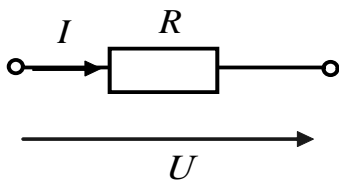


Рисунок 1.7 – Вітка без джерела

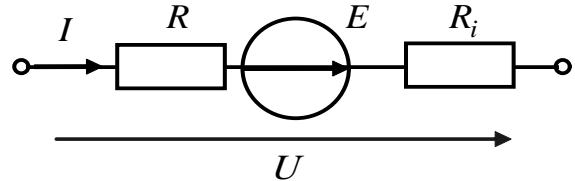


Рисунок 1.8 – Вітка з джерелом ЕРС

1.3.2 Перший закон Кірхгофа

Формулюється для вузла кола.

У будь-який момент часу алгебраїчна сума струмів, які сходяться у вузлі, дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^N I_k = 0 \text{ – для постійного струму; } \sum_{k=1}^N i_k = 0 \text{ – для змінного струму.}$$

Струми, які втікають у вузол, мають знак «+», які витікають – знак «-». Наприклад, для вузла 3 схеми (рис.1.6) справедливо рівняння $i_5 - i_3 - i_4 = 0$.

1.3.3 Другий закон Кірхгофа

Формулюється для контуру кола.

У будь-який момент часу алгебраїчна сума спадів напруг на усіх пасивних елементах контуру дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС, які входять у контур:

$$\sum_{i=1}^N U_i = \sum_{k=1}^M E_k \text{ – для постійного струму; } \sum_{i=1}^N u_i(t) = \sum_{k=1}^M e_k(t) \text{ – для змінного струму.}$$

Правило знаків:

1. Обрати додатний напрям обходу контуру.
2. Позначити додатні напрями струмів у вітках.
3. Спади напруг та ЕРС, напрям яких збігається з напрямом обходу контуру, записати зі знаком «+», а всі напруги та ЕРС протилежного напрямку – зі знаком «-». Значення напруг записати в одній частині рівняння, а значення ЕРС – в іншій.

Так, для контуру I схеми (рис.1.6) рівняння за другим законом Кірхгофа:
 $U_{R1} - U_{C1} - U_{R2} = e_2 - e_1$.

Якщо врахувати взаємну відповідність напрямів ЕРС і спадів напруг (рис.1.2, а), другий закон Кірхгофа можна сформулювати так: алгебраїчна сума спадів напруг у замкненому контурі дорівнює нулю.

Із другого закону Кірхгофа виходить **закон Ома для замкненого кола** (одноконтурного кола): струм одноконтурного кола прямо пропорційний алгебраїчній сумі ЕРС усіх джерел контуру і обернено пропорційний сумі опорів контуру. Для схеми (рис.1.9, а):

$$I = E / (R_i + R_H). \quad (1.4)$$

При цьому ЕРС беруть зі знаком «+», якщо її напрям збігається з напрямом струму в контурі, та зі знаком «-» інакше.

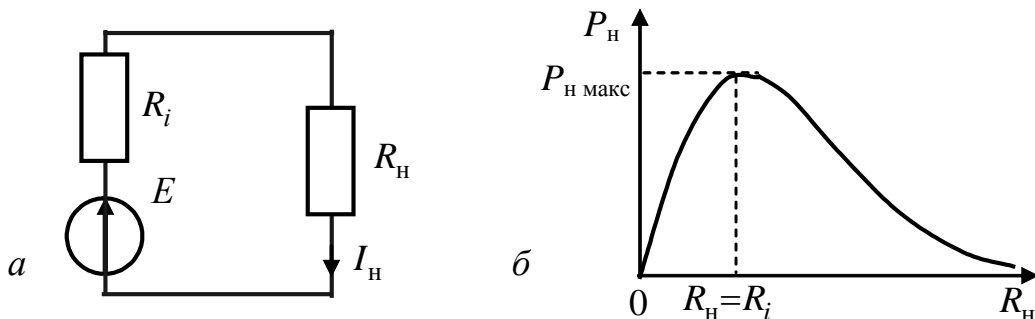


Рисунок 1.9 – Одноконтурне коло, утворене джерелом і навантагою (а); залежність потужності у навантазі від опору навантаги (б)

1.4 Потужність та енергія електричного кола

Залежно від того, розглядається коло постійного чи змінного струму, використовують потужність P або миттєву потужність $p(t)$. Потужність вимірюють у ватах (Вт). Потужність постійного струму описують виразом (1.1), звідки видно, що $1 \text{ Вт} = 1 \text{ А} \times 1 \text{ В}$.

Енергія постійного струму дорівнює добутку потужності на час:

$$W = Pt. \quad (1.5)$$

Енергія вимірюється у джоулях (Дж). З виразу (1.5) виходить, що $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Вт} \times 1 \text{ с}$.

Енергія змінного струму за інтервал часу $(t_1 - t_2)$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt. \quad (1.6)$$

1.5 Умова передачі максимальної потужності у навантагу

Нехай реальне джерело напруги з ЕРС E та внутрішнім опором R_i навантажено опором R_H (рис.1.9, а).

За законом Ома струм у колі $I = E / (R_i + R_H)$.

Умова узгодження джерела з навантагою визначає передачу максимальної потужності від джерела до навантаги.

Потужність P_H , яка витрачається в опорі навантаги, становить:

$$P_H = I_H^2 R_H = \frac{E^2}{(R_i + R_H)^2} R_H. \quad (1.7)$$

Щоб визначити опір навантаги, при якому потужність, що витрачається у навантазі, буде максимальна, слід прирівняти нулю похідну P_H (1.7) за R_H :

$$\frac{dP_H}{dR_H} = E^2 \frac{(R_i + R_H)^2 - 2R_H(R_i + R_H)}{(R_i + R_H)^4} = 0.$$

З останнього виразу виходить $R_H = R_i$. Отже, для забезпечення максимальної потужності в опорі навантаги, необхідно, щоб опір навантаги дорівнював внутрішньому опору джерела. Залежність P_H від R_H показана на рис.1.9, б.

Максимальна потужність становить $P_{H\text{макс}} = \frac{E^2}{4R_H}$.

1.6 Контрольні запитання та завдання

1. Наведіть визначення електричного кола. Назвіть елементи кола.
2. Які фізичні процеси відбуваються у джерелах та приймачах електричної енергії?
3. Поясніть поняття «електричний струм». Назвіть одиниці вимірювання струму. Чим відрізняються постійний і змінний струми? Наведіть їхні позначення.
4. Поясніть поняття «електрична напруга». В яких одиницях вимірюють напругу? Як позначають постійну і змінну напруги?
5. Поясніть поняття ЕРС. В яких одиницях вимірюють ЕРС? Як позначають постійну і змінну ЕРС?
6. Наведіть класифікацію елементів електричного кола.
7. Дайте визначення електричному опору. Як називається електротехнічний пристрій, якому властивий опір? Наведіть його позначення на схемах. В яких одиницях вимірюють опір та провідність?
8. Дайте визначення індуктивності. Як називається електротехнічний пристрій, якому властива індуктивність? Наведіть його позначення на схемах. В яких одиницях вимірюють індуктивність?
9. Дайте визначення ємності. Як називається електротехнічний пристрій, якому властива ємність? Наведіть його позначення на схемах. В яких одиницях вимірюють ємність?
10. Чим відрізняються ідеальне і реальне джерела напруги? Зобразіть залежність між напругою на затискачах і струмом в ідеальному і реальному джерелах напруги.
11. Чим відрізняються ідеальне і реальне джерела струму? Зобразіть залежність між напругою на затискачах і струмом в ідеальному і реальному джерелах струму.
12. Поясніть термін «схема» електричного кола? Дайте визначення компонентам схеми.
13. Сформулюйте закон Ома за відсутності джерел ЕРС на ділянці кола.
14. Сформулюйте закон Ома за наявності джерел ЕРС на ділянці кола.
15. Сформулюйте перший закон Кірхгофа.
16. Сформулюйте другий закон Кірхгофа.
17. Сформулюйте закон Ома для замкненого кола.
18. Запишіть вирази для енергії постійного і змінного струму.
19. Доведіть умову передачі максимальної потужності у навантагу.

2 ЕКВІВАЛЕНТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ СХЕМ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Головною метою перетворень є спрощення схеми для подальших розрахунків. Перетворення здійснюють відповідно до виду з'єднання елементів у колі: послідовне, паралельне, змішане, «трикутник», «зірка».

2.1 Послідовне з'єднання опорів

Послідовне з'єднання – з'єднання кількох елементів, за якого в них проходить один і той самий струм (рис.2.1). Відповідно до другого закону Кірхгофа, сума напруг на послідовно з'єднаних опорах дорівнює загальній напрузі на затискачах вітки, яку утворюють ці опори:

$$U_1 + U_2 + \dots + U_N = U.$$

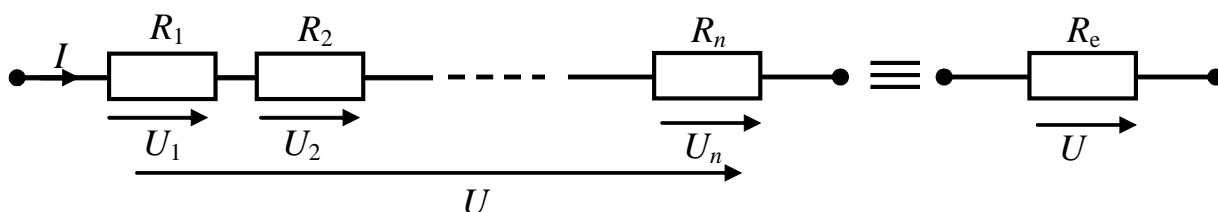


Рисунок 2.1 – Послідовне з'єднання опорів

Застосовуючи закон Ома до кожного опору, можна записати:

$$U = IR_1 + IR_2 + \dots + IR_n = I(R_1 + R_2 + \dots + R_n) = IR_e,$$

звідки

$$R_e = \sum_{k=1}^n R_k. \quad (2.1)$$

2.2 Паралельне з'єднання опорів

Паралельне з'єднання – з'єднання кількох елементів так, щоб усі вони були під однією й тією самою напругою (рис.2.2).

Згідно з першим законом Кірхгофа, алгебраїчна сума струмів, які сходяться у вузлі, дорівнює нулю. Для паралельного з'єднання опорів можна записати:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n.$$

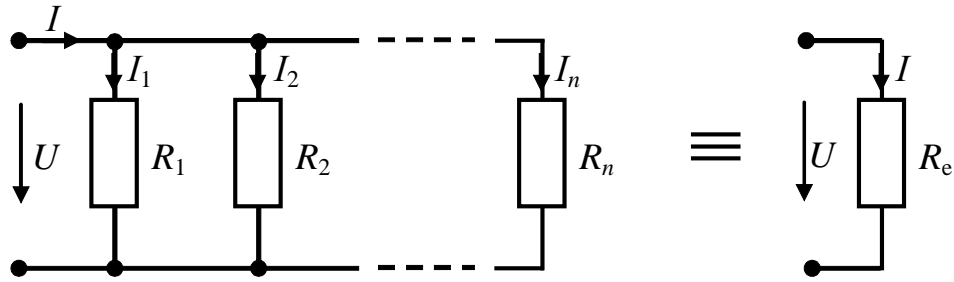


Рисунок 2.2 – Паралельне з'єднання опорів

Застосування закону Ома до кожного опору призводить до виразу:

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_n} = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) = \frac{U}{R_e},$$

звідки
$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}}. \quad (2.2)$$

Для $n = 2$
$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2.3)$$

Для $n = 3$
$$R_e = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}. \quad (2.4)$$

2.3 Змішане з'єднання опорів

Змішане з'єднання – це поєднання послідовної та паралельної ділянок електричного кола (рис.2.3, а). Щоб визначити загальний (еквівалентний) опір кола, здійснюють послідовне «згортання» послідовних і паралельних ділянок (рис.2.3, б, в).

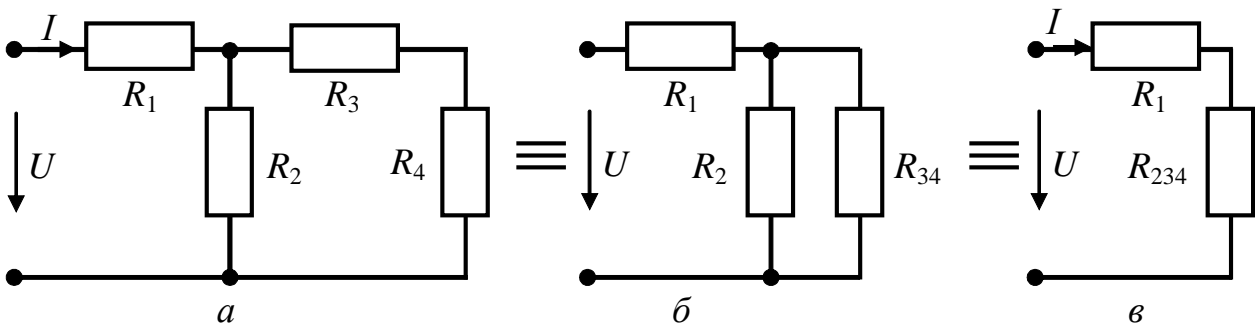


Рисунок 2.3 – Змішане з'єднання опорів

Порядок визначення еквівалентного опору такий:

- 1) послідовне з'єднання опорів R_3 та R_4 перетворюють в еквівалентний опір $R_{34} = R_3 + R_4$;
- 2) паралельне з'єднання опорів R_{34} та R_2 перетворюють в еквівалентний опір $R_{234} = R_2 R_{34} / (R_2 + R_{34})$;
- 3) послідовне з'єднання опорів R_1 та R_{234} перетворюють в еквівалентний опір $R_e = R_1 + R_{234}$.

2.4 З'єднання типу «зірка», «трикутник»

Існують схеми, в яких відсутні ділянки із змішаним (послідовним і/або паралельним) з'єднанням (рис.2.4, а).

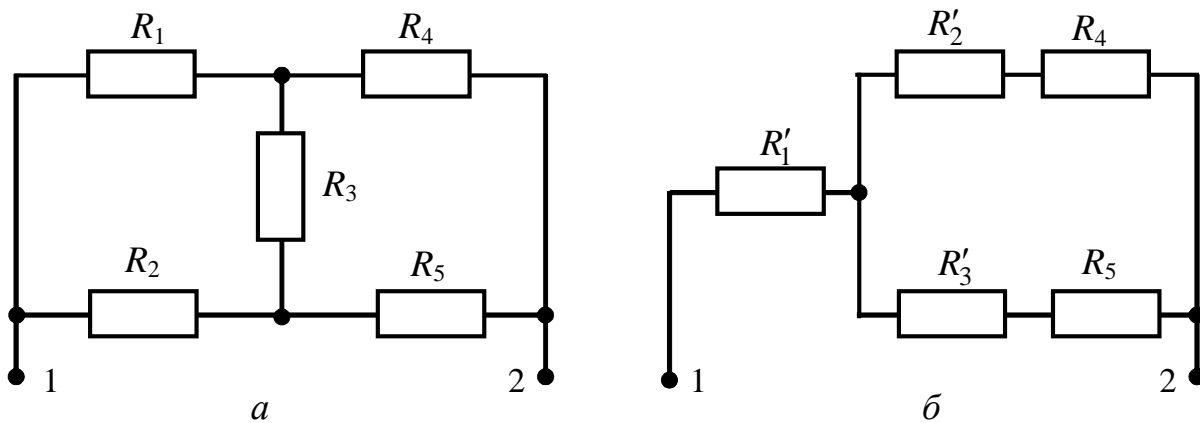


Рисунок 2.4 – Застосування еквівалентного перетворення:
а – до перетворення; б – після перетворення

Перейти до змішаного з'єднання та здійснити згортання послідовних та паралельних ділянок (див.п.2.3) можна, застосувавши еквівалентне перетворення «трикутника» опорів R_1, R_2, R_3 в еквівалентну «зірку» R'_1, R'_2, R'_3 (рис.2.4, б). Після цього перетворення опір кола між затискачами 1 і 2 можна знайти, використовуючи методику, розглянуту у п.2.3:

$$R_{12} = R'_1 + \frac{(R'_2 + R_4)(R'_3 + R_5)}{R'_2 + R_4 + R'_3 + R_5}.$$

Перетворення називають **еквівалентними**, якщо під час заміни однієї ділянки кола на іншу, простішу, струми та напруги ділянки кола, яка не була перетворена, залишаються незмінними.

Схеми типу «трикутник» і «зірка» зображені на рис.2.5.

2.4.1 Перетворення «трикутника» опорів у еквівалентну «зірку»

Відповідно до принципу еквівалентних перетворень зовнішні струми та напруги не мають змінюватися:

$$I_1 = I'_1; I_2 = I'_2; I_3 = I'_3; \quad U_{12} = U'_{12}; U_{23} = U'_{23}; U_{31} = U'_{31}.$$

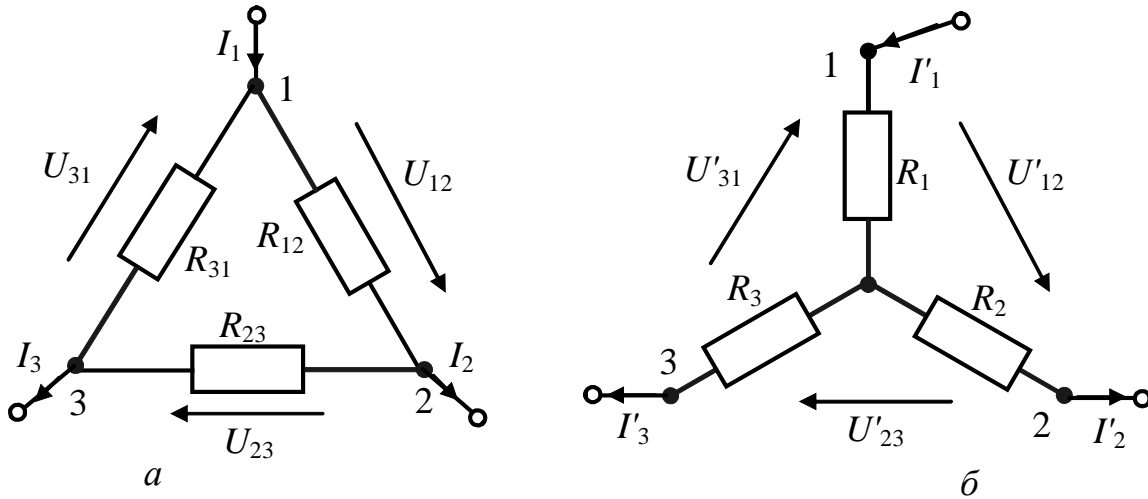


Рисунок 2.5 – Схеми типу: *a* – «трикутник»; *б* – «зірка»

Щоб отримати формули переходу від трикутника до зірки, припустимо, що струм $I_3 = I'_3 = 0$. Оскільки $U_{12} = U'_{12}$, можна прирівняти опори з боку затискачів 1–2 для обох схем:

$$\frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_1 + R_2. \quad (2.5)$$

Аналогічно, вважаючи $I_1 = I'_1 = 0$ та $I_2 = I'_2 = 0$, можна прирівняти опори з боку затискачів 2–3 та 3–1 відповідно:

$$\frac{R_{23}(R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_2 + R_3; \quad (2.6)$$

$$\frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_3 + R_1. \quad (2.7)$$

Віднявши від рівняння (2.5) рівняння (2.6) та додавши рівняння (2.7), отримаємо:

$$\frac{R_{12}(R_{23} + R_{31}) - R_{23}(R_{31} + R_{12}) + R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_1 + R_2 - R_2 - R_3 + R_3 + R_1;$$

$$\frac{R_{12}R_{23} + R_{12}R_{31} - R_{23}R_{31} - R_{23}R_{12} + R_{31}R_{12} + R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = 2R_1.$$

звідки
$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (2.8)$$

Аналогічно, можна отримати формули для опорів зірки R_2 та R_3 :

$$R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad (2.9) \quad R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (2.10)$$

Отже, опір променя зірки, з'єданого з деяким вузлом, дорівнює добутку опорів сторін трикутника, з'єднаних з тим самим вузлом, поділеному на суму опорів усіх його сторін.

Якщо усі опори трикутника однакові, тоді опори зірки $R_1 = \frac{1}{3}R_{12}$.

2.4.2 Перетворення «зірки» опорів у еквівалентний «трикутник»

Поділивши вираз (2.10) на (2.8), отримаємо.

$$\frac{R_3}{R_1} = \frac{R_{23}}{R_{12}}; \quad R_{23} = \frac{R_{12}R_3}{R_1}, \quad (2.11)$$

ділення виразу (2.10) на (2.9) призводить до співвідношення:

$$\frac{R_3}{R_2} = \frac{R_{31}}{R_{12}}; \quad R_{31} = \frac{R_{12}R_3}{R_2}. \quad (2.12)$$

Запишемо формулу (2.8) у вигляді $R_1R_{12} + R_1R_{23} + R_1R_{31} = R_{12}R_{31}$ та підставимо до неї вирази (2.11), (2.12):

$$R_1R_{12} + \frac{R_1R_{12}R_3}{R_1} + \frac{R_1R_{12}R_3}{R_2} = \frac{R_{12}R_{12}R_3}{R_2}; \quad R_1 + R_3 + \frac{R_1R_3}{R_2} = R_{12} \frac{R_3}{R_2};$$

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}. \quad (2.13)$$

Формули для R_{23} , R_{31} одержують аналогічно:

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1}; \quad (2.14) \quad R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3R_1}{R_2}. \quad (2.15)$$

Отже, опір сторони трикутника, прилеглої до двох вузлів, дорівнює сумі опорів променів зірки, прилеглих до тих самих вузлів, плюс добуток цих опорів, поділених на опір протилежного променя зірки.

Якщо $R_1 = R_2 = R_3$, тоді опори трикутника $R_{12} = 3R_1$.

2.5 Еквівалентні перетворення з'єднань активних елементів

Результатом перетворення змішаних з'єднань джерел напруги і (або) струму є еквівалентне джерело напруги або еквівалентне джерело струму.

При послідовному з'єднанні джерел напруги їх можна подати як еквівалентне джерело напруги (рис.2.6).

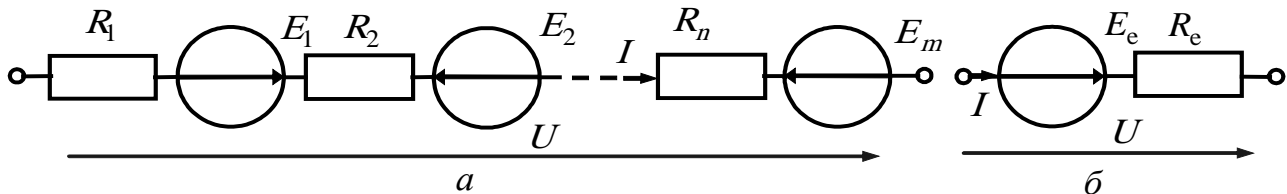


Рисунок 2.6 – Послідовне з'єднання джерел напруги (а) та його еквівалент (б)

При цьому, відповідно до другого закону Кірхгофа, ЕРС джерел додаються алгебраїчно (з урахуванням знаків), а їхні внутрішні опори, які з'єднані послідовно, додаються:

$$E_e = \sum_{k=1}^n E_k; \quad R_{ie} = \sum_{k=1}^n R_{ie}. \quad (2.16)$$

При паралельному з'єднанні джерел струму їх можна подати як еквівалентне джерело струму (рис.2.7).

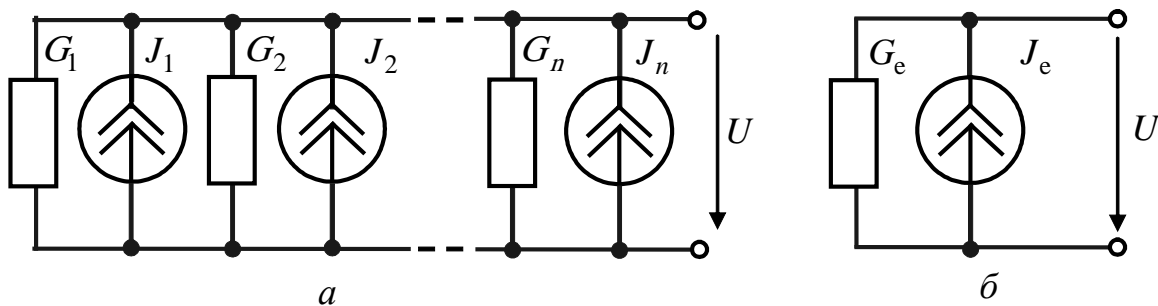


Рисунок 2.7 – Паралельне з'єднання джерел струму (а) та його еквівалент (б)

При цьому, відповідно до першого закону Кірхгофа, струми джерел додаються алгебраїчно (з урахуванням знаків), а їхні внутрішні провідності, які з'єднані паралельно, додаються:

$$J_e = \sum_{k=1}^n J_k; \quad G_{ie} = \sum_{k=1}^n G_{ik} = \frac{1}{R_{ie}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_{ik}}. \quad (2.17)$$

При послідовному з'єднанні джерел струму (рис.2.8, *a*) їх необхідно перетворити в еквівалентні джерела напруги (рис.2.8, *б*) і подати як еквівалентне джерело напруги (рис.2.8, *в*) з подальшим перетворенням (за необхідності) в еквівалентне джерело струму (рис.2.8, *г*).

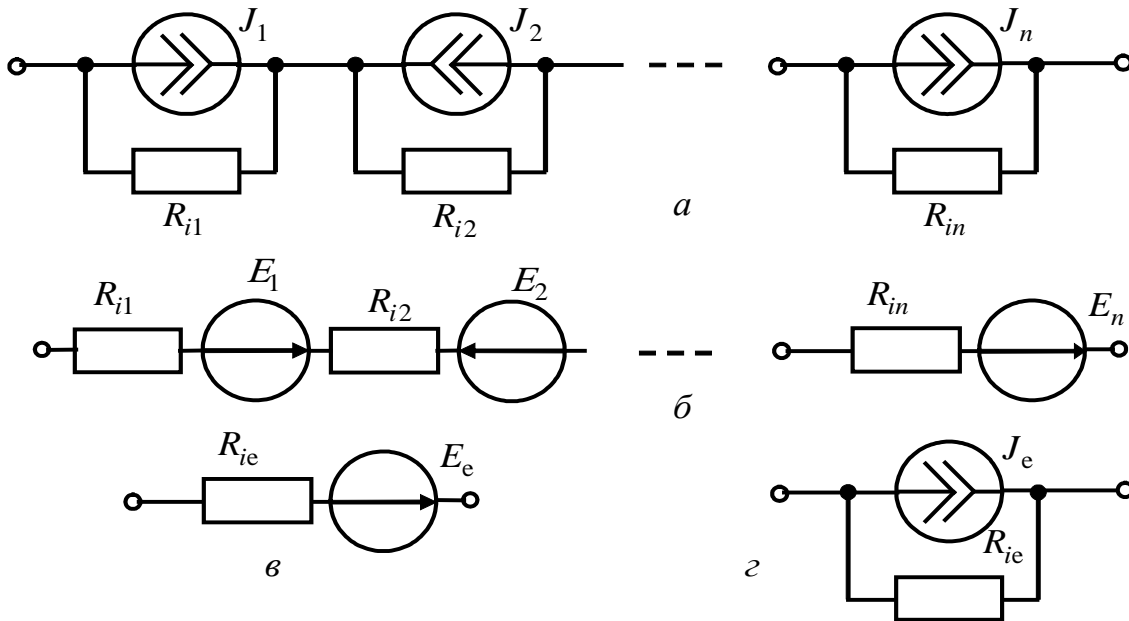


Рисунок 2.8 – Послідовне з'єднання джерел струму (*a*) та його перетворення (*б, в, г*)

Під час заміни реального джерела струму J джерелом напруги ЕРС визначають $E = JR_i$, а їхні внутрішні опори R_i дорівнюють один одному. У подальшому, відповідно до другого закону Кірхгофа, ЕРС джерел додаються алгебраїчно, а їхні внутрішні опори, які з'єднані послідовно, додаються, аналогічно (2.16).

За необхідності, здійснюють зворотне перетворення еквівалентного джерела напруги в еквівалентне джерело струму з внутрішнім опором R_{ie} і струмом $J_e = E_e / R_{ie}$.

При паралельному з'єднанні джерел напруги (рис.2.9, *a*) їх необхідно перетворити в еквівалентні джерела струму (рис.2.9, *б*) і подати як еквівалентне джерело струму (рис. 2.9, *в*) з подальшим перетворенням (за необхідності) в еквівалентне джерело напруги (рис.2.9, *г*).

Замінюючи реальне джерело напруги E джерелом струму, його струм визначають $J = E / R_i$, а їхні внутрішні опори R_i дорівнюють один одному. У подальшому, відповідно до першого закону Кірхгофа, струми джерел J_i додають-

ся алгебраїчно, а їхні внутрішні провідності, які з'єднані послідовно, додаються, аналогічно (2.17).

За необхідності, здійснюють зворотне перетворення еквівалентного джерела струму в еквівалентне джерело напруги з внутрішнім опором R_{ie} і ЕРС $E_e = J_e R_{ie}$.

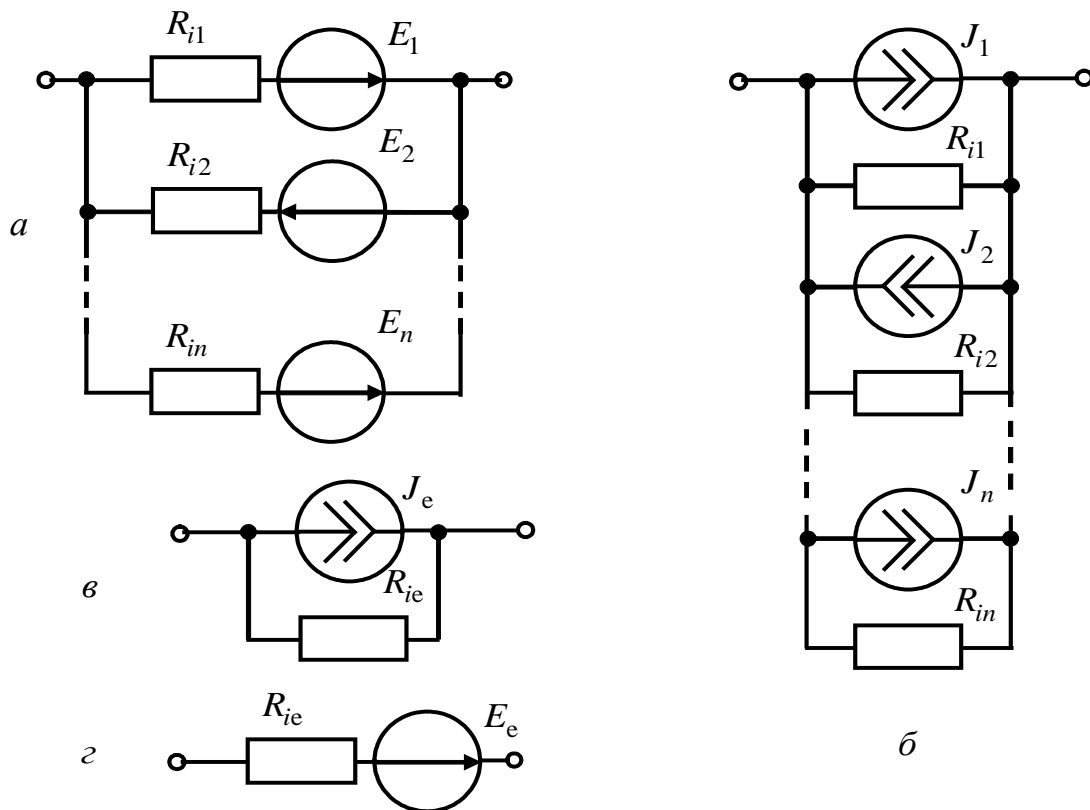


Рисунок 2.9 – Паралельне з'єднання джерел напруги (а) та його перетворення (б, в, з)

2.6 Контрольні запитання

1. Як визначити опір вітки, утвореної з послідовно з'єднаних резисторів?
2. Як визначити опір ділянки кола, утвореної з паралельно з'єднаних резисторів?
3. Як визначити опір ділянки кола, утвореної змішаним з'єднанням кількох резисторів?
4. У чому полягає принцип еквівалентного перетворення? Навести схеми з'єднання опорів типу «трикутник» і «зірка».
5. Як здійснити перетворення схеми типу «зірка» в еквівалентний «трикутник»?

6. Як здійснити перетворення схеми типу «трикутник» в еквівалентну «зірку»?

7. Як здійснити еквівалентне перетворення реального джерела струму в реальне джерело напруги?

8. Як еквівалентно перетворити реальне джерело напруги у реальне джерело струму?

9. Як здійснити еквівалентне перетворення послідовного з'єднання джерел напруги?

10. Як здійснити еквівалентне перетворення паралельного з'єднання джерел струму?

11. Як здійснити еквівалентне перетворення паралельного з'єднання джерел напруги?

12. Як здійснити еквівалентне перетворення послідовного з'єднання джерел струму?

2.7 Контрольні завдання

2.7.1 Використовуючи принцип еквівалентного перетворення, знайдіть вираз еквівалентного опору R_e між заданими вузлами схеми з'єднання резисторів, складеної за табл. 2.1 між шістьма вузлами (рис.2.10, *a*).

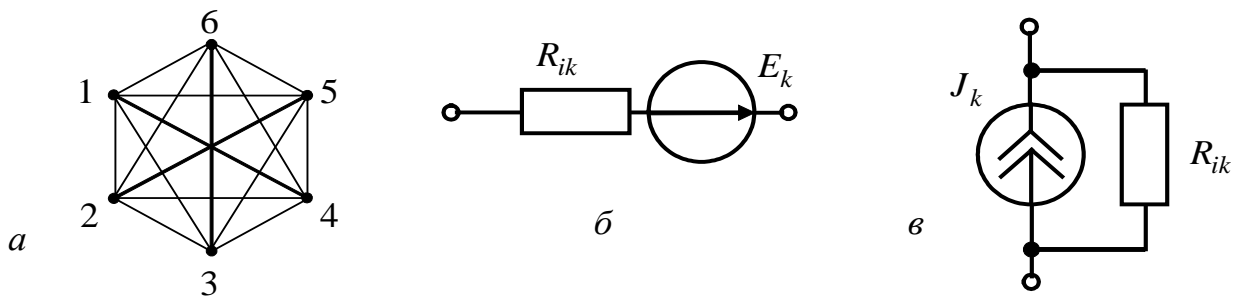


Рисунок 2.10 – До завдання 2.7.1: *a* – вузли схеми з'єднання резисторів; *б* – реальне джерело напруги; *в* – реальне джерело струму

2.7.2 Використовуючи принцип еквівалентного перетворення, знайдіть вираз для параметрів (внутрішнього опору і ЕРС) еквівалентного джерела напруги і параметрів (внутрішнього опору і струму) еквівалентного джерела струму для схеми, заданої у табл.2.2.

Таблиця 2.1 – Варіанти контрольного завдання 2.7.1

Номер варіанта	R_e	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
1-a	1-2	1-3	2-3	3-4	4-5	5-6	1-6	2-4
2-a	1-3	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	1-6	2-5
3-a	1-4	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	1-6	2-5
4-a	1-3	1-2	2-3	3-4	4-5	1-5	1-3	2-4
5-a	1-2	1-2	1-4	2-5	4-5	5-6	1-6	2-4
6-a	1-2	1-4	2-5	3-4	4-5	5-6	1-6	3-6
7-a	1-4	1-2	2-5	3-4	4-5	5-6	1-6	3-6
8-a	1-3	1-3	1-4	3-4	4-5	5-6	1-6	3-5
9-a	1-2	1-3	2-3	2-4	4-5	5-6	1-6	3-6
10-a	1-2	1-2	1-4	2-6	4-5	5-6	1-6	2-4
11-a	1-4	1-3	1-5	3-4	4-5	5-6	1-6	3-6
12-a	1-2	1-5	2-3	2-4	4-5	5-6	1-6	3-6
13-a	1-2	1-2	1-5	2-6	4-5	5-6	1-6	2-4
14-a	1-3	1-3	1-5	3-4	4-5	5-6	1-6	4-6
15-a	1-4	1-3	1-4	3-4	4-5	5-6	1-6	3-6
16-a	1-3	1-2	2-3	3-4	1-4	1-3	2-4	-
17-a	1-2	1-4	2-3	3-4	4-5	5-6	1-6	2-5
18-a	1-2	1-2	2-3	1-3	2-6	3-6	1-6	-
19-a	1-3	2-4	2-3	3-4	4-5	5-6	1-6	2-5
20-a	1-3	2-5	2-3	3-4	4-5	5-6	1-6	4-6
21-a	1-2	1-5	2-3	3-4	4-5	5-6	1-6	4-6
22-a	1-2	1-2	2-3	3-5	3-6	5-6	1-6	1-5
23-a	1-3	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	1-6	2-6
24-a	1-3	2-6	2-3	3-4	4-5	5-6	1-6	1-5
25-a	1-2	1-5	2-4	3-4	4-5	5-6	1-6	3-6

Продовження таблиці 2.1

Номер варіанта	R_e	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
1-б	1-2	1-2	2-3	1-3	2-5	5-6	1-6	3-5
2-б	1-3	2-4	2-3	3-4	4-5	5-6	1-6	2-6
3-б	1-4	1-3	1-4	3-4	4-5	5-6	1-6	3-5
4-б	1-3	2-5	2-3	3-4	4-5	5-6	1-6	1-4
5-б	1-2	1-5	2-3	3-4	4-5	5-6	1-6	3-6
6-б	1-2	1-3	2-3	3-4	4-5	5-6	1-6	2-6
7-б	1-4	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	1-6	3-5
8-б	1-3	2-6	2-3	3-4	4-5	5-6	1-6	1-4
9-б	1-2	1-4	2-3	3-4	4-5	5-6	1-6	2-6
10-б	1-2	1-2	2-3	3-5	1-3	5-6	1-6	2-5
11-б	1-3	1-2	2-3	3-4	2-4	4-6	1-6	3-6
12-б	1-4	1-3	4-6	3-4	4-5	5-6	1-6	3-6
13-б	1-2	1-4	2-3	3-4	4-5	5-6	1-6	3-5
14-б	1-2	1-2	2-3	1-3	2-6	5-6	1-6	3-5
15-б	1-3	1-3	1-4	3-4	4-5	5-6	1-6	3-6
16-б	1-4	2-5	2-3	3-4	4-5	5-6	1-6	3-6
17-б	1-2	1-3	2-3	3-4	4-5	5-6	1-6	2-5
18-б	1-2	1-4	2-3	3-4	2-5	5-6	1-6	3-6
19-б	1-3	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	1-6	2-4
20-б	1-4	1-3	1-5	3-4	4-5	5-6	1-6	3-5
21-б	1-3	1-3	1-5	3-4	4-5	5-6	1-6	3-6
22-б	1-2	1-2	2-3	3-5	3-6	5-6	1-6	2-5
23-б	1-2	1-3	2-3	2-4	4-5	5-6	1-6	3-5
24-б	1-4	1-2	2-4	4-6	2-6	1-4	1-6	-
25-б	1-3	1-2	2-3	3-4	4-5	1-5	1-3	2-5

Таблиця 2.2 – Варіанти контрольного завдання 2.7.2

Номер варіанта	Схема	A1	A2	A3	A4
1-а	рис. 2.11 - 1	J_1, R_1	$-E_2, R_2$	$-E_3, R_3$	J_4, R_4
2-а	рис. 2.11 - 2	E_1, R_1	$-E_2, R_2$	$-J_3, R_3$	$-J_4, R_4$
3-а	рис. 2.11 - 3	J_1, R_1	$-J_2, R_2$	E_3, R_3	$-E_4, R_4$
4-а	рис. 2.11 - 4	E_1, R_1	E_2, R_2	J_3, R_3	$-E_4, R_4$
5-а	рис. 2.11 - 5	E_1, R_1	J_2, R_2	E_3, R_3	J_4, R_4
6-а	рис. 2.11 - 6	J_1, R_1	E_2, R_2	$-J_3, R_3$	J_4, R_4
7-а	рис. 2.11 - 7	J_1, R_1	E_2, R_2	$-E_3, R_3$	E_4, R_4
8-а	рис. 2.11 - 8	E_1, R_1	$-J_2, R_2$	J_3, R_3	E_4, R_4
9-а	рис. 2.11 - 9	$-E_1, R_1$	E_2, R_2	J_3, R_3	J_4, R_4
10-а	рис. 2.11 - 10	E_1, R_1	J_2, R_2	$-E_3, R_3$	J_4, R_4
11-а	рис. 2.11 - 11	E_1, R_1	J_2, R_2	J_3, R_3	$-E_4, R_4$
12-а	рис. 2.11 - 12	J_1, R_1	$-E_2, R_2$	$-E_3, R_3$	J_4, R_4
13-а	рис. 2.11 - 13	$-E_1, R_1$	J_2, R_2	$-E_3, R_3$	J_4, R_4
14-а	рис. 2.11 - 14	E_1, R_1	J_2, R_2	$-E_3, R_3$	$-J_4, R_4$
15-а	рис. 2.11 - 1	$-E_1, R_1$	$-J_2, R_2$	$-J_3, R_3$	E_4, R_4
16-а	рис. 2.11 - 2	$-E_1, R_1$	J_2, R_2	$-E_3, R_3$	J_4, R_4
17-а	рис. 2.11 - 3	E_1, R_1	$-E_2, R_2$	J_3, R_3	E_4, R_4
18-а	рис. 2.11 - 4	$-J_1, R_1$	$-E_2, R_2$	$-J_3, R_3$	J_4, R_4
19-а	рис. 2.11 - 5	E_1, R_1	$-E_2, R_2$	E_3, R_3	$-J_4, R_4$
20-а	рис. 2.11 - 6	J_1, R_1	$-E_2, R_2$	E_3, R_3	J_4, R_4
21-а	рис. 2.11 - 7	E_1, R_1	$-J_2, R_2$	J_3, R_3	$-J_4, R_4$
22-а	рис. 2.11 - 8	J_1, R_1	J_2, R_2	J_3, R_3	E_4, R_4
23-а	рис. 2.11 - 9	J_1, R_1	E_2, R_2	$-E_3, R_3$	$-J_4, R_4$
24-а	рис. 2.11 - 10	J_1, R_1	J_2, R_2	$-E_3, R_3$	E_4, R_4
25-а	рис. 2.11 - 11	J_1, R_1	J_2, R_2	$-E_3, R_3$	$-E_4, R_4$

Продовження таблиці 2.2

Номер варіанта	Схема	A1	A2	A3	A4
1-б	рис. 2.11 - 13	E_1, R_1	E_2, R_2	J_3, R_3	$-E_4, R_4$
2-б	рис. 2.11 - 14	J_1, R_1	J_2, R_2	$-J_3, R_3$	E_4, R_4
3-б	рис. 2.11 - 1	J_1, R_1	J_2, R_2	J_3, R_3	$-E_4, R_4$
4-б	рис. 2.11 - 2	J_1, R_1	E_2, R_2	$-J_3, R_3$	E_4, R_4
5-б	рис. 2.11 - 3	J_1, R_1	$-J_2, R_2$	E_3, R_3	J_4, R_4
6-б	рис. 2.11 - 4	E_1, R_1	J_2, R_2	$-J_3, R_3$	E_4, R_4
7-б	рис. 2.11 - 5	J_1, R_1	$-J_2, R_2$	$-E_3, R_3$	E_4, R_4
8-б	рис. 2.11 - 6	$-J_1, R_1$	E_2, R_2	E_3, R_3	$-J_4, R_4$
9-б	рис. 2.11 - 8	E_1, R_1	$-E_2, R_2$	J_3, R_3	$-J_4, R_4$
10-б	рис. 2.11 - 10	J_1, R_1	$-J_2, R_2$	$-J_3, R_3$	E_4, R_4
11-б	рис. 2.11 - 11	E_1, R_1	$-E_2, R_2$	E_3, R_3	$-J_4, R_4$
12-б	рис. 2.11 - 13	J_1, R_1	$-J_2, R_2$	$-J_3, R_3$	$-E_4, R_4$
13-б	рис. 2.11 - 14	$-E_1, R_1$	$-E_2, R_2$	E_3, R_3	$-J_4, R_4$
14-б	рис. 2.11 - 1	E_1, R_1	$-J_2, R_2$	E_3, R_3	J_4, R_4
15-б	рис. 2.11 - 2	$-J_1, R_1$	J_2, R_2	E_3, R_3	E_4, R_4
16-б	рис. 2.11 - 4	E_1, R_1	E_2, R_2	$-E_3, R_3$	$-J_4, R_4$
17-б	рис. 2.11 - 1	E_1, R_1	E_2, R_2	$-E_3, R_3$	E_4, R_4
18-б	рис. 2.11 - 7	E_1, R_1	$-E_2, R_2$	J_3, R_3	$-E_4, R_4$
19-б	рис. 2.11 - 11	J_1, R_1	$-J_2, R_2$	$-E_3, R_3$	E_4, R_4
20-б	рис. 2.11 - 13	E_1, R_1	$-E_2, R_2$	E_3, R_3	$-J_4, R_4$
21-б	рис. 2.11 - 14	$-J_1, R_1$	$-E_2, R_2$	E_3, R_3	J_4, R_4
22-б	рис. 2.11 - 1	$-E_1, R_1$	E_2, R_2	$-J_3, R_3$	$-E_4, R_4$
23-б	рис. 2.11 - 2	J_1, R_1	E_2, R_2	J_3, R_3	$-J_4, R_4$
24-б	рис. 2.11 - 4	$-E_1, R_1$	J_2, R_2	E_3, R_3	$-J_4, R_4$
25-б	рис. 2.11 - 11	$-E_1, R_1$	$-E_2, R_2$	E_3, R_3	$-E_4, R_4$

Примітка. 1. Замість блоків A1 ... A4 у схеми підставляють, відповідно до індивідуального варіанта, реальні джерела напруги (E_k, R_{ik}) (рис.2.10, б) або струму J_k, R_{ik} (рис.2.10, в).

2. Складаючи схеми, як позитивні напрями джерел струму і напруги беруть напрями зліва направо і знизу вгору (рис.2.10, б, в).

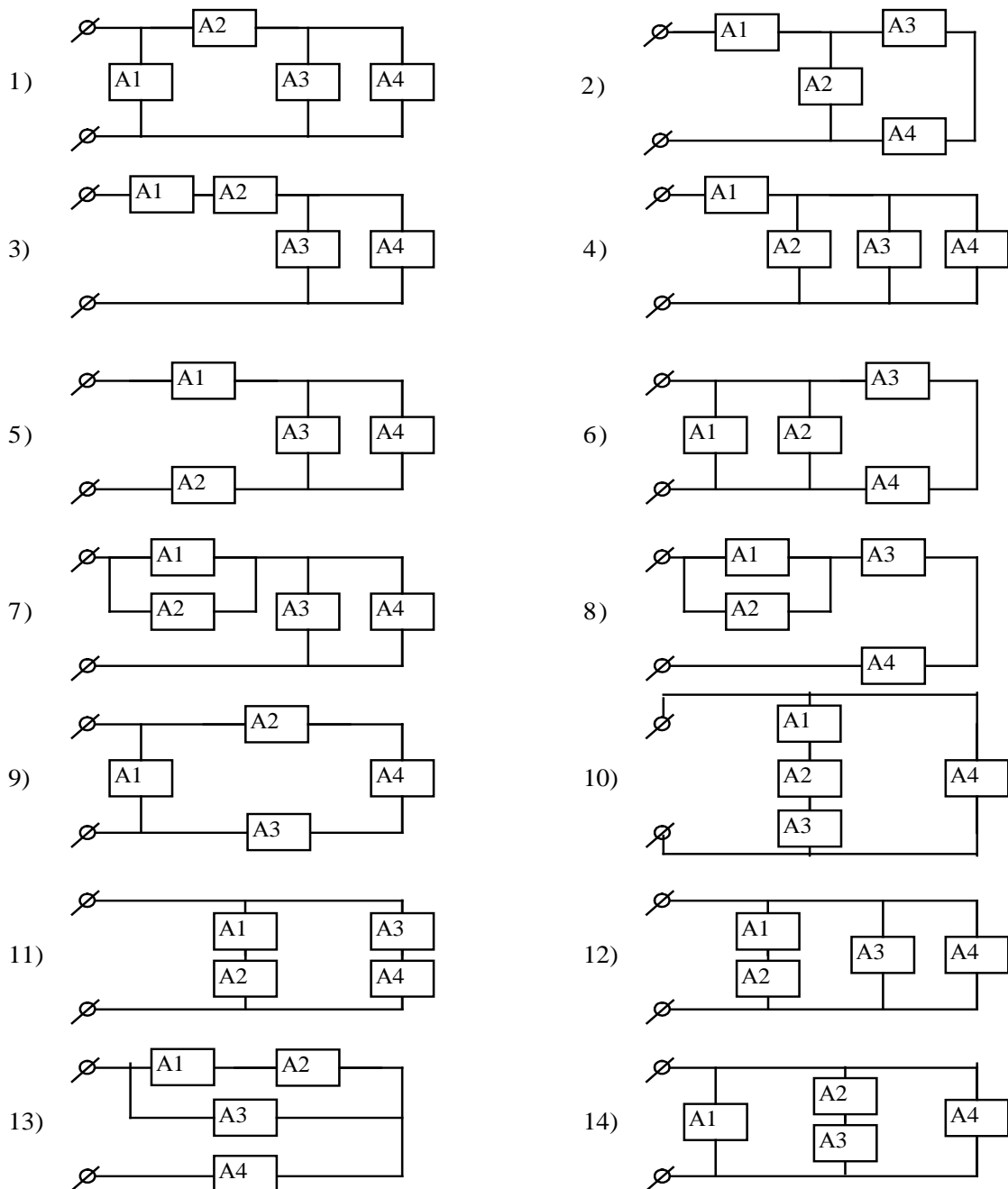


Рисунок 2.11 – Схеми з'єднання активних елементів до табл. 2.2

2.8 Приклади виконання контрольних завдань

2.8.1 Виконання завдання 2.7.1

1. Складемо схему з'єднання резисторів для заданого варіанта N (табл.2.3).

Таблиця 2.3 – Варіант до прикладу виконання завдання 2.7.1

Номер варіанта	R_e	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
N	1-3	1-2	2-3	3-4	4-5	1-5	2-5	1-4

2. У схемі (рис.2.12, а) відсутні ділянки послідовного або паралельного з'єднання. Тому перетворимо «зірку» опорів R_4, R_5, R_6 , розташований між вузлами 1-2-4, в еквівалентний «трикутник» R_{14}, R_{12}, R_{24} (рис.2.12, б). Вирази для опорів трикутника запишемо за формулами (2.13)–(2.15):

$$R_{14} = R_4 + R_5 + \frac{R_4 R_5}{R_6}; \quad R_{12} = R_5 + R_6 + \frac{R_5 R_6}{R_4}; \quad R_{24} = R_4 + R_6 + \frac{R_4 R_6}{R_5}.$$

3. У схемі (рис.2.12, б) опори R_{14} і R_7 ; R_{12} і R_1 з'єднані паралельно. Визначимо еквівалентні опори цих віток R_{112} і R_{714} (рис.2.12, в) за формулою (2.3):

$$R_{112} = \frac{R_1 R_{12}}{R_1 + R_{12}}; \quad R_{714} = \frac{R_7 R_{14}}{R_7 + R_{14}}.$$

4. У схемі (рис.2.12, в) відсутні ділянки послідовного або паралельного з'єднання. Тому перетворимо «трикутник» опорів R_{24}, R_2, R_3 , розташовану між вузлами 2-3-4, в еквівалентну «зірку» R_{27}, R_{37}, R_{47} (рис.2.12, г). Вирази для опорів зірки запишемо за формулами (2.8)–(2.10):

$$R_{27} = \frac{R_2 R_{24}}{R_2 + R_3 + R_{24}}; \quad R_{37} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3 + R_{24}}; \quad R_{47} = \frac{R_{24} R_3}{R_2 + R_3 + R_{24}}.$$

5. У схемі (рис.2.12, г) опори R_{112} і R_{27} ; R_{714} і R_{47} з'єднані послідовно. Визначимо еквівалентні опори цих віток R'_{17} і R''_{17} (рис.2.12, д) за формулою (2.1):

$$R'_{17} = R_{112} + R_{27}; \quad R''_{17} = R_{714} + R_{47}.$$

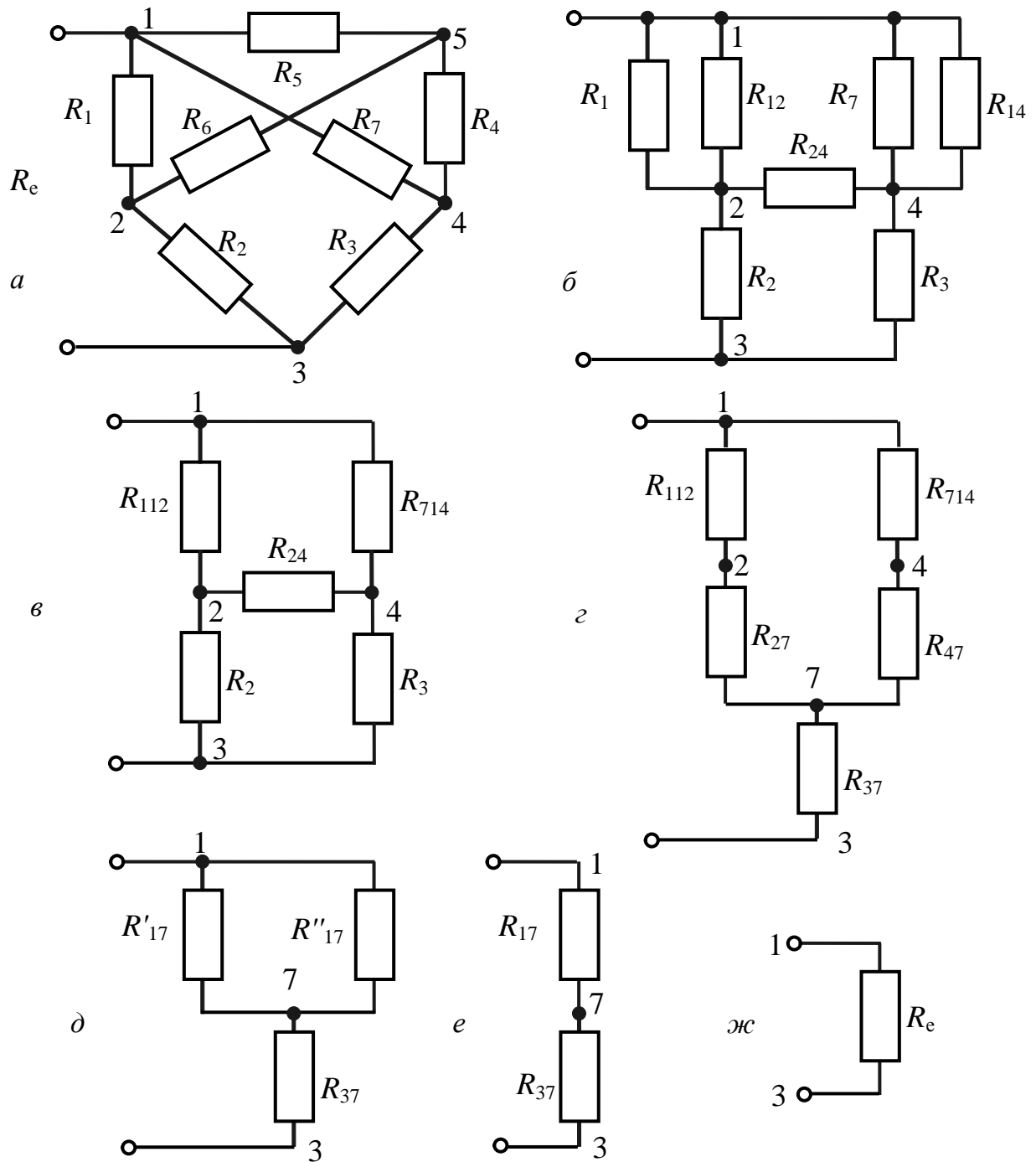


Рисунок 2.12 – Еквівалентні перетворення схеми у прикладі виконання контрольного завдання 2.7.1

6. У схемі (рис.2.12, д) опори R'_{17} і R''_{17} з'єднані паралельно. Визначимо їх еквівалентний опір R_{17} (рис.2.12, е) за формулою (2.3):

$$R_{17} = \frac{R'_{17}R''_{17}}{R'_{17} + R''_{17}}.$$

7. У схемі (рис.2.12, е) опори R_{17} і R_{37} з'єднані послідовно. Визначимо їх еквівалентний опір R_e (рис.2.12, ж) за формулою (2.1):

$$R_e = R_{17} + R_{37}.$$

2.8.2 Виконання завдання 2.7.2

1. Складемо структурну схему (рис.2.13, а) та принципову схему з'єднання активних елементів (рис.2.13, б) для заданого варіанта N (табл.2.4) згідно із правилами, зазначеними у примітках до завдання 2.7.2.

Таблиця 2.4 – Варіант до прикладу виконання завдання 2.7.2

Номер варіанта	Схема	A1	A2	A3	A4
N	рис. 2.11 - 3	E_1, R_1	$-J_2, R_2$	J_3, R_3	$-E_4, R_4$

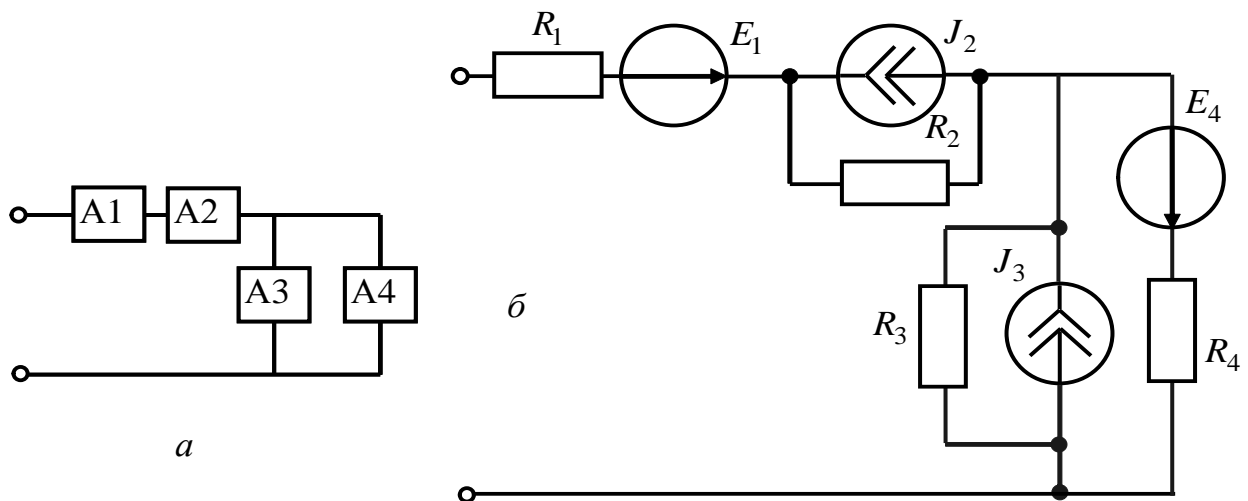


Рисунок 2.13 – Структурна (а) та принципова (б) схеми з'єднання активних елементів

2. Оскільки джерела E_1 і J_2 з'єднані послідовно, а джерела E_4 і J_3 – паралельно, доцільно перетворити джерело струму J_2 у джерело напруги з ЕРС $E_2 = J_2 R_2$ і внутрішнім опором R_2 , а джерело напруги E_4 у джерело струму $J_4 = E_4 / R_4$ і внутрішнім опором R_4 (напрямок джерела E_2 збігається з напрямом J_2 , а напрям джерела J_4 – з напрямом E_4) (рис.2.14).

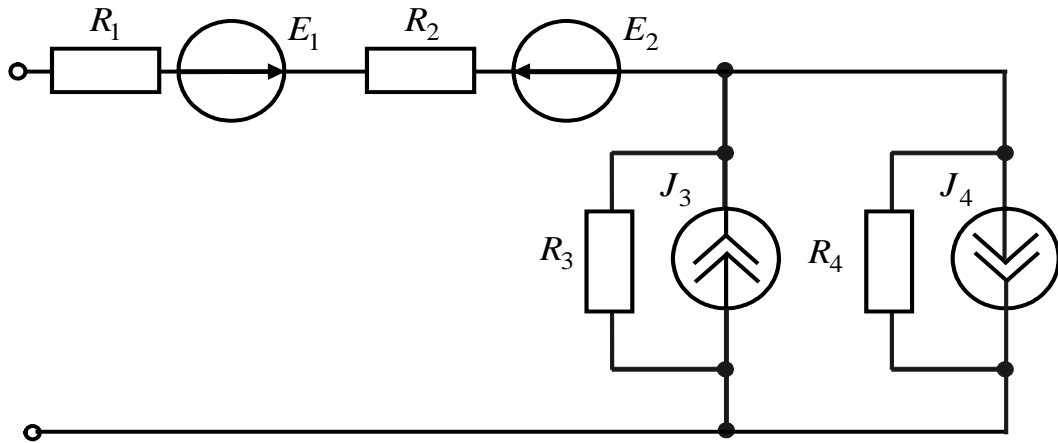


Рисунок 2.14 – Перше перетворення вихідної схеми

3. Оскільки джерела E_1 і E_2 з'єднані послідовно, їх можна замінити джерелом напруги з ЕРС $E_{12} = E_1 - E_2$ (враховано, що напрям джерела E_{12} збігається з напрямом джерела E_1) з внутрішнім опором $R_{12} = R_1 + R_2$ (рис.2.15, а).

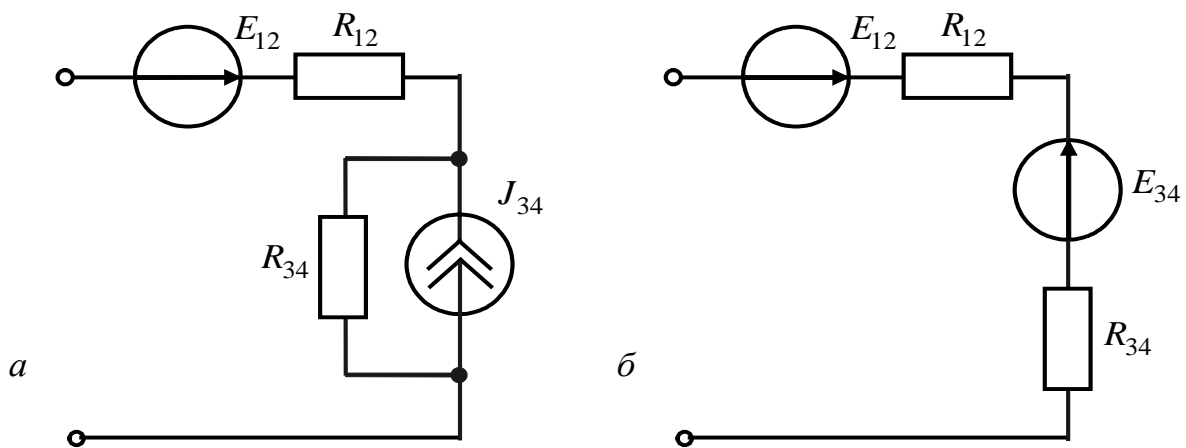


Рисунок 2.15 – Друге та третє перетворення вихідної схеми

4. Оскільки джерела струму J_3 і J_4 з'єднані паралельно, їх можна замінити джерелом струму $J_{34} = J_3 - J_4$ (прийнято, що напрям джерела J_{34} збігається з напрямом джерела J_3) з внутрішнім опором $R_{34} = R_3 R_4 / (R_3 + R_4)$ (рис.2.15, а).

5. Оскільки джерела E_{12} і J_{34} з'єднані послідовно, для їхнього подальшого перетворення необхідно перетворити джерело струму J_{34} у джерело напруги з ЕРС $E_{34} = J_{34}R_{34}$ з еквівалентним опором R_{34} (рис.2.15, б).

6. Перетворимо два послідовно з'єднані джерела ЕРС E_{12} і E_{34} в еквівалентне джерело $E_e = E_{12} - E_{34}$ з еквівалентним опором $R_e = R_{12} + R_{34}$ (рис.2.16, а). Це еквівалентне джерело можна перетворити у джерело струму зі струмом $J_e = E_e / R_e$. (рис.2.16, б).

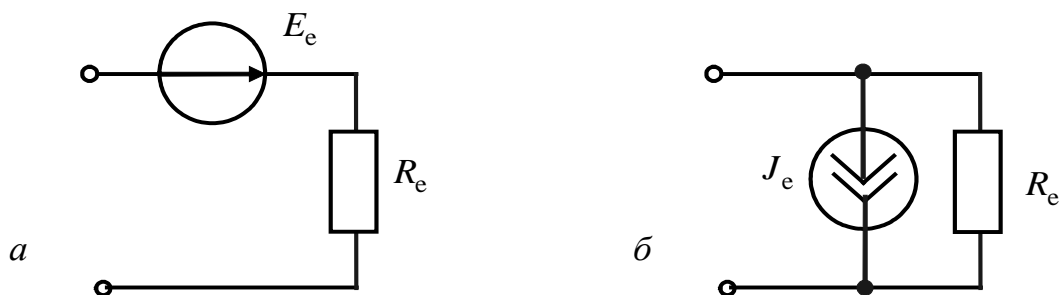


Рисунок 2.16 – Завершальне перетворення вихідної схеми

Отже, в результаті виконання еквівалентних перетворень отримано значення ЕРС еквівалентного джерела напруги E_e , струму еквівалентного джерела струму J_e та їхній еквівалентний опір R_e відповідно:

$$\begin{aligned}
 E_e &= E_1 - E_2 - J_{34} \cdot R_{34} = E_1 - J_2 R_2 - (J_3 - J_4) \cdot \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \\
 &= E_1 - J_2 R_2 - \left(J_3 - \frac{E_4}{R_4} \right) \cdot \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{(R_3 + R_4)(E_1 - J_2 R_2) - J_3 R_3 R_4 + E_4 R_3}{(R_3 + R_4)}; \\
 R_e &= R_1 + R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{R_1 (R_3 + R_4) + R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4}{R_3 + R_4}; \\
 J_e &= \frac{E_e}{R_e} = \frac{(R_3 + R_4)(E_1 - J_2 R_2) - J_3 R_3 R_4 + E_4 R_3}{R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4}.
 \end{aligned}$$

3 МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

Задача аналізу (розрахунку) електричного кола полягає у визначення електричного стану кола (струмів у вітках, напруг на елементах), якщо задані параметри кола. Розглянуті у розд.2 методи перетворень не завжди дозволяють спростити схеми та виконати розрахунки. Тоді використовують складніші методи аналізу, розглянуті нижче у цьому розділі.

3.1 Метод рівняння Кірхгофа

Припустимо, що схема містить p віток і q вузлів. Кількість невідомих струмів дорівнює кількості віток.

За **першим законом Кірхгофа** алгебраїчна сума струмів, які сходяться у вузлі, дорівнює нулю. За цим законом можна записати $q - 1$ незалежних рівнянь, рівняння для останнього q -го вузла є наслідком попередніх $q - 1$ рівнянь.

Вузли, для яких записано незалежні рівняння, називають **незалежними**.

За **другим законом Кірхгофа**, який виражає рівність алгебраїчної суми ЕРС у контурі алгебраїчній сумі спадів напруг на пасивних елементах, можна записати $p - q + 1$ незалежних рівнянь.

Дійсно, якщо до всіх віток застосувати закон Ома, отримана система рівнянь міститиме p невідомих струмів і $q - 1$ невідомих потенціалів (потенціал одного з вузлів беруть нульовим). Якщо з цієї системи послідовно виключити невідомі потенціали, залишиться $p - q + 1$ рівнянь. Цим незалежним рівнянням у схемі відповідають $p - q + 1$ **незалежних контурів**.

Для того, щоб рівняння, складені за другим законом Кірхгофа, а, отже, і самі контури були незалежними, достатньо, щоб кожний наступний контур відрізнявся від попереднього хоча б однією віткою.

Методика розв'язання задач за методом рівнянь Кірхгофа.

1. Визначити кількість віток p віток і кількість q вузлів.
2. Пронумерувати вузли, обрати напрям струмів віток та напрями обходу незалежних контурів (довільно).
3. Скласти $q - 1$ рівнянь за першим законом Кірхгофа.
4. Скласти $p - q + 1$ рівнянь за другим законом Кірхгофа.
5. Розв'язати отриману систему рівнянь відносно струмів віток (одним з відомих методів).

Розв'язання. У схемі кількість віток $p = 3$, кількість вузлів $q = 2$.

Кількість незалежних рівнянь за першим законом Кірхгофа $q - 1 = 1$, за другим – $p - q + 1 = 2$. Оберемо незалежні контури I та II і позначимо на схемі напрями обходу контурів та напрями струмів у вітках.

Складемо систему рівнянь Кірхгофа:

$$\text{для вузла 1} \quad I_1 + I_2 - I_3 = 0;$$

$$\text{для контуру 1} \quad R_1 I_1 - R_2 I_2 = E_1;$$

$$\text{для контуру 2} \quad R_2 I_2 + R_3 I_3 = -E_2.$$

У системі рівнянь

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0; \\ R_1 I_1 - R_2 I_2 = E_1; \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 = -E_2 \end{cases}$$

невідомими є струми у вітках I_1, I_2, I_3 .

Подамо систему рівнянь у матричному вигляді:

$$(a) \cdot (I) = (F),$$

$$\text{де } (a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 & -R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 \end{pmatrix}; \quad (I) = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}; \quad (F) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_1 \\ -E_2 \end{pmatrix}.$$

Головний визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 & -R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 \end{vmatrix} = -R_2 R_3 - R_2 R_1 - R_1 R_3.$$

Визначник Δ_1 виходить з визначника Δ , якщо замінити перший стовпець на стовпець вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ E_1 & -R_2 & 0 \\ -E_2 & R_2 & R_3 \end{vmatrix} = -E_1 R_2 - E_2 R_2 - E_1 R_3.$$

За формулою Крамера визначаємо струм I_1 :

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{E_1 R_2 - E_2 R_2 - E_1 R_3}{R_2 R_3 + R_2 R_1 + R_1 R_3}.$$

Недоліком методу рівнянь Кірхгофа є велика кількість рівнянь. Тому застосовують потужніші методи, які дозволяють зменшити кількість рівнянь.

3.2 Метод контурних струмів

Метод контурних струмів полягає у тому, що складають та розв'язують рівняння, які записано за другим законом Кірхгофа, відносно так званих контурних струмів.

Контурні струми – це розрахункові (умовні) величини, які замикаються тільки в одному контурі та не поширюються на ін. Кількість контурних струмів дорівнює кількості незалежних контурів $p - q + 1$.

Методика розв'язання задач методом контурних струмів.

1. У схемі довільно позначити напрями струмів віток.
2. Вибрати довільно незалежні контури і напрями контурних струмів.
3. За наявності у колі реальних джерел струму перетворити їх у реальні джерела напруги (див. пп. 1.1.2, 2.5). Якщо у схемі наявні ідеальні джерела струму, незалежні контури вибирають так, щоб джерела струму входили до головних віток відповідних контурів. Це зменшує кількість рівнянь системи на число ідеальних джерел струму, оскільки їхній струм дорівнює відповідному контурному струму.

4. Скласти матрицю опорів схеми, яка містить власні та взаємні опори.

Власний опір контуру R_{kk} – сума опорів, які утворюють контур (завжди додатний).

Взаємний (спільний) опір R_{ik} контурів i та k – опір, який входить в обидва контури (додатний, якщо напрями контурних струмів у ньому збігаються).

5. Скласти матрицю-стовпець ЕРС, які входять у контур (зі знаком «+», якщо напрям ЕРС збігається з напрямом контурного струму і навпаки).
6. Розрахувати контурні струми (зокрема, за формулою Крамера).
7. Знайти струм заданої вітки як алгебраїчну суму контурних струмів, які протікають крізь цю вітку.

Приклад 3.2. Розрахувати струм у діагоналі мостової схеми (рис.3.2).

Розв'язання. 1. Позначимо напрями струмів віток та контурних струмів I_I, I_{II}, I_{III} .

2. Складемо матрицю опорів схеми:

$$(R) = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix},$$

де $R_{11} = R_1 + R_2 + R_5$, $R_{22} = R_3 + R_4 + R_5$, $R_{33} = R_2 + R_3 + R_6$ – власні опори;

$R_{12} = R_{21} = -R_5$, $R_{13} = R_{31} = -R_2$, $R_{23} = R_{32} = -R_3$ – взаємні опори контурів.

3. Визначимо матрицю-стовпець контурних ЕРС:

$$(E) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -E \end{pmatrix}.$$

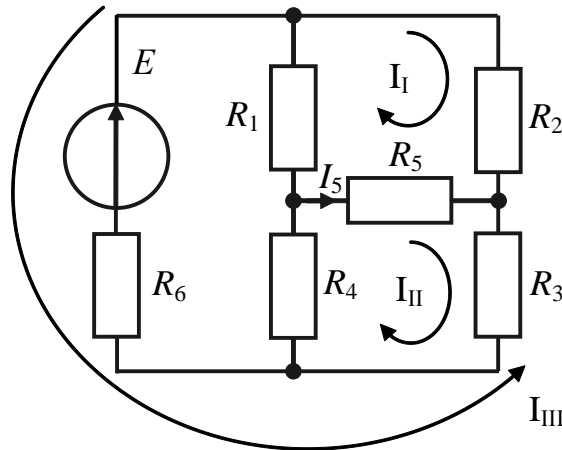


Рисунок 3.2 – Схема до прикладу 3.2

4. Запишемо систему рівнянь у матричній формі: $(E) = (R) \cdot (I)$,

де $(I) = \begin{pmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець контурних струмів.

5. Знайдемо контурні струми за формулою Крамера:

$$I_I = \frac{1}{\Delta_R} \begin{vmatrix} 0 & R_{12} & R_{13} \\ 0 & R_{22} & R_{23} \\ -E & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = \frac{-ER_{12}R_{23} + ER_{22}R_{13}}{\Delta_R} = \frac{-E(R_5R_3 + (R_3 + R_4 + R_5)R_2)}{\Delta_R};$$

$$I_{II} = \frac{1}{\Delta_R} \begin{vmatrix} R_{11} & 0 & R_{13} \\ R_{21} & 0 & R_{23} \\ R_{31} & -E & R_{33} \end{vmatrix} = \frac{-ER_{21}R_{13} + ER_{11}R_{23}}{\Delta_R} = \frac{-E(R_5R_2 + (R_1 + R_2 + R_5)R_3)}{\Delta_R};$$

$$I_{III} = \frac{1}{\Delta_R} \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & -E \end{vmatrix} = \frac{-ER_{11}R_{22} + ER_{12}R_{21}}{\Delta_R} = \frac{-E[(R_1 + R_2 + R_5)(R_3 + R_4 + R_5) - R_5^2]}{\Delta_R},$$

де $\Delta_R = (R_1 + R_2 + R_5)(R_3 + R_4 + R_5)(R_2 + R_3 + R_6) - 2R_5R_3R_2 -$
 $-R_5^2(R_3 + R_4 + R_5) - R_3^2(R_1 + R_2 + R_5) - R_5^2(R_6 + R_2 + R_3).$

6. Струм у діагоналі моста дорівнює різниці контурних струмів:

$$I_5 = I_{II} - I_I = \frac{E}{\Delta_R} (R_2 R_4 - R_1 R_3).$$

Зазначимо, якщо вибрати контури так, щоб крізь діагональну вітку R_5 проходив лише один контурний струм, тоді шуканий струм вітки дорівнюватиме цьому струму, отже, задача зводиться до визначення єдиного струму.

3.3 Метод вузлових напруг

Метод вузлових напруг полягає в тому, що на підставі першого закону Кірхгофа визначають так звані **вузлові напруги** – напруги у вузлах електричного кола відносно **базисного вузла**. Додатним напрямом напруги вважають напрям до базисного вузла. Напруга на певній вітці дорівнює різниці вузлових напруг на цій вітці. Добуток цієї напруги на провідність вітки визначає струм вітки.

Метод вузлових напруг має перевагу порівняно з методом контурних струмів лише тоді, коли кількість рівнянь за другим законом Кірхгофа $p - q + 1$ більше кількості рівнянь за першим законом Кірхгофа $q - 1$. Тобто, якщо $p > 2(q - 1)$.

Методика розв'язання задач методом вузлових напруг.

1. Пронумерувати вузли схеми та вибрати базисний вузол.
2. Позначити вузлові напруги та спрямувати їх до базисного вузла.
3. Перетворити реальні джерела напруги у реальні джерела струму. За наявності в схемі ідеального джерела напруги як базисний вибрати один з вузлів, до якого увімкнено ідеальне джерело. При цьому напруга вузла, до якого увімкнено джерело, є вузловою напругою. Наявність у схемі ідеальних джерел напруги спрощує розв'язок задачі, оскільки скорочує кількість невідомих. Наявність ідеальних джерел напруги, які не мають спільного вузла, не дозволяє розв'язання задачі методом вузлових напруг.

4. Скласти матрицю провідностей схеми, яка містить власні та взаємні провідності. **Власна провідність** вузла G_{kk} – сума провідностей, які увімкнено до k -го вузла. **Взаємна провідність** вузлів G_{ik} ($i \neq k$) – сума провідностей, увімкнених між i -им та k -им вузлами. Взаємна провідність від'ємна, якщо напрями вузлових напруг однакові, інакше – додатна.

5. Визначити матрицю-стовпець струмів джерел (I_0). Струм джерела, який входить у вузол, беруть зі знаком «+», який виходить – зі знаком «-».

6. Скласти систему рівнянь у матричній формі:

$$(I_0) = (G) \cdot (U),$$

де (U) – матриця-стовпець вузлових напруг.

7. Визначити вузлові напруги U_k за формулою Крамера.

8. Розрахувати струми віток через вузлові напруги $I_k = U_k G_k$.

Приклад 3.3. Визначити струми у вітках схеми (рис.3.3, а).

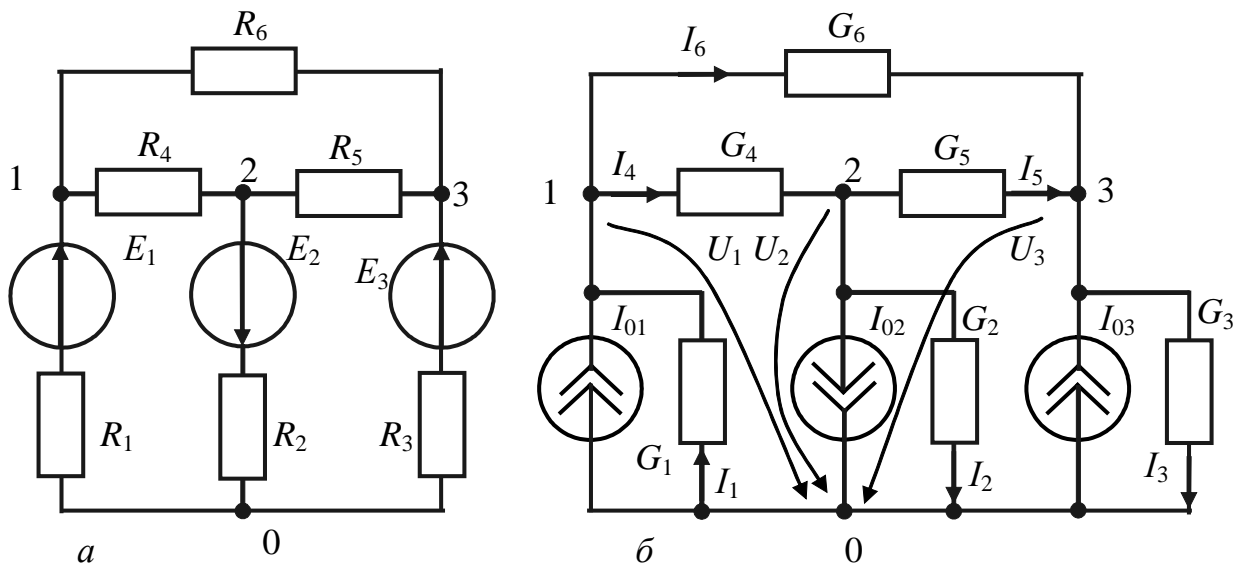


Рисунок 3.3 – Схеми до прикладу 3.3:
а – початкова; б – після перетворення джерел

Розв'язання.

1. Пронумеруємо вузли і виберемо як базисний вузол 0.

2. Спрямуємо вузлові напруги до базисного вузла.

3. Перетворимо джерела напруги у джерела струму (рис.3.3, б): $I_{01} = E_1 G_1$,

$$I_{02} = E_2 G_2, \quad I_{03} = E_3 G_3.$$

4. Складемо матрицю провідностей схеми:

$$(G) = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix},$$

де $G_1 = G_1 + G_4 + G_6$, $G_{22} = G_4 + G_2 + G_5$, $G_{33} = G_5 + G_6 + G_3$ – власні провідності; $G_{12} = G_{21} = -G_4$, $G_{13} = G_{31} = -G_6$, $G_{23} = G_{32} = -G_5$ – взаємні провідності вузлів.

5. Запишемо матрицю-стовпець струмів джерел струму:

$$(I_0) = \begin{pmatrix} I_{01} \\ -I_{02} \\ I_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 G_1 \\ -E_2 G_2 \\ E_3 G_3 \end{pmatrix}.$$

6. Складемо систему рівнянь у матричній формі:

$$(I_0) = (G) \cdot (U),$$

де $(U) = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець вузлових напруг.

7. Знайдемо вузлові напруги за формулою Крамера:

$$U_1 = \frac{1}{\Delta_G} \begin{vmatrix} E_1 G_1 & G_{12} & G_{13} \\ -E_2 G_2 & G_{22} & G_{23} \\ E_3 G_3 & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta_G} \begin{vmatrix} E_1 G_1 & -G_4 & -G_6 \\ -E_2 G_2 & G_4 + G_2 + G_5 & -G_5 \\ E_3 G_3 & -G_5 & G_5 + G_6 + G_3 \end{vmatrix};$$

$$U_2 = \frac{1}{\Delta_G} \begin{vmatrix} G_{11} & E_1 G_1 & G_{13} \\ G_{21} & -E_2 G_2 & G_{23} \\ G_{31} & E_3 G_3 & G_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta_G} \begin{vmatrix} G_1 + G_2 + G_6 & E_1 G_1 & -G_6 \\ -G_4 & -E_2 G_2 & -G_5 \\ -G_6 & E_3 G_3 & G_5 + G_6 + G_3 \end{vmatrix};$$

$$U_3 = \frac{1}{\Delta_G} \begin{vmatrix} G_{11} & G_{21} & E_1 G_1 \\ G_{21} & G_{22} & -E_2 G_2 \\ G_{31} & G_{32} & E_3 G_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta_G} \begin{vmatrix} G_1 + G_2 + G_6 & -G_4 & E_1 G_1 \\ -G_4 & G_4 + G_2 + G_5 & -E_2 G_2 \\ -G_6 & -G_5 & E_3 G_3 \end{vmatrix}.$$

8. Знайдемо струми у вітках через вузлові напруги: $I_1 = -U_1 G_1$; $I_2 = U_2 G_2$; $I_3 = U_3 G_3$; $I_4 = (U_1 - U_2) G_4$; $I_5 = (U_2 - U_3) G_5$; $I_6 = (U_1 - U_3) G_6$.

3.4 Метод накладання (суперпозиції)

Метод накладання справедливий лише для лінійних електричних кіл (для струмів та напруг, але не для потужностей).

Згідно із методом накладання струм вітки (напругу на елементі) визначають як алгебраїчну суму часткових струмів (напруг), спричинених кожним окремим джерелом. Часткові струми визначають, зазвичай, методом еквівален-

тних перетворень, по чергово виключаючи джерела (джерела напруги замикають, а джерела струму розмикають).

Цей метод застосовують для відносно простих кіл з багатьма джерелами.

Приклад 3.4. Визначити струм I_3 у схемі (рис.3.4, а).

Розв'язання.

Перший частковий струм визначимо із схеми (рис.3.4, б), в якій замкнено джерело напруги E_2 :

$$I'_3 = U'_{R_3} / R_3 = I'_1 \frac{R_2 R_3}{(R_2 + R_3) R_3} = I'_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3}.$$

$$\text{Оскільки } I'_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_2 R_3 / (R_2 + R_3)}, \quad I'_3 = E_1 \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

Другий частковий струм визначимо із схеми (рис.3.4, в), в якій замкнено джерело напруги E_1 :

$$I''_3 = U''_{R_3} / R_3 = I''_2 \frac{R_1 R_3}{(R_1 + R_3) R_3} = I''_2 \frac{R_1}{R_1 + R_3}.$$

$$\text{Оскільки } I''_2 = \frac{E_2}{R_2 + R_1 R_3 / (R_1 + R_3)}, \quad I''_3 = E_2 \frac{R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

Оскільки у схемі два джерела, струм визначимо як суму двох часткових струмів: $I_3 = I'_3 + I''_3$:

$$I_3 = E_1 \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} + E_2 \frac{R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

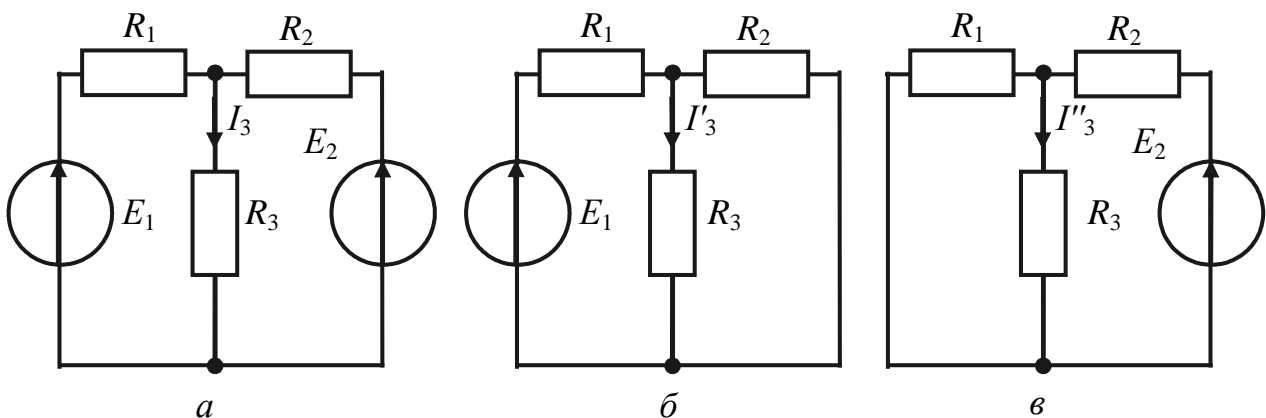


Рисунок 3.4 – Схеми до прикладу 3.4:
а – початкова; б, в – для першого і другого часткових струмів

3.5 Контрольні запитання та завдання

1. У чому полягає метод рівнянь Кірхгофа?
2. Поясніть методику розв'язання задач із використанням методу рівнянь Кірхгофа.
3. У чому полягає метод контурних струмів?
4. Поясніть поняття «контурні струми».
5. Як визначити кількість незалежних контурів у схемі?
6. Поясніть поняття «власний опір» контуру та «взаємний» опір контурів.
7. Поясніть методику розв'язання задач із використанням методу контурних струмів.
8. Поясніть поняття «вузлові напруги».
9. У чому полягає метод вузлових напруг?
10. Як визначити напругу вітки через вузлові напруги?
11. Як визначити кількість рівнянь, які складають, розв'язуючи задачу методом вузлових напруг?
12. Поясніть поняття «власна провідність» вузла та «взаємна» провідність вузлів.
13. Поясніть методику розв'язання задач із використанням методу вузлових напруг.
14. Поясніть сутність методу накладання.
15. Як виключають зі схеми джерела струму і напруги, розв'язуючи задачі методом накладання?

3.6 Контрольні завдання

Для заданих у табл.3.1 параметрів схеми (рис.3.5) визначити заданий струм методами контурних струмів, вузлових напруг і методом накладання.

Примітка.

1. Цифрові позначення (рис.3.5) відповідають опорам або реальним джерелам напруги.
2. Позитивний напрям джерел напруги під час створення вихідної електричної схеми відповідає напрямку ліворуч-праворуч і знизу-вгору (див. рис.2.10, б, в).

Таблиця 3.1 – Варіанти контрольного завдання

Номер варіанта	Схема	Вітки						Струм
		1	2	3	4	5	6	
1-а	а	$-E_1, R_1$	E_2, R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	I_1
2-а	б	R_1	R_2	R_3	R_4	E_1, R_5	E_2, R_6	I_4
3-а	а	R_1	E_1, R_2	$-E_2, R_3$	R_4	R_5	R_6	I_3
4-а	б	$-E_1, R_1$	$-E_2, R_2$	R_3	R_4	R_5	R_6	I_2
5-а	а	R_1	$-E_1, R_2$	R_3	R_4	$-E_2, R_5$	R_6	I_6
6-а	а	E_1, R_1	R_2	R_3	E_2, R_4	R_5	R_6	I_4
7-а	б	$-E_1, R_1$	R_2	R_3	R_4	$-E_2, R_5$	R_6	I_2
8-а	а	R_1	$-E_1, R_2$	R_3	E_2, R_4	R_5	R_6	I_5
9-а	б	$-E_1, R_1$	R_2	E_2, R_3	R_4	R_5	R_6	I_6
10-а	а	$-E_1, R_1$	R_2	R_3	R_4	$-E_2, R_5$	R_6	I_2
11-а	а	R_1	E_1, R_2	R_3	$-E_2, R_4$	R_5	R_6	I_1
12-а	б	R_1	R_2	R_3	R_4	$-E_1, R_5$	$-E_2, R_6$	I_3
13-а	а	$-E_1, R_1$	$-E_2, R_2$	R_3	R_4	R_5	R_6	I_5
14-а	б	$-E_1, R_1$	R_2	R_3	R_4	E_2, R_5	R_6	I_4
15-а	а	R_1	E_1, R_2	E_2, R_3	R_4	R_5	R_6	I_1
16-а	а	E_1, R_1	R_2	R_3	R_4	$-E_2, R_5$	R_6	I_3
17-а	б	$-E_1, R_1$	R_2	$-E_2, R_3$	R_4	R_5	R_6	I_1
18-а	а	$-E_1, R_1$	R_2	R_3	E_2, R_4	R_5	R_6	I_2
19-а	б	$-E_1, R_1$	E_2, R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	I_4
20-а	а	R_1	E_1, R_2	R_3	R_4	$-E_2, R_5$	R_6	I_5
21-а	а	E_1, R_1	E_2, R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	I_2
22-а	б	E_1, R_1	R_2	$-E_2, R_3$	R_4	R_5	R_6	I_5
23-а	а	R_1	$-E_1, R_2$	$-E_2, R_3$	R_4	R_5	R_6	I_4
24-а	б	E_1, R_1	R_2	R_3	R_4	$-E_2, R_5$	R_6	I_6
25-а	а	E_1, R_1	R_2	R_3	$-E_2, R_4$	R_5	R_6	I_1
26-а	а	R_1	$-E_1, R_2$	R_3	$-E_2, R_4$	R_5	R_6	I_3
27-а	б	E_1, R_1	$-E_2, R_2$	R_3	R_4	R_5	R_6	I_5
28-а	а	R_1	E_1, R_2	R_3	R_4	E_2, R_5	R_6	I_2
29-а	б	E_1, R_1	R_2	$-E_2, R_3$	R_4	R_5	R_6	I_3
30-а	а	E_1, R_1	R_2	R_3	R_4	$-E_2, R_5$	R_6	I_5

Таблиця 3.1 – Продовження

Номер варіанта	Схема	Вітки						Струм
		1	2	3	4	5	6	
1-б	а	R_1	$-E_1, R_2$	E_2, R_3	R_4	R_5	R_6	I_2
2-б	б	R_1	R_2	R_3	R_4	E_1, R_5	$-E_2, R_6$	I_6
3-б	а	E_1, R_1	$-E_2, R_2$	R_3	R_4	R_5	R_6	I_3
4-б	б	$-E_1, R_1$	R_2	R_3	R_4	E_2, R_5	R_6	I_5
5-б	а	R_1	$-E_1, R_2$	R_3	E_2, R_4	R_5	R_6	I_2
6-б	а	E_1, R_1	R_2	R_3	R_4	E_2, R_5	R_6	I_1
7-б	б	$-E_1, R_1$	$-E_2, R_2$	R_3	R_4	R_5	R_6	I_6
8-б	а	R_1	$-E_1, R_2$	R_3	R_4	E_2, R_5	R_6	I_3
9-б	б	R_1	R_2	R_3	R_4	E_1, R_5	E_2, R_6	I_1
10-б	а	$-E_1, R_1$	R_2	R_3	E_2, R_4	R_5	R_6	I_5
11-б	а	R_1	E_1, R_2	$-E_2, R_3$	R_4	R_5	R_6	I_6
12-б	б	R_1	R_2	R_3	R_4	$-E_1, R_5$	E_2, R_6	I_2
13-б	а	$-E_1, R_1$	R_2	R_3	R_4	E_2, R_5	R_6	I_4
14-б	б	E_1, R_1	R_2	$-E_2, R_3$	R_4	R_5	R_6	I_2
15-б	а	E_1, R_1	$-E_2, R_2$	R_3	R_4	R_5	R_6	I_6
16-б	а	R_1	E_1, R_2	R_3	R_4	$-E_2, R_5$	R_6	I_4
17-б	б	R_1	R_2	R_3	R_4	$-E_1, R_5$	$-E_2, R_6$	I_5
18-б	а	$-E_1, R_1$	R_2	R_3	$-E_2, R_4$	R_5	R_6	I_3
19-б	б	E_1, R_1	R_2	R_3	R_4	E_2, R_5	R_6	I_1
20-б	а	R_1	E_1, R_2	R_3	$-E_2, R_4$	R_5	R_6	I_6
21-б	а	$-E_1, R_1$	E_2, R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	I_4
22-б	б	E_1, R_1	E_2, R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	I_3
23-б	а	R_1	$-E_1, R_2$	E_2, R_3	R_4	R_5	R_6	I_5
24-б	б	$-E_1, R_1$	R_2	E_2, R_3	R_4	R_5	R_6	I_4
25-б	а	E_1, R_1	R_2	R_3	$-E_2, R_4$	R_5	R_6	I_6
26-б	а	R_1	E_1, R_2	R_3	$-E_2, R_4$	R_5	R_6	I_4
27-б	б	E_1, R_1	$-E_1, R_2$	R_3	R_4	R_5	R_6	I_1
28-б	а	$-E_1, R_1$	R_2	R_3	R_4	E_2, R_5	R_6	I_6
29-б	б	E_1, R_1	R_2	R_3	R_4	$-E_2, R_5$	R_6	I_3
30-б	а	R_1	$-E_1, R_2$	R_3	R_4	E_2, R_5	R_6	I_1

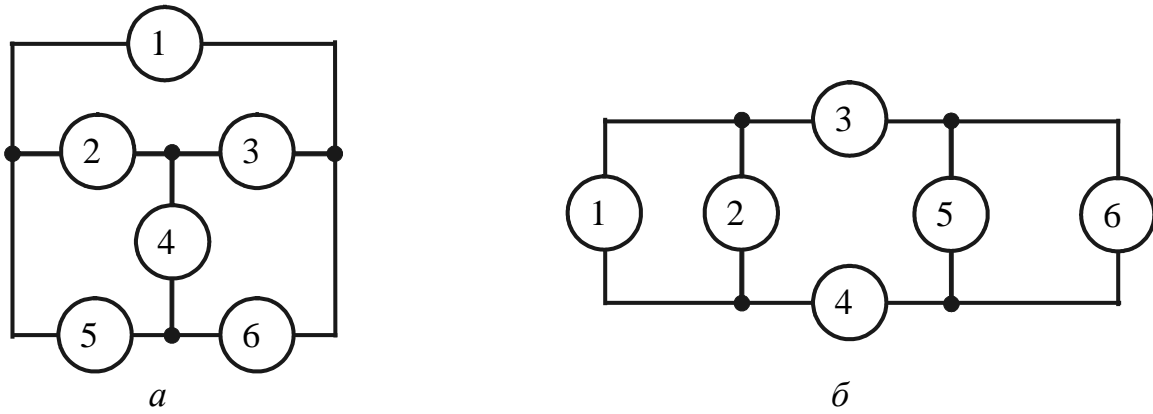


Рисунок 3.5 – Варіанти схем для виконання контрольного завдання

3.7 Приклад виконання контрольного завдання

Для заданої у табл.3.2 схеми (рис.3.6) знайдемо заданий струм I_3 методами контурних струмів, вузлових напруг і накладання.

Таблиця 3.2 – Варіант прикладу виконання контрольного завдання

№ варіанта	Схема	Вітки						Струм
		1	2	3	4	5	6	
Приклад	3.5, б	R_1	E_1, R_2	R_3	R_4	R_5	$-E_2, R_6$	I_3

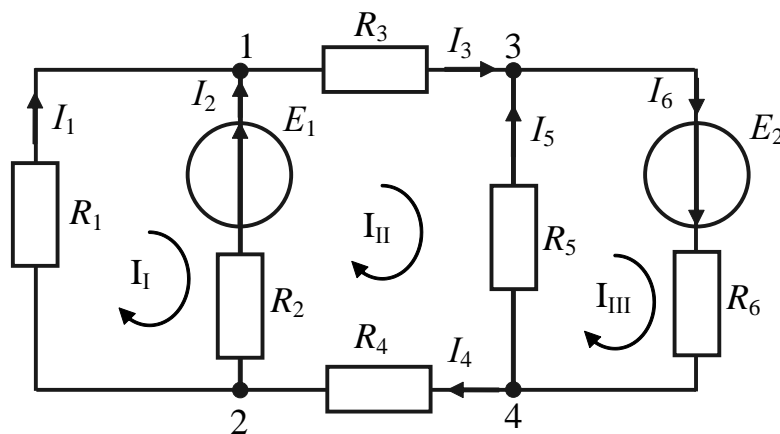


Рисунок 3.6 – Схема до прикладу виконання контрольного

3.7.1 Метод контурних струмів

1. У схемі (рис.3.6) довільно позначаємо напрями струмів віток і обираємо позитивні напрями обходу незалежних контурів.

2. Складаємо матрицю опорів схеми:

$$(R) = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 + R_5 & -R_5 \\ 0 & -R_5 & R_5 + R_6 \end{pmatrix}.$$

3. Визначаємо матрицю-стовпець контурних ЕРС:

$$(E) = \begin{pmatrix} -E_1 \\ E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}.$$

4. Запишемо систему рівнянь у матричній формі:

$$(E) = (R) \cdot (I),$$

де $(I) = \begin{pmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець контурних струмів.

5. За формулою Крамера запишемо контурний струм I_{II} , який проходить крізь вітку R_3 :

$$\begin{aligned} I_3 = I_{II} &= \frac{\Delta_2}{\Delta_R} = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -E_1 & 0 \\ -R_2 & E_1 & -R_5 \\ 0 & E_2 & R_5 + R_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 + R_5 & -R_5 \\ 0 & -R_5 & R_5 + R_6 \end{vmatrix}} = \\ &= \frac{E_1(R_5 + R_6)(R_1 + R_2) + E_2R_5(R_1 + R_2) - E_1R_2(R_5 + R_6)}{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3 + R_4 + R_5)(R_5 + R_6) - R_5^2(R_1 + R_2) - R_2^2(R_5 + R_6)} = \\ &= \frac{E_1R_1(R_5 + R_6) + E_2R_5(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3 + R_4 + R_5)(R_5 + R_6) - R_5^2(R_1 + R_2) - R_2^2(R_5 + R_6)}. \end{aligned}$$

3.7.2 Метод вузлових напруг

1. Замінімо джерела напруги еквівалентними джерелами струму (рис.3.7).
Виберемо як базисний четвертий вузол.

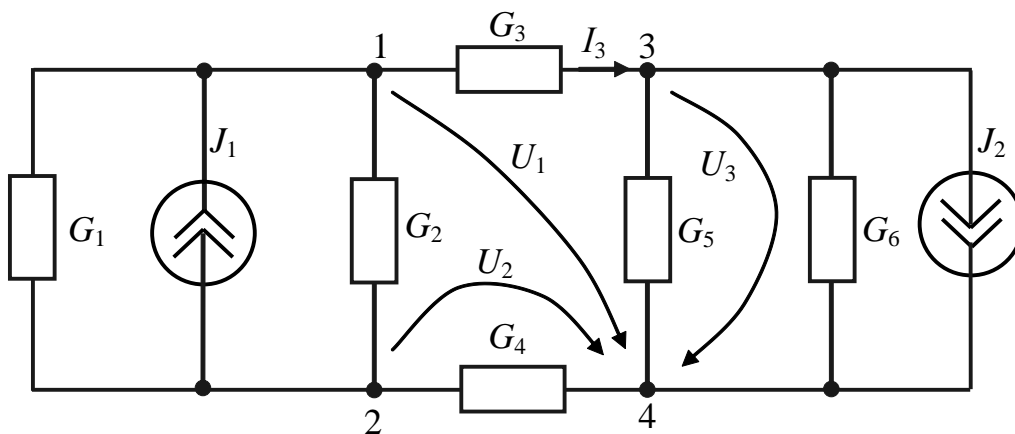


Рисунок 3.7 – Схема для виконання завдання методом вузлових

2. Складемо матрицю провідностей схеми:

$$(G) = \begin{pmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_1 - G_2 & -G_3 \\ -G_1 - G_2 & G_1 + G_2 + G_4 & 0 \\ -G_3 & 0 & G_3 + G_5 + G_6 \end{pmatrix}.$$

3. Запишемо матрицю-стовпець струмів джерел струму:

$$(I_0) = \begin{pmatrix} I_{01} \\ I_{02} \\ I_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 G_2 \\ -E_1 G_2 \\ -E_2 G_6 \end{pmatrix}.$$

4. Складемо систему рівнянь у матричній формі:

$$(I_0) = (G) \cdot (U),$$

де $(U) = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець вузлових напруг.

5. За правилом Крамера визначимо вузлові напруги:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{\Delta_G} \begin{vmatrix} E_1 G_2 & -G_1 - G_2 & -G_3 \\ -E_1 G_2 & G_1 + G_2 + G_4 & 0 \\ -E_2 G_6 & 0 & G_3 + G_5 + G_6 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{\Delta_G} [E_1 G_2 (G_1 + G_2 + G_4)(G_3 + G_5 + G_6) - E_2 G_6 G_3 (G_1 + G_2 + G_4) - \\ &\quad - E_1 G_2 (G_3 + G_5 + G_6)(G_1 + G_2)] = \\ &= \frac{1}{\Delta_G} [E_1 G_2 G_4 (G_3 + G_5 + G_6) - E_2 G_6 G_3 (G_1 + G_2 + G_4)]; \end{aligned}$$

$$U_3 = \frac{1}{\Delta_G} \begin{vmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_1 - G_2 & E_1 G_2 \\ -G_1 - G_2 & G_1 + G_2 + G_4 & -E_1 G_2 \\ -G_3 & 0 & -E_2 G_6 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta_G} [-E_2 G_6 (G_1 + G_2 + G_3)(G_1 + G_2 + G_4) - E_1 G_2 G_3 (G_1 + G_2) +$$

$$+ E_1 G_2 G_3 (G_1 + G_2 + G_4) + E_2 G_6 (G_1 + G_2)^2],$$

де

$$\Delta_G = -G_3^2 (G_1 + G_2 + G_4) - G_2^2 (G_3 + G_5 + G_6) +$$

$$+ (G_1 + G_2 + G_3)(G_1 + G_2 + G_4)(G_3 + G_5 + G_6).$$

6. Визначимо струм I_3 у вітці R_3 через вузлові напруги:

$$I_3 = (U_1 - U_3) G_3.$$

3.7.2 Метод накладання

Перший частковий струм I'_3 визначимо із схеми (рис.3.8, а), в якій замкнено джерело напруги E_2 :

$$I'_3 = U_{Re1} / R_{e1} = I'_2 \frac{R_1 R_{e1}}{(R_1 + R_{e1}) R_{e1}} = I'_2 \frac{R_1}{R_1 + R_{e1}}.$$

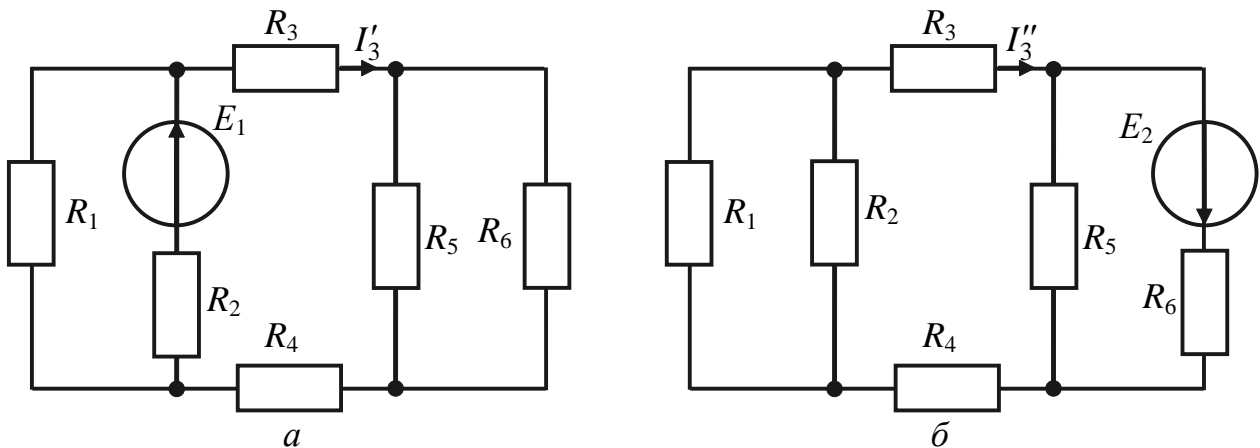


Рисунок 3.8 – Схема для визначення часткових струмів

Оскільки $R_{e1} = R_3 + R_4 + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6}$ (рис.3.9, а),

$$I'_2 = \frac{E_1}{R_2 + R_1 R_{e1} / (R_1 + R_{e1})}; \quad I'_3 = \frac{E_1 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_{e1} + R_1 R_{e1}}.$$

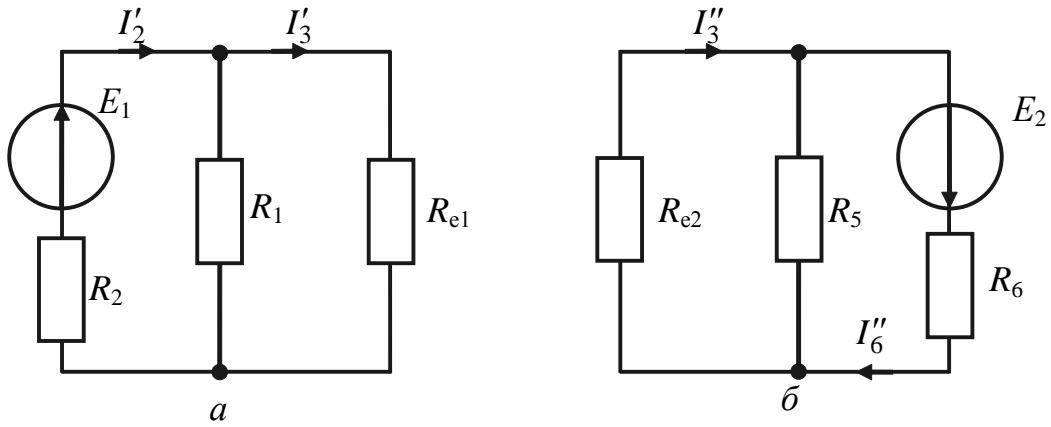


Рисунок 3.9 – Еквівалентні схеми для визначення часткових

Другий частковий струм I''_3 визначимо із схеми (рис.3.8, б), в якій замкнено джерело напруги E_1 :

$$I''_3 = U_{Re2} / R_{e2} = I''_6 \frac{R_5 R_{e2}}{(R_5 + R_{e2}) R_{e2}} = I''_6 \frac{R_5}{R_5 + R_{e2}}.$$

Оскільки $R_{e2} = R_3 + R_4 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (рис.3.9, б),

$$I''_6 = \frac{E_2}{R_6 + R_5 R_{e2} / (R_5 + R_{e2})}, \quad I''_3 = \frac{E_2 R_5}{R_5 R_6 + R_6 R_{e2} + R_5 R_{e2}}.$$

Оскільки у схемі два джерела, струм визначимо як алгебраїчну суму двох часткових струмів (додатні знаки струмів обумовлено збігом їхніх напрямів): $I_3 = I'_3 + I''_3$:

$$I_3 = \frac{E_1 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_{e1} + R_1 R_{e1}} + \frac{E_2 R_5}{R_5 R_6 + R_6 R_{e2} + R_5 R_{e2}}.$$

4 КОЛА СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

4.1 Параметри синусоїдних коливань

Змінний струм – це струм, який змінюється за довільним законом (рис.4.1).

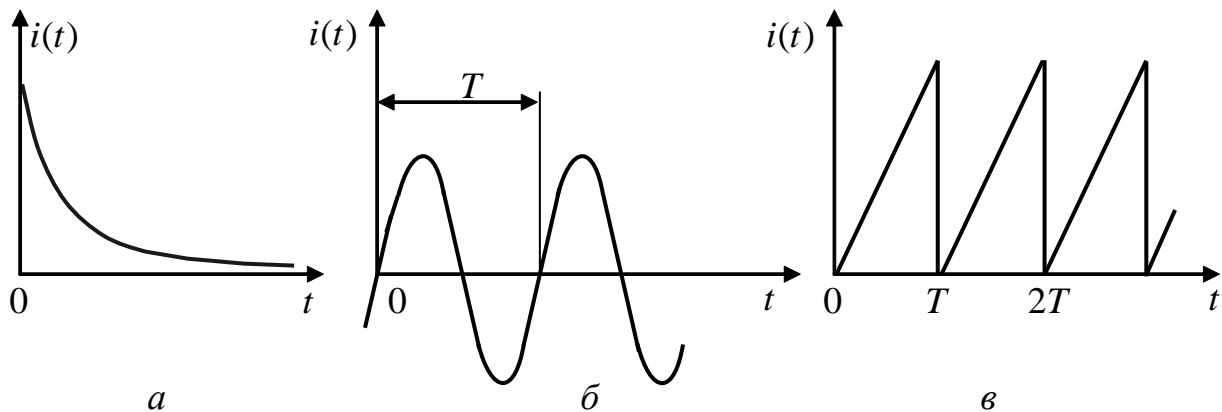


Рисунок 4.1 – Змінний струм: *a* – спадний; *б* – синусоїдний (гармонічний); *в* – пилкоподібний періодичний

Періодичний процес (струм, напруга, ЕРС) – процес, значення якого повторюються через однаковий проміжок часу (рис.4.1, *б*, *в*), що називають **періодом T** .

Частота (циклічна) – величина, обернена періоду:

$$f = \frac{1}{T}, \text{ Гц.} \quad (4.1)$$

Частота чисельно дорівнює кількості періодів за одиницю часу.

Періодичний процес можна подати як суму гармонічних коливань.

Гармонічний процес змінюється за законом синуса або косинуса:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = I_m \cos(\omega t + \psi_i - \pi/2), \quad (4.2)$$

де I_m – амплітуда, А; $f = \frac{1}{T}$ – частота, Гц; ω – кутова частота, рад/с;

ψ_i – початкова фаза, рад.

У виразі (4.2) аргумент синусу (косинусу) називають повною фазою $\theta(t) = \omega t + \psi_i$. Оскільки для гармонічних функцій $[\omega(t+T) - \omega t] = 2\pi$, то

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \text{ рад/с.} \quad (4.3)$$

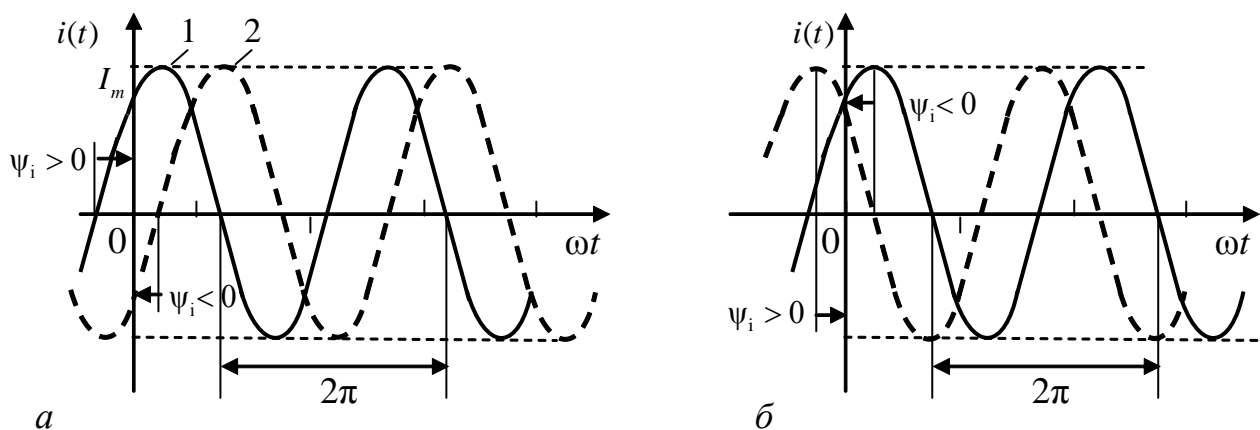


Рисунок 4.2 – Початкова фаза: *a* – синусоїдна; *б* – косинусоїдна функція

Початкова фаза синусоїдного струму – значення фази струму в початковий момент часу ($t = 0$). Інакше, початкова фаза відповідає абсцисі найближчої до початку відліку точки переходу з від’ємної півхвилі до додатної. На рис.4.1, *б* початкова фаза коливання дорівнює нулю, на рис.4.2, *a* перша крива має початкову фазу $\psi_i > 0$, якій відповідає $i(0) > 0$, а друга крива – $\psi_i < 0$, оскільки $i(0) < 0$. Якщо розглядати косинусоїдний струм $i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$, то як початкова фаза використовується абсциса найближчого додатного максимуму (рис.4.2, *б*).

Фізична дія струму (теплова або механічна) пропорційна квадрату струму. Тому величину гармонічного струму оцінюють за його середньоквадратичним значенням за період.

Діюче значення періодичного струму – це значення постійного струму, яке за період змінного струму в опорі R виділяє стільки ж енергії, скільки виділяє періодичний струм за той самий час.

Для періодичного струму $w = \int_0^T i^2(t) R dt$, для постійного – $W = PT = I^2 RT$.

За визначенням $R \int_0^T i^2(t) dt = RI^2 T$, звідки

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}, \quad (4.4)$$

де $i(t)$ – миттєве значення періодичного струму; I – діюче значення.

Щоб визначити діюче значення синусоїдного струму, підставимо до формули (4.4) миттєве значення струму $i(t) = I_m \sin \omega t$ ($\psi_i = 0$):

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{I_m^2}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt = \frac{I_m^2}{2T} T - 0 = \frac{I_m^2}{2}.$$

Отже, $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m; I_m = \sqrt{2} I \approx 1,41 I.$

4.2 Векторне подання синусоїдного струму

Миттєве значення функції $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ або $i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$ можна подати як проекції на вертикальну (горизонтальну) вісь вектора довжиною I_m , який обертається проти годинникової стрілки відносно початку полярної системи координат (рис.4.3).

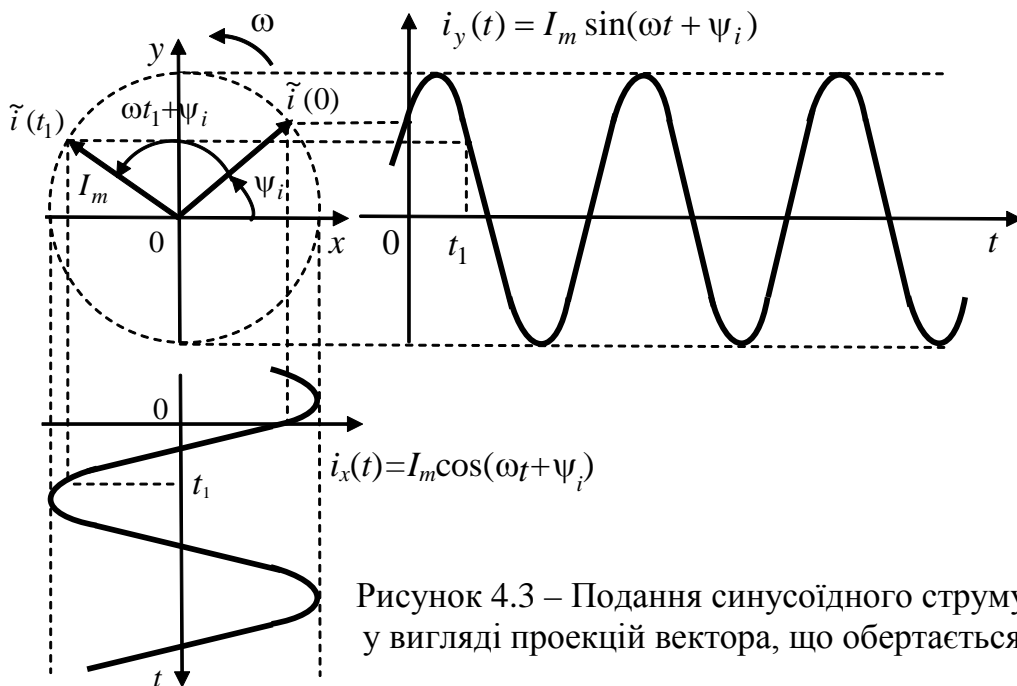


Рисунок 4.3 – Подання синусоїдного струму у вигляді проекцій вектора, що обертається

Якщо гармонічні коливання мають однакову частоту (когерентні коливання), то відповідні цим коливанням вектори обертаються з однаковою кутовою частотою і тому кути між ними не змінюються: $\Delta\varphi = \psi_1 - \psi_2$. Якщо $\varphi = 0$, коливання є синфазними, якщо $\Delta\varphi = \pm\pi/2$, коливання протифазні.

Діаграма, що зображує сукупність векторів із дотриманням їхньої взаємної орієнтації, називається **векторною діаграмою**. Векторне подання гармонічних коливань спрощує операції додавання або віднімання цих функцій.

Наприклад, необхідно додати функції $u_1(t) = U_{m1} \cos(\omega t + \psi_1)$ та $u_2(t) = U_{m2} \cos(\omega t + \psi_2)$. З тригонометрії відомо, що

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi); \quad (4.5)$$

$$U_m = \sqrt{U_{1m}^2 + U_{2m}^2 + 2U_{1m}U_{2m} \cos(\psi_1 - \psi_2)}; \quad (4.6)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{m1} \sin \psi_1 + U_{m2} \sin \psi_2}{U_{m1} \cos \psi_1 + U_{m2} \cos \psi_2}. \quad (4.7)$$

Такий самий результат випливає із векторної діаграми (рис.4.4, а). Так за теоремою Піфагора $U_m^2 = (U_{m1} \cos \psi_1 + U_{m2} \cos \psi_2)^2 + (U_{m1} \sin \psi_1 + U_{m2} \sin \psi_2)^2$, звідки виходить вираз (4.6). Вираз (4.7) виходить безпосередньо з векторної діаграми.

Операції віднімання функції $u_2(t)$ із функції $u_1(t)$ відповідає діаграма (рис.4.4, б). Із діаграми видно, що

$$U_m^2 = (U_{m1} \cos \psi_1 - U_{m2} \cos \psi_2)^2 + (U_{m1} \sin \psi_1 - U_{m2} \sin \psi_2)^2, \quad (4.8)$$

звідки

$$U_m = \sqrt{U_{1m}^2 + U_{2m}^2 - 2U_{1m}U_{2m} \cos(\psi_1 - \psi_2)}; \quad (4.9)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{m1} \sin \psi_1 - U_{m2} \sin \psi_2}{U_{m1} \cos \psi_1 - U_{m2} \cos \psi_2}. \quad (4.10)$$

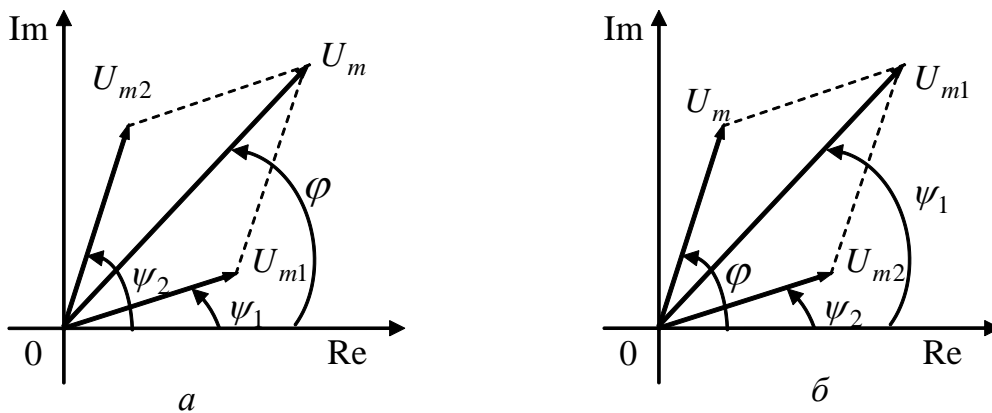


Рисунок 4.4 – Операції на векторній діаграмі: а – додавання; б – віднімання

4.3 Синусоїдний струм у пасивних елементах кола

4.3.1 Синусоїдний струм в опорі

Якщо синусоїдну напругу $u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u)$ прикласти до опору R , крізь нього відповідно до закону Ома потече струм

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m}{R} \cos(\omega t + \psi_u) = I_m \cos(\omega t + \psi_i). \quad (4.11)$$

Із виразу (4.11) виходить, що напруга і струм збігаються за фазою ($\psi_u = \psi_i$). Миттєва потужність, яка витрачається в опорі

$$p_R = u(t)i(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u) I_m \cos(\omega t + \psi_i) = U_m I_m \cos^2(\omega t + \psi_i) = \frac{U_m I_m}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \psi_u)]. \quad (4.12)$$

Миттєва потужність змінюється з подвоєною кутовою частотою порівняно із частотою напруги (струму) та містить постійну складову, яка дорівнює середньому за період значенню.

Це значення називається середньою або **активною потужністю** і вимірюється у ваттах (Вт):

$$P_R = \frac{1}{T} \int_0^T p_R(t) dt = \frac{U_m I_m}{2} = UI. \quad (4.13)$$

4.3.2 Синусоїдний струм в індуктивності

Відомо, що в індуктивності напруга і струм пов'язані виразом

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}. \quad (4.14)$$

Якщо $i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$, тоді

$$u_L(t) = -\omega L I_m \sin(\omega t + \psi_i) = I_m X_L \cos(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}) = U_m \cos(\omega t + \psi_u), \quad (4.15)$$

де $X_L = \omega L$ – індуктивний опір.

З виразу (4.15) виходить, що $\psi_u = \psi_i + \frac{\pi}{2}$, отже напруга на індуктивності випереджає струм за фазою на кут $\pi/2$ (рис.4.5).

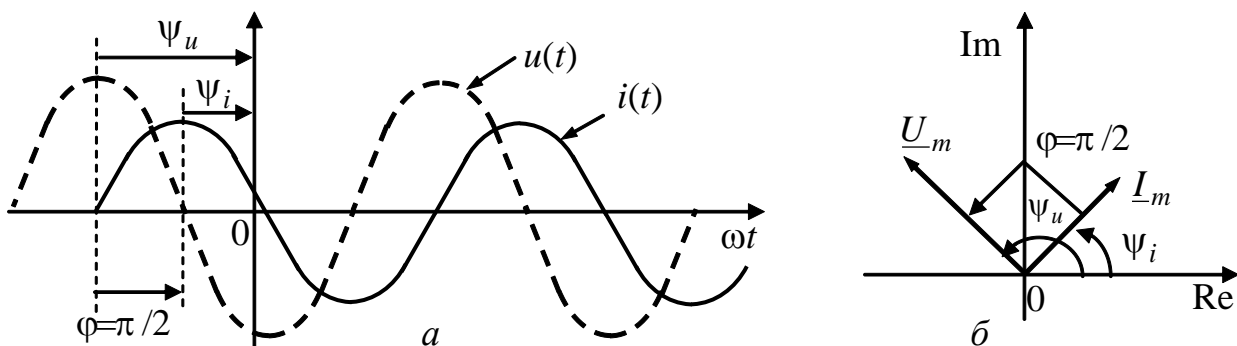


Рисунок 4.5 – Діаграми напруги і струму в індуктивності:
а – часова; б – векторна

Миттєва потужність, що надходить до індуктивності, становить:

$$p_L = ui = -I_m \cos(\omega t + \psi_i) U_m \sin(\omega t + \psi_i) = \\ = -\frac{U_m I_m}{2} \sin 2(\omega t + \psi_i) = -UI \sin 2(\omega t + \psi_i).$$

Очевидно, що активна потужність $P = 0$ (як середнє значення синусоїдної функції на інтервалі часу T).

4.3.3 Синусоїдний струм в ємності

Відомо, що в ємності напруга і струм пов'язані виразом

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}. \quad (4.16)$$

Якщо напруга на ємності $u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u)$, тоді

$$i_C(t) = -\omega C U_m \sin(\omega t + \psi_u) = \frac{U_m}{X_C} \cos(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}) = I_m \cos(\omega t + \psi_i), \quad (4.17)$$

де $X_C = \frac{1}{\omega C}$ – ємнісний опір, $I_m = \frac{U_m}{X_C}$.

З виразу (4.17) виходить, що $\psi_i = \psi_u + \frac{\pi}{2}$, отже струм в ємності випереджає напругу за фазою на кут $\pi/2$ (рис.4.6).

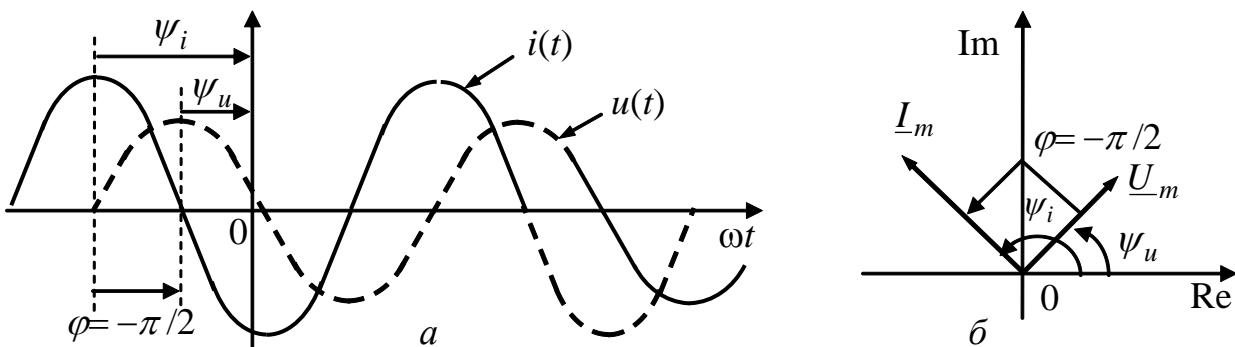


Рисунок 4.6 – Діаграми напруги і струму в ємності: a – часова; b – векторна

Миттєва потужність, що надходить до ємності, становить:

$$p_C = u_C i_C = -I_m \sin(\omega t + \psi_u) U_m \cos(\omega t + \psi_u) = \\ = -\frac{U_m I_m}{2} \sin 2(\omega t + \psi_u) = -UI \sin 2(\omega t + \psi_u).$$

Подібно індуктивності, активна потужність в ємності $P = 0$ (як середнє значення синусоїдної функції на інтервалі часу T).

4.3.4 Послідовне з'єднання R, L, C

Під час проходження синусоїдного струму $i(t) = I_m \cos \omega t$ через послідовне коло (рис.4.7) напруга на його затискачах відповідно до другого закону Кірхгофа становить:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = \\ &= RI_m \cos \omega t + I_m \omega L \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I_m}{\omega C} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= I_m R \cos \omega t + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

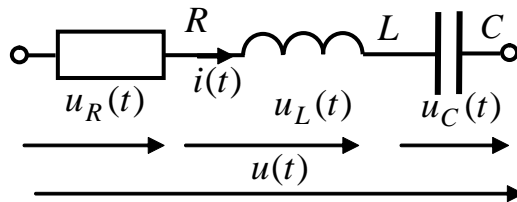


Рисунок 4.7 – Послідовне з'єднання елементів R, L, C

Величина $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ називається реактивним опором кола і може, залежно від знака, мати індуктивний ($X > 0$) або ємнісний характер ($X < 0$). Якщо $X = 0$, опір кола є суто активним і мінімальним. Такий режим називається **резонансом напруг**. Векторна діаграма діючих значень напруг кола зображена на рис.4.8.

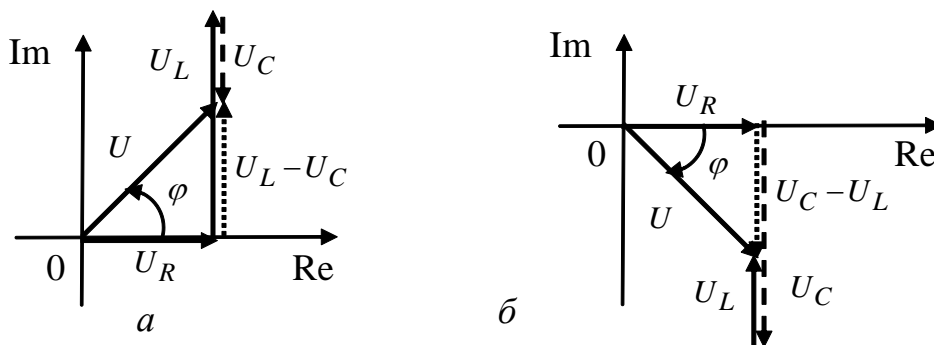


Рисунок 4.8 – Векторна діаграма напруг послідовного кола R, L, C :
 $a - X > 0, \varphi > 0$; $б - X < 0, \varphi < 0$

З діаграми видно, що діюче значення напруги кола

$$U = \sqrt{(RI)^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2 I^2} = I\sqrt{R^2 + X^2},$$

де $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$ – повний опір кола, який також назива-

ють **імпедансом**, $\varphi = \text{arctg} \frac{X}{R} = \text{arctg} \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$ – фаза напруги.

4.3.5 Паралельне з'єднання R, L, C

Якщо до затискачів кола (рис.4.9) прикладена напругу $u(t) = U_m \cos \omega t$, тоді миттєве значення струму відповідно до першого закону Кірхгофа становить:

$$\begin{aligned} i(t) &= i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = \frac{u(t)}{R} + \frac{1}{L} \int u(t) dt + C \frac{du(t)}{dt} = \\ &= \frac{U_m}{R} \cos \omega t + \frac{U_m}{\omega L} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) + U_m \omega C \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \\ &= \frac{U_m}{R} \cos \omega t + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) I_m \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

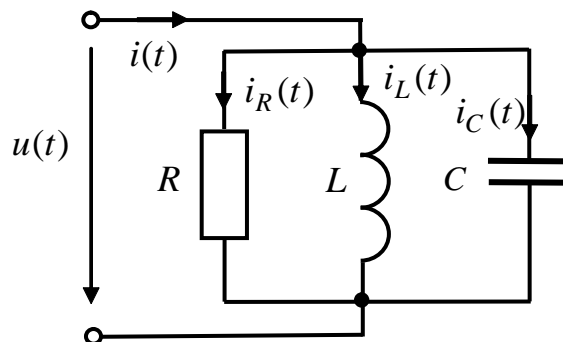


Рисунок 4.9 – Схема паралельного з'єднання елементів $R, L,$

Величина $B = \omega C - \frac{1}{\omega L}$ називається реактивною провідністю кола і може, залежно від знака, мати індуктивний ($B > 0$) або ємнісний характер ($B < 0$). Якщо $B = 0$, провідність кола є суто активною $1/R$ і мінімальною. Такий режим кола називається **резонансом струмів**. Векторна діаграма діючих значень струмів кола зображена на рис.4.10.

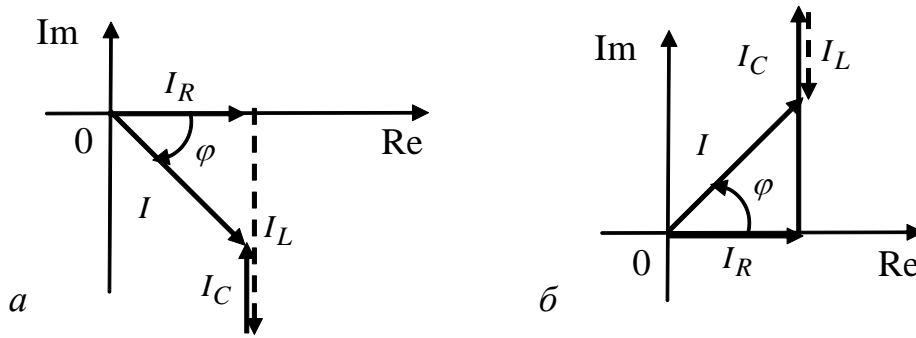


Рисунок 4.10 – Векторна діаграма струмів паралельного кола R, L, C :
 $a - B > 0$; $b - B < 0$

З діаграми видно, що діюче значення струму кола

$$I = \sqrt{(GU)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2 U^2} = U \sqrt{G^2 + B^2},$$

де $Y = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}$ – повна провідність кола, яку також

називають **адмітансом**, $\varphi = \arctg \frac{B}{G} = \arctg \frac{1/\omega L - \omega C}{G}$ – фаза струму.

4.4 Метод комплексних амплітуд

Розрахунки електричних кіл синусоїдного струму у тригонометричній формі або за допомогою векторних діаграм застосовують лише для простих схем. Недоліком векторного подання синусоїдних струмів, напруг і ЕРС є неточність графічних способів його реалізації і складність застосування для розв’язання систем рівнянь.

Поєднати переваги векторного подання гармонічних процесів і надати операціям над векторами аналітичної форми дозволяє перенесення векторів, що обертаються, на комплексну площину (рис.4.11, 4.12).

Щоб розраховувати кола синусоїдного струму подібно колам постійного струму, застосовують **метод комплексних амплітуд** (символічний метод), який ґрунтується на поданні електричних величин (струмів, напруг, опорів) у комплексній формі.

4.4.1 Властивості комплексних чисел

Комплексні числа, що відповідають векторам на комплексній площині, позначають підкреслюванням. Комплексні числа подають у трьох формах.

Алгебраїчна форма запису комплексних чисел:

$$\underline{A} = A_1 + jA_2, \quad (4.18)$$

де $A_1 = \text{Re}[\underline{A}] = A \cos \alpha$ – дійсна частина комплексного числа, $A_2 = \text{Im}[\underline{A}] = A \sin \alpha$ – уявна частина комплексного числа, $j = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця, A – модуль, α – аргумент комплексного числа.

Комплексне число можна визначити на комплексній площині у вигляді точки в декартовій, або радіус-вектора – в полярній системі координат.

По осі абсцис комплексної площини відкладають дійсні (реальні) складові комплексних чисел. Тому ця вісь називається **дійсною** і позначається Re .

Таке позначення дійсної осі пов'язане з операцією $\text{Re}[\dots]$, що означає виділення дійсної частини комплексного виразу в дужках, і з першими літерами слова *real* (дійсний).

Вісь ординат комплексної площини називається **уявною**, оскільки на ній відкладають уявні частини комплексних чисел. Позначення уявної осі Im зумовлене операцією виділення уявної частини комплексного виразу $\text{Im}[\dots]$ і пов'язане зі словом *imaginary* (уявний).

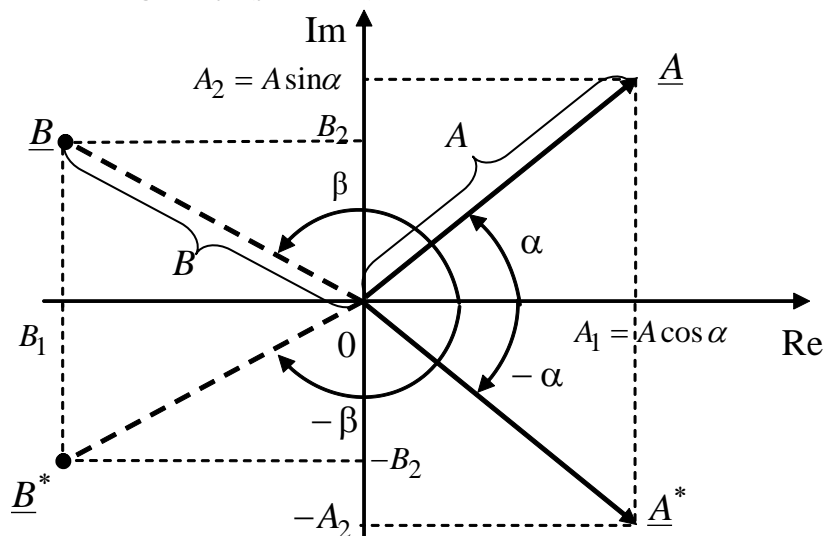


Рисунок 4.11 – Подання комплексних чисел на комплексній площині

Очевидно, що $A^2 = A_1^2 + A_2^2; \quad \alpha = \arctg \frac{A_2}{A_1}.$ (4.19)

Показникова форма запису комплексних чисел:

$$\underline{A} = A e^{j\alpha}. \quad (4.20)$$

Тригонометрична форма (відповідно до формули Ейлера):

$$\underline{A} = A \cos \alpha + jA \sin \alpha. \quad (4.21)$$

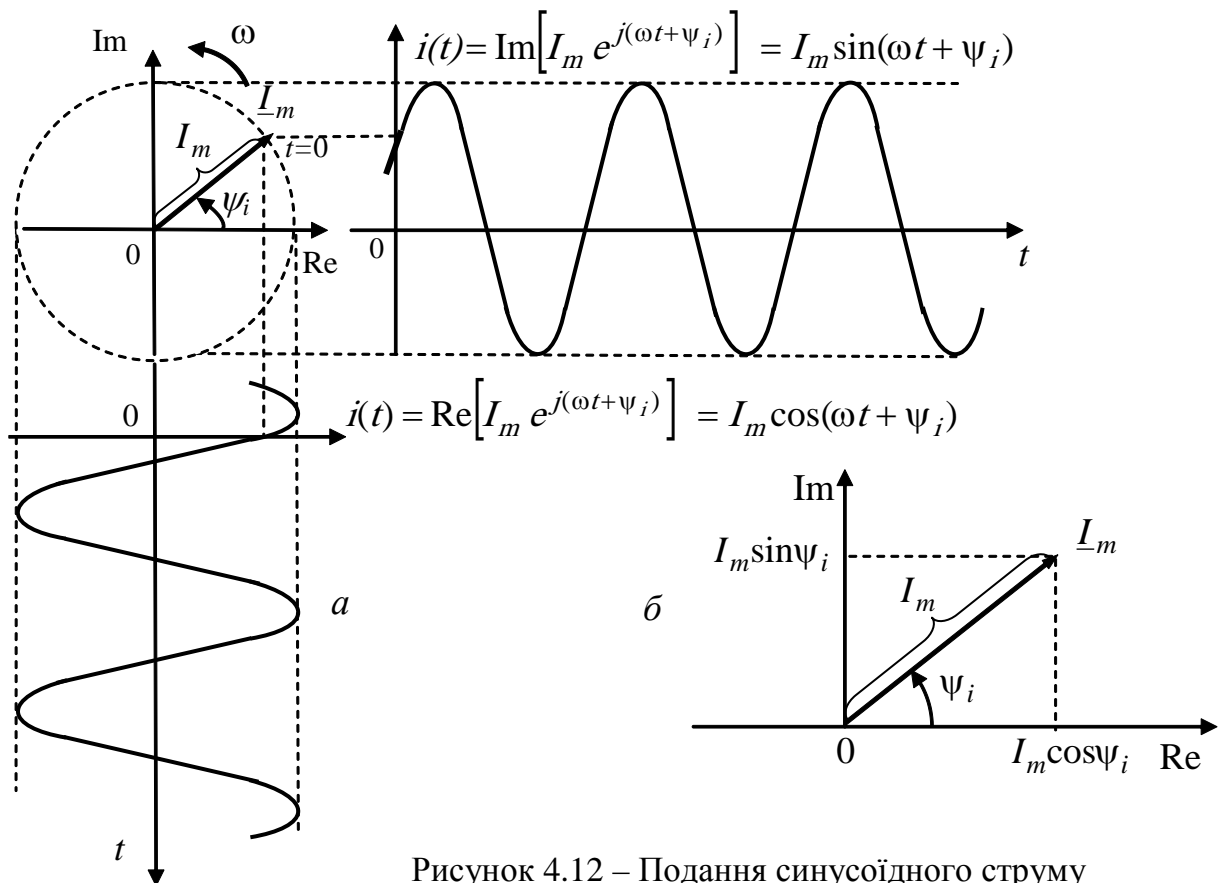


Рисунок 4.12 – Подання синусоїдного струму в комплексній формі

Додавання і віднімання комплексних чисел виконують лише в алгебраїчній формі:

$$\underline{A} + \underline{B} = (A_1 + jA_2) + (B_1 + jB_2) = (A_1 + B_1) + j(A_2 + B_2);$$

$$\underline{A} - \underline{B} = (A_1 + jA_2) - (B_1 + jB_2) = (A_1 - B_1) + j(A_2 - B_2).$$

Множення і ділення комплексних чисел можна виконувати в алгебраїчній формі:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = (A_1 + jA_2) \cdot (B_1 + jB_2) = A_1B_1 + jA_2B_1 + jA_1B_2 - A_2B_2 = (A_1B_1 - A_2B_2) + j(A_1B_2 + A_2B_1);$$

$$\frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{A_1 + jA_2}{B_1 + jB_2} = \frac{(A_1 + jA_2)(B_1 - jB_2)}{(B_1 + jB_2)(B_1 - jB_2)} = \frac{A_1B_1 + A_2B_2}{B_1^2 + B_2^2} + j \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{B_1^2 + B_2^2}.$$

Але найзручніше множення і ділення комплексних чисел виконувати у показниковій формі, перемножуючи модулі та додаючи аргументи:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = Ae^{j\alpha} \cdot Be^{j\beta} = ABe^{j(\alpha+\beta)}. \quad (4.22)$$

Вектор, який обертається у позитивному напрямку (проти годинникової стрілки) з кутовою швидкістю ω , записують у такий спосіб:

$$Ae^{j(\omega t + \alpha)} = \underline{A}_m e^{j\omega t}, \quad (4.23)$$

де $\underline{A}_m = A_m e^{j\alpha}$ – комплексна амплітуда, $e^{j\omega t}$ – оператор обертання (повороту).

Запис комплексної функції (4.23) у тригонометричній формі

$$Ae^{j(\omega t + \alpha)} = A\cos(\omega t + \alpha) + jA\sin(\omega t + \alpha)$$

призводить до висновку, що косинусоїдна функція $A\cos(\omega t + \alpha)$ є дійсною частиною комплексної функції (4.23), тобто проекцією на дійсну вісь. Аналогічно, синусоїдна функція $A\sin(\omega t + \alpha)$ є уявною частиною комплексної функції (4.23), тобто проекцією на уявну вісь:

$$A\cos(\omega t + \alpha) = \operatorname{Re}[\underline{A}_m e^{j\omega t}]; \quad (4.24)$$

$$A\sin(\omega t + \alpha) = \operatorname{Im}[\underline{A}_m e^{j\omega t}]. \quad (4.25)$$

4.4.2 Параметри кіл у комплексній формі

Якщо струм і напруга змінюються за законом синусу або косинусу $i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$, $u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u)$, їхні комплексні амплітуди записують у вигляді:

$$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}; \quad \underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u}. \quad (4.26)$$

Комплексний опір кола \underline{Z} визначається відношенням комплексних амплітуд напруги і струму (**закон Ома в комплексній формі**):

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = Z^{j\varphi}, \quad (4.27)$$

де $Z = \frac{U_m}{I_m}$ – модуль комплексного опору кола; $\varphi = \psi_u - \psi_i$ – аргумент

комплексного опору кола.

Алгебраїчна форма запису комплексного опору кола:

$$\underline{Z} = R + jX, \quad (4.28)$$

де R – активний опір кола, X – реактивний опір кола.

Знак реактивного опору вказує на характер кола (плюс – індуктивний, мінус – ємнісний).

Комплексні опори елементів (опору, індуктивності, ємності):

$$\underline{Z}_R = R; \quad \underline{Z}_L = j\omega L; \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}.$$

4.4.3 Визначення еквівалентного комплексного опору кола

Послідовне з'єднання n елементів:

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_n = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) + j(X_1 + X_2 + \dots + X_n).$$

Паралельне з'єднання n елементів:

$$\frac{1}{\underline{Z}_e} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\underline{Z}_n}.$$

Зокрема, еквівалентний опір двох паралельно з'єднаних елементів $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2$:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{e12} &= \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2)}{R_1 + jX_1 + R_2 + jX_2} = \frac{(R_1 R_2 - X_1 X_2) + j(R_1 X_2 + R_2 X_1)}{(R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)} = \\ &= \frac{(R_1 R_2 - X_1 X_2)(R_1 + R_2) + (R_1 X_2 + R_2 X_1)(X_1 + X_2)}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} + \\ &+ j \frac{-(R_1 R_2 - X_1 X_2)(X_1 + X_2) + (R_1 X_2 + R_2 X_1)(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}. \end{aligned}$$

У показниковій формі визначення \underline{Z}_{12} спрощується:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{e12} &= \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{Z_1 e^{j\psi_1} Z_2 e^{j\psi_2}}{R_1 + jX_1 + R_2 + jX_2} = \frac{Z_1 Z_2 e^{j(\psi_1 + \psi_2)}}{R_1 + jX_1 + R_2 + jX_2} = \\ &= \frac{Z_1 Z_2 e^{j(\psi_1 + \psi_2)}}{Z_{12} e^{j\psi_{12}}} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_{12}} e^{j(\psi_1 + \psi_2 - \psi_{12})}, \end{aligned}$$

$$\text{де } Z_{12} = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}; \quad \varphi_{12} = \arctg \frac{X_1 + X_2}{R_1 + R_2}.$$

4.4.4 Визначення комплексних струмів у колі

Комплексну амплітуду загального струму у нерозгалуженій частині кола визначають за законом Ома:

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}}.$$

Щоб визначити комплексну амплітуду струму у розгалуженому колі, застосовують формулу розподілу (розкиду) струмів, згідно з якою струм у кожній із двох паралельних віток (рис.4.13):

$$\underline{I}_{m1} = \underline{I}_m \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}; \quad \underline{I}_{m2} = \underline{I}_m \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}. \quad (4.29)$$

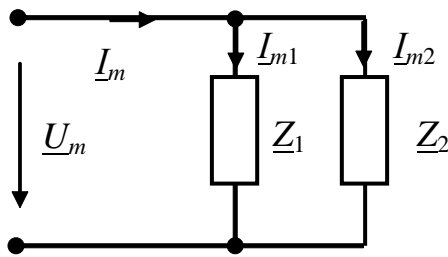


Рисунок 4.13 – Схема розгалуженого кола

4.4.5 Перехід від комплексної амплітуди до миттєвого значення

Після завершення розрахунку комплексних амплітуд струмів у заданих вітках слід перейти до миттєвих значень. Для цього необхідно знайти дійсну частину добутку комплексної амплітуди струму \underline{I}_m на оператор повороту $e^{j\omega t}$:

$$i(t) = \operatorname{Re} \left[\underline{I}_m e^{j\omega t} \right] = \operatorname{Re} \left[I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t} \right] = I_m \cos(\omega t + \psi_i). \quad (4.30)$$

Приклад 4.1. Знайти вираз для струму послідовного кола R, L, C (рис.4.7), якщо до затискачів кола прикладена напруга $u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u)$.

Розв'язання. Згідно з другим законом Кірхгофа

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt.$$

Запишемо миттєві значення напруг і струму через комплексні амплітуди $\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$, $\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$ згідно із формулою (4.30) та підставимо до останнього рівняння:

$$\operatorname{Re} \left[\underline{U}_m e^{j\omega t} \right] = R \operatorname{Re} \left[\underline{I}_m e^{j\omega t} \right] + L \frac{d}{dt} \operatorname{Re} \left[\underline{I}_m e^{j\omega t} \right] + \frac{1}{C} \int \operatorname{Re} \left[\underline{I}_m e^{j\omega t} \right] dt.$$

Оскільки оператор Re має властивість комутативності, можна поміняти місцями операції взяття реальної частини та диференціювання (інтегрування):

$$\operatorname{Re} \left[\underline{U}_m e^{j\omega t} \right] = \operatorname{Re} \left[R \underline{I}_m e^{j\omega t} + L \frac{d}{dt} \underline{I}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{C} \int \underline{I}_m e^{j\omega t} dt \right].$$

Комплексні вирази під знаком Re мають дорівнювати один одному:

$$\underline{U}_m e^{j\omega t} = R \underline{I}_m e^{j\omega t} + j\omega L \underline{I}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} \underline{I}_m e^{j\omega t}.$$

Після скорочення усіх частин рівняння на $e^{j\omega t}$ виходить алгебраїчне комплексне рівняння:

$$\underline{U}_m = R\underline{I}_m + j\omega L\underline{I}_m + \frac{1}{j\omega C}\underline{I}_m = \underline{U}_{mR} + \underline{U}_{mL} + \underline{U}_{mC},$$

яке відповідає другому закону Кірхгофа в комплексній формі.

Якщо винести за дужки спільний множник \underline{I}_m , вийде вираз закону Ома в комплексній формі:

$$\underline{U}_m = R\underline{I}_m + j\omega L\underline{I}_m + \frac{1}{j\omega C}\underline{I}_m = \underline{I}_m \underline{Z},$$

де $\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + jX$ – комплексний опір кола.

Комплексний опір у тригонометричній та показниковій формах:

$$\underline{Z} = Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi,$$

де $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$, $\varphi = \arctg \frac{X}{R}$ – модуль і аргумент комплексного опору.

Згідно із законом Ома комплексна амплітуда струму:

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}} = \frac{U_m}{Z} e^{j(\psi_u - \varphi)} = I_m e^{j\psi_i}.$$

Отже, миттєве значення струму:

$$i(t) = \operatorname{Re} \left[\underline{I}_m e^{j\omega t} \right] = \frac{U_m}{Z} \cos(\omega t + \psi_u - \varphi).$$

4.5 Потужність у колі синусоїдного струму

Нехай на ділянці електричного кола напруга і струм є косинусоїдними функціями часу: $u(t) = U_m \cos \omega t$, $i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$.

Миттєва потужність, яка надходить до кола, становить:

$$\begin{aligned} p(t) = ui &= U_m I_m \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)] = UI [\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Ця потужність складається з двох доданків: постійної величини $UI \cos \varphi$ та косинусоїдної величини, що має подвоєну частоту. Середнє значення другого доданку за час T дорівнює нулю. Тому активна потужність, яка надходить до кола, буде такою:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = UI \cos \varphi. \quad (4.32)$$

Множник $\cos\varphi$ називають **коефіцієнтом потужності**. Чим ближче кут φ до нуля, тим ближче значення $\cos\varphi$ до одиниці. Отже, потрібне менше значення струму I , за якого середня потужність P при заданих струмі I та напрузі U , буде передана від джерела до приймача.

Збільшення коефіцієнта потужності промислового устаткування є важливою техніко-економічною задачею.

Величину, яка дорівнює добутку діючих значень напруги і струму на за- тискачах кола,

$$S = UI \quad (4.33)$$

називають **повною потужністю** і вимірюють у вольт-амперах (ВА).

Виходячи з формул (4.32), (4.33), коефіцієнт потужності дорівнює відно- шенню активної потужності P до повної S :

$$\cos\varphi = P / S .$$

У розрахунках електричних кіл використовують поняття **реактивної по- тужності**:

$$Q = UI \sin\varphi = S \sin\varphi . \quad (4.34)$$

Одиницею вимірювання реактивної потужності є ВАр (вольт-ампер реактивний). Очевидно, що $S^2 = P^2 + Q^2$, $\sin\varphi = Q / S$.

Активна потужність витрачається в активній частині кола, а реактивна – змінюється.

Оскільки активний опір кола $R = Z \cos\varphi$, а повний опір $Z = U/I$; тоді:

$$P = UI \cos\varphi = I^2 Z \cos\varphi = I^2 R = U^2 / R . \quad (4.35)$$

Оскільки реактивний опір кола $X = Z \sin\varphi$,

$$Q = UI \sin\varphi = I^2 Z \sin\varphi = I^2 X = U^2 / X . \quad (4.36)$$

Величина $\tilde{S} = \underline{I}'' \underline{U}$, що дорівнює добутку комплексного діючого значення напруги на комплексно-спряжене діюче значення струму $\underline{I}'' = I e^{-j\psi_i}$, називаєть- ся **комплексною потужністю**:

$$\tilde{S} = U e^{j\psi_u} I e^{-j\psi_i} = U I e^{j(\psi_u - \psi_i)} = U I e^{j\varphi} = UI \cos\varphi + jUI \sin\varphi = P + jQ = S e^{j\varphi} ,$$

де P – активна потужність (дійсна частина), Q – реактивна потужність (уявна частина) комплексної потужності. Модуль комплексної потужності $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ дорівнює повній потужності, а аргумент – зсуву фаз між напру- гою та струмом. Знак реактивної потужності вказує на характер кола: плюс – індуктивний, мінус – ємнісний.

4.6 Умова передачі максимуму активної потужності від джерела до приймача

Нехай необхідно знайти таке значення комплексного опору навантаги $\underline{Z}_H = R_H + jX_H$, щоб при заданому значенні опору джерела $\underline{Z}_i = R_i + jX_i$ забезпечити передачу максимальної активної потужності від джерела \underline{E} до навантаги (рис.4.14).

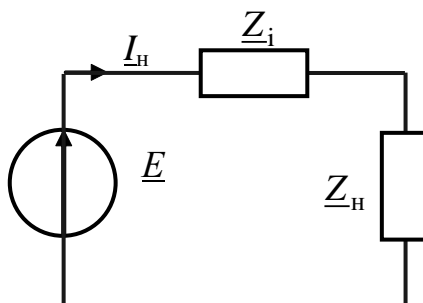


Рисунок 4.14 – Передача енергії від джерела до приймача

Активна потужність в опорі навантаги становить:

$$P_H = I_H^2 R_H,$$

$$\text{де } I_H = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_H} = \frac{E}{R_i + R_H + j(X_i + X_H)}.$$

$$\text{Тоді } P_H = \frac{E^2 R_H}{(R_i + R_H)^2 + (X_i + X_H)^2}.$$

Аналіз останньої формули показує, що максимум функції P_H досягається за умови $X_H = -X_i$, $R_H = R_i$.

Отже, умовою передачі максимальної активної потужності до навантаги у колі синусоїдного струму є рівність опору навантаги і комплексно-спряженого опору джерела:

$$\underline{Z}_H = \underline{Z}_i^*, \quad \text{або } \underline{Z}_H = R_i - jX_i.$$

4.7 Контрольні запитання

1. Який струм називають змінним?
2. Який процес є періодичним?
3. Визначити поняття «кутова частота».
4. Які процеси називають гармонічними?

5. Як пов'язані циклічна та кутова частота?
6. Пояснити зміст параметрів синусоїдного струму – повної та початкової фази.
7. Пояснити поняття – діюче значення періодичного струму.
8. Як пов'язані діюче та амплітудне значення синусоїдного струму?
9. У чому полягає принцип векторного подання синусоїдних коливань?
10. Як виконати додавання синусоїдних струмів за допомогою векторної діаграми?
11. Як виконати віднімання синусоїдних струмів за допомогою векторної діаграми?
12. Як пов'язані синусоїдний струм і напруга в опорі?
13. Як визначити миттєву потужність синусоїдного струму в опорі?
14. Як визначити середню потужність, яка витрачається в опорі?
15. Як пов'язані синусоїдний струм і напруга в індуктивності?
16. Як визначити миттєву потужність синусоїдного струму в індуктивності?
17. Як визначити середню потужність синусоїдного струму в ємності?
18. Як пов'язані синусоїдний струм і напруга в індуктивності?
19. Як визначити миттєву потужність синусоїдного струму в ємності?
20. Як визначити середню потужність синусоїдного струму в ємності?
21. Пояснити поняття «реактивний опір кола».
22. Яка умова резонансу в послідовному резонансному контурі?
23. Пояснити поняття «імпеданс».
24. Пояснити поняття «реактивна провідність кола».
25. Яка умова резонансу в паралельному резонансному контурі?
26. Як записати комплексне число в алгебраїчній, показниковій та тригонометричній формах?
27. Як додати два комплексних числа в алгебраїчній формі?
28. Як визначити добуток двох комплексних чисел в алгебраїчній та показниковій формах?
29. Як поділити одне на одне два числа в алгебраїчній та показниковій формах?
30. Записати закон Ома в комплексній формі.
31. Як визначити комплексний опір кола? Чим визначається характер кола (індуктивний чи ємнісний)?
32. Як знайти комплексний опір резистора?
33. Як знайти комплексний опір індуктивності?
34. Як знайти комплексний опір ємності?

35. Записати еквівалентний комплексний опір послідовно з'єднаних елементів R, L, C .
36. Записати еквівалентний комплексний опір паралельно з'єднаних елементів R, L, C .
37. Записати формулу розкиду струмів у двох паралельних вітках.
38. Як перейти від комплексної амплітуди до миттєвого значення струму?
39. Як визначити миттєву потужність, яка надходить до ділянки кола?
40. Як визначити середню потужність, яка надходить до ділянки кола?
41. Пояснити сутність коефіцієнта потужності.
42. Яка величина називається повною потужністю? В яких одиницях вимірюють повну потужність?
43. Яка величина називається активною потужністю? В яких одиницях вимірюють активну потужність?
44. Яка величина називається реактивною потужністю? В яких одиницях вимірюють реактивну потужність?
45. Як визначити комплексну потужність кола?
46. Записати умови передачі максимуму активної потужності від джерела до навантаги у колі синусоїдного струму.

4.8 Контрольне завдання

Методом комплексних амплітуд знайти струм у вітці електричного кола (рис.4.15), а також повну, активну і реактивну потужність всього кола. Параметри елементів кола та напруги джерела $u(t) = U\sqrt{2} \cos(1000t + \psi_u)$ В задані у табл.4.1 (прочерк у таблиці означає перемичку на схемі).

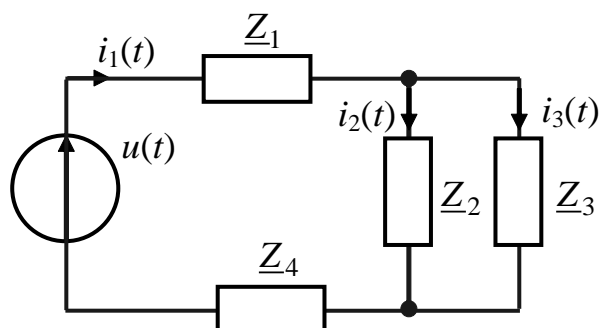


Рисунок 4.15 – Узагальнена схема кола

Таблиця 4.1 – Варіанти контрольних завдань

Номер вар.	R_1 , Ом	L_1 , мГн	C_1 , мкФ	R_2 , Ом	L_2 , мГн	C_2 , мкФ	R_3 , Ом	L_3 , мГн	C_3 , мкФ	R_4 , Ом	L_4 , мГн	C_4 , мкФ	Віт-ка	U , В	ψ_u , град
1-а	5	–	–	30	–	–	26	–	67	–	–	29	3	80	–15
2-а	–	36	–	30	30	–	–	–	33	–	–	50	2	99	25
3-а	–	5	–	–	25	–	25	–	40	–	–	17	3	93	10
4-а	10	–	–	19	–	–	50	–	40	–	–	67	3	10 0	20
5-а	3	–	–	15	–	–	–	–	50	–	–	67	2	90	10
6-а	10	–	–	20	–	–	25	–	40	–	20	–	3	80	40
7-а	10	–	–	30	15	–	20	–	–	–	15	–	2	60	30
8-а	5	–	–	6	5	–	12,5	–	40	–	5	–	2	40	–20
9-а	10	–	–	10	7,5	–	15	–	50	–	–	67	3	80	–30
10-а	5	–	–	5	–	7,5	15	50	–	–	–	67	1	19 0	–5
11-а	2	–	–	3	–	8	12,5	40	–	–	5	–	2	19 0	–5
12-а	5	–	–	15	–	15	20	–	–	–	15	–	3	18 0	85
13-а	5	–	–	10	–	–	25	40	–	–	20	–	1	18 0	75
14-а	3	–	–	6	–	–	–	50	–	–	–	67	2	18 0	65
15-а	5	–	–	8	–	–	50	40	–	–	–	67	3	17 0	55
16-а	–	2	–	–	–	25	25	40	–	–	–	16	1	17 0	45
17-а	–	18	–	16	–	30	–	33	–	–	–	50	2	17 0	35
18-а	2	–	–	18	–	–	26	67	–	–	–	29	3	17 0	25
19-а	2	–	–	18	–	40	–	40	–	–	–	38	1	16 0	15
20-а	3	–	–	–	–	10	15	40	–	–	6,2	–	2	16 0	5
21-а	10	–	–	28	–	30	–	20	–	–	14	–	3	16 0	–90
22-а	2	5	–	–	–	30	52	–	–	–	6,4	–	1	15 0	–80
23-а	5	5	–	32	–	–	–	20	–	–	4,6	–	2	15 0	–70
24-а	10	5	–	–	–	30	–	20	–	–	15	–	3	15 0	–60
25-а	2	–	80	–	–	30	52	–	–	–	–	50	1	14 0	–50
26-а	2	–	70	28	–	–	–	20	–	–	–	50	2	14 0	–40
27-а	10	–	40	–	–	30	–	20	–	–	–	100	3	14 0	–30
28-а	5	15	–	10	–	–	–	55	–	10	–	–	1	13 0	10
29-а	5	15	–	–	–	20	–	25	–	40	–	–	1	13 0	90
30-а	15	10	–	–	–	5	10	–	–	–	–	63	1	12 0	80

Продовження табл.4.1

№ вар.	R_1 , Ом	L_1 , мГн	C_1 , мкФ	R_2 , Ом	L_2 , мГн	C_2 , мкФ	R_3 , Ом	L_3 , мГн	C_3 , мкФ	R_4 , Ом	L_4 , мГн	C_4 , мкФ	Віт-ка	U , В	Ψ_u , град
1	15	15	–	12	–	–	–	55	–	–	–	20	1	120	70
2	15	10	–	–	–	20	–	25	–	–	–	50	2	120	60
3	15	–	32	–	–	30	52	–	–	25	–	–	2	110	50
4	15	–	35	32	–	–	–	20	–	10	–	–	3	110	40
5	15	–	20	–	–	30	–	20	–	30	–	–	3	110	30
6	15	–	50	–	–	30	52	–	–	–	40	–	3	100	20
7	15	–	50	32	–	–	–	20	–	–	34	–	3	100	10
8	15	–	55	–	–	30	–	20	–	–	9,6	–	1	100	0
9	50	–	–	20	10	–	30	–	25	–	–	30	2	130	–150
10	40	–	–	15	15	–	25	–	20	–	10	–	3	125	–160
11	30	–	–	60	30	–	40	–	–	–	30	–	1	123	–170
12	20	–	–	40	–	–	50	–	20	–	40	–	2	120	170
13	10	–	–	30	–	–	–	–	20	–	–	30	3	117	160
14	20	–	–	25	–	–	100	–	15	–	–	30	1	115	150
15	–	10	–	–	50	–	50	–	33	–	–	30	2	113	140
16	–	70	–	60	60	–	–	–	20	–	–	100	3	105	130
17	15	–	–	60	–	–	50	–	20	–	–	60	3	103	120
18	15	–	–	60	80	–	–	–	10	–	–	60	1	98	110
19	15	–	–	–	100	–	30	–	–	–	10	–	2	95	105
20	30	–	–	80	–	20	–	40	–	–	30	–	3	90	100
21	10	20	–	–	70	–	100	–	–	–	15	–	1	90	95
22	20	20	–	70	–	–	–	–	10	–	10	–	2	85	90
23	20	20	–	–	60	–	–	–	10	–	30	–	3	70	85
24	10	–	20	–	50	–	100	–	–	–	–	50	1	66	80
25	10	–	20	80	–	–	–	–	10	–	–	25	2	400	75
26	40	–	10	–	10	–	–	–	10	–	–	50	3	390	70
27	10	10	–	–	–	20	20	20	–	20	–	–	1	380	65
28	15	60	–	50	–	–	–	–	25	20	–	–	2	370	60
29	20	60	–	–	40	–	–	–	15	80	–	–	3	360	55
30	40	40	–	–	–	10	20	10	–	–	–	120	1	350	50

4.9 Приклад виконання контрольного завдання

Згідно з даними (табл.4.2) сформуємо з узагальненої схеми (рис.4.15) схему для заданого варіанта (рис.4.16).

Напруга джерела $u(t) = U\sqrt{2} \cos(2\pi \cdot 50t + \psi_u)$ В.

Таблиця 4.2 – Параметри схеми для прикладу виконання завдання

№ вар.	R_1 , Ом	L_1 , мГн	C_1 , мкФ	R_2 , Ом	L_2 , мГн	C_2 , мкФ	R_3 , Ом	L_3 , мГн	C_3 , мкФ	R_4 , Ом	L_4 , мГн	C_4 , мкФ	Вітка	U , В	Ψ_u , град
N	2	–	227,4	2	–	796	–	12,75	–	–	–	–	2	56,57	0

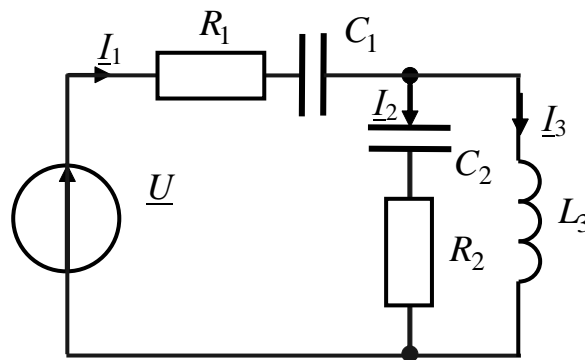


Рисунок 4.16 – Схема кола для заданого варіанта

Комплексна амплітуда напруги джерела:

$$\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u} = 56,57\sqrt{2}e^{j0} = 80 \text{ В.}$$

Комплексне діюче значення напруги джерела:

$$\underline{U} = \frac{U_m e^{j\psi_u}}{\sqrt{2}} = \frac{80}{\sqrt{2}} = 56,57 \text{ В.}$$

Комплексні опори віток схеми:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = R_1 - j\frac{1}{\omega C_1} = 2 - \frac{10^6}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 227,4} = 2 - j14 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 - j\frac{1}{\omega C_2} = 2 - \frac{10^6}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 796} = 2 - j4 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = j\omega L_3 = j2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 12,75 \cdot 10^{-3} = j4 \text{ Ом.}$$

Еквівалентний опір кола:

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 2 - j14 + \frac{(2 - j4)j4}{2 - j4 + j4} = 2 - j14 + 8 + j4 =$$

$$= 10 - j10 = \sqrt{10^2 + 10^2} e^{j \arctg \frac{-10}{10}} = 10\sqrt{2} e^{-j45^\circ} \text{ Ом.}$$

За законом Ома знайдемо струм першої вітки:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_e} = \frac{56,57}{10\sqrt{2} e^{-j45^\circ}} = 4e^{j45^\circ} \text{ А.}$$

Струми у другій та третій вітках знайдемо за формулою розкиду струмів:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 4e^{j45^\circ} \frac{j4}{2 - j4 + j4} = 4e^{j45^\circ} \frac{4e^{j90^\circ}}{2} = 8e^{j135^\circ} \text{ А.}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 4e^{j45^\circ} \frac{2 - j4}{2 - j4 + j4} = 4e^{j45^\circ} \sqrt{1 + 4} e^{j \arctg \frac{-2}{1}} = 8,94e^{-j18,5^\circ} \text{ А.}$$

Перевіримо правильність розрахунку за першим законом Кірхгофа:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3;$$

$$\underline{I}_1 = 4e^{j45^\circ} = 4\cos 45^\circ + j\sin 45^\circ = 2,83 + j2,83 \text{ А};$$

$$\underline{I}_2 = 8e^{j135^\circ} = 8\cos 135^\circ + j8\sin 135^\circ = -5,66 + j5,66 \text{ А};$$

$$\underline{I}_3 = 8,94e^{-j18,5^\circ} = 8,94\cos 18,5^\circ - j8,94\sin 18,5^\circ = 8,49 - j2,83 \text{ А};$$

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 2,83 + j2,83 + 5,66 - j5,66 - 8,49 + j2,83 = 0.$$

Визначимо повну, активну і реактивну потужності кола:

$$\tilde{S} = \underline{U} \underline{I}_1'' = 56,67 \cdot 4e^{-j45^\circ} = 226,28e^{-j45^\circ} = 160 - j160 \text{ ВА};$$

$$\tilde{S} = |\tilde{S}| = 226,28 \text{ ВА}; \quad P = \text{Re}[\tilde{S}] = 160 \text{ Вт}; \quad Q = |\text{Im}[\tilde{S}]| = 160 \text{ ВАр.}$$

5 ДИНАМІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Розрахунки, розглянуті у попередніх розділах, базувалися на **статичних характеристиках** електричних кіл та їхніх параметрах (залежність струму від напруги, повний опір, провідність тощо). Статичні характеристики визначають в **усталеному** (стаціонарному) режимі, за якого струми і напруги у колі не залежать від часу (кола постійного струму) або є періодичними функціями часу (кола синусоїдного струму). Окрім статичних, розглядають **динамічні** характеристики (ДХ), які описують електричні кола у **перехідному режимі**. Цей режим існує від початку дії до усталеного режиму і обумовлений наявністю у колі реактивних елементів (індуктивностей, ємностей). Окрім опису перехідних процесів, які виникають у колі під час комутації, ДХ використовують для аналізу спотворень імпульсних сигналів, які проходять крізь частотно-залежні кола, а також під час синтезу електричних фільтрів, коригувальних пристроїв тощо.

5.1 Динамічні характеристики та їхній взаємозв'язок

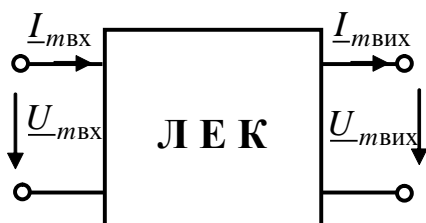


Рисунок 5.1 – Позначення кола як чотириполюсника

Розглядаючи ДХ, лінійне електричне коло умовно подають у вигляді дво- або чотириполюсника. Чотириполюсник – це схема з двома парами затискачів (рис.5.1). Пара затискачів, до яких підведено дію $x(t)$, називають вхідними, а затискачі, на яких визначається відгук $y(t)$, – вихідними.

Чотириполюсником може бути подана довга лінія, трансформатор, підсилювач, коригувальний пристрій та будь-який пристрій з однією парою вхідних і однією парою вихідних затискачів.

Щоб знайти ДХ чотириполюсника, на його вхідні затискачі подають типову (тестову) дію, а на вихідних затискачах досліджують відгук на цю дію, який відповідає ДХ чотириполюсника.

ДХ чотириполюсника поділяють на повні та частинні.

Повні ДХ встановлюють взаємозв'язок між зміною вхідної дії та відгуком на цю дію. **Частинні** ДХ є параметрами або функціоналами повних ДХ (час встановлення, стала часу, частота власних коливань, декремент загасання тощо). Використовуючи частинні ДХ, можна приблизно порівняти динамічні властивості електричних кіл між собою або із параметрами вхідної дії.

Для лінійних чотириполюсників використовують такі повні ДХ:

- імпульсна характеристика $h(t)$;
- перехідна характеристика $g(t)$;
- комплексна передатна функція (амплітудно-фазова характеристика) $H(j\omega)$;
- амплітудно-частотна $|H(j\omega)| = H(\omega)$ і фазочастотна $\varphi(\omega)$ характеристики;
- операторна передатна функція $H(p)$;
- диференціальне рівняння.

Усі повні ДХ пов'язані одна з одною.

Імпульсна характеристика електричного кола $h(t)$ чисельно дорівнює відгуку на дію типу **дельта-функції** $\delta(t)$ за нульових початкових умов. Дельта-функцію називають також **функцією Дірака** або **одиничним імпульсом**, оскільки його площа дорівнює одиниці.

Спрощено $\delta(t)$ можна записати так:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0; \\ \infty & \text{при } t = 0; \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-0}^{+0} \delta(t) dt = 1. \quad (5.1)$$

Розмірність $h(t)$ визначають як відношення розмірностей відгуку і дії, поділеному на секунду.

Перехідна характеристика $g(t)$ чисельно дорівнює відгуку пасивного (без внутрішніх джерел) ЛЕК на дію типу одиничної функції за нульових початкових умов $u_C(-0) = 0$; $i_L(-0) = 0$ для всіх ємностей та індуктивностей.

Одиничну функцію називають також функцією Хевісайда, або функцією увімкнення, позначають $1(t)$ і записують так:

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Розмірність $g(t)$ визначають як відношення розмірностей відгуку і дії.

Дельта-функція та одинична функція пов'язані співвідношеннями:

$$\delta(t) = \frac{d[1(t)]}{dt} = 1'(t); \quad 1(t) = \int_{-\infty}^t \delta(x) dx,$$

де x – змінна інтегрування, що має розмірність часу.

На підставі принципу накладання з цих виразів виходить зв'язок між перехідною та імпульсною характеристикою для **нульових початкових умов**:

$$h(t) = \frac{d[g(t)]}{dt} = g'(t); \quad (5.3)$$

$$g(t) = \int_0^t h(x) dx. \quad (5.4)$$

Операторною передатною функцією (ОПФ) називається пряме перетворення Лапласа від імпульсної характеристики:

$$H(p) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-pt} dt, \quad (5.5)$$

де $p = \sigma + j\omega$ – комплексна змінна (комплексна частота).

Справедливо також обернене перетворення:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} H(p)e^{pt} dp. \quad (5.6)$$

Комплексною передатною функцією (КПФ) називається пряме перетворення Фур'є від імпульсної характеристики:

$$H(j\omega) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (5.7)$$

де ω – кутова частота, j – уявна одиниця.

Справедливо також обернене перетворення:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.8)$$

Порівняння виразів (5.5) і (5.7) дозволяє встановити зв'язок функцій $H(p)$ і $H(j\omega)$. Вираз ОПФ виходить з виразу КПФ, якщо виконати формальну заміну змінних $p = j\omega$, і навпаки.

КПФ $H(j\omega)$ може бути виражена як в алгебраїчній

$$H(j\omega) = \text{Re}[H(j\omega)] + j \text{Im}[H(j\omega)], \quad (5.9)$$

так і у показниковій формі:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}, \quad (5.10)$$

де $|H(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2[H(j\omega)] + \text{Im}^2[H(j\omega)]}$ – модуль КПФ;

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im}[H(j\omega)]}{\text{Re}[H(j\omega)]} \text{ – аргумент КПФ.}$$

Амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) – залежність від частоти модуля комплексної передатної функції кола.

Фазочастотна характеристика (ФЧХ) – залежність від частоти аргумента комплексної передатної функції кола.

Диференціальне рівняння визначає залежність між похідними дії $x(t)$ і відгуку $y(t)$ чотириполюсника:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i}. \quad (5.11)$$

Замінюючи у виразі (5.11) оператор диференціювання комплексною

змінною p або $j\omega$, можна отримати вираз для ОПФ кола:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}, \quad (5.12)$$

або КПФ кола

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i (j\omega)^i}{\sum_{i=0}^n a_i (j\omega)^i}. \quad (5.13)$$

5.2 Складання диференціального рівняння кола

Диференціальні рівняння здобувають, виходячи із співвідношень, що пов'язують струм і напругу в пасивних елементах електричного кола:

$$u_R = iR; \quad u_L = L \frac{di}{dt}; \quad u_C = \frac{1}{C} \int idt. \quad (5.14)$$

Застосовуючи закони Кірхгофа або інші методи аналізу ЛЕК (методи контурних струмів, вузлових напруг, накладання тощо), складають систему інтегро-диференціальних рівнянь для миттєвих значень струмів і напруг. У цій системі обирають головну змінну i , виключаючи інші змінні, складають єдине **інтегро-диференціальне рівняння**. Це рівняння після диференціювання перетворюють у неоднорідне диференціальне рівняння. Порядок рівняння визначається кількістю реактивних елементів (ємностей, індуктивностей), які накопичують енергію електричного і магнітного полів.

Порядок розв'язання диференціального рівняння:

- 1) знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння (за умови рівності нулю правої частини вихідного неоднорідного рівняння);
- 2) знайти частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння, що відповідає усталеному режиму кола;
- 3) на підставі законів комутації визначити постійні коефіцієнти для суми знайдених розв'язків за нульових початкових умов ($t = 0$).

Приклад 5.1. Для кола з послідовним з'єднанням опору, індуктивності та ємності (рис.5.2) скласти диференціальне рівняння кола та знайти із нього інші динамічні характеристики.

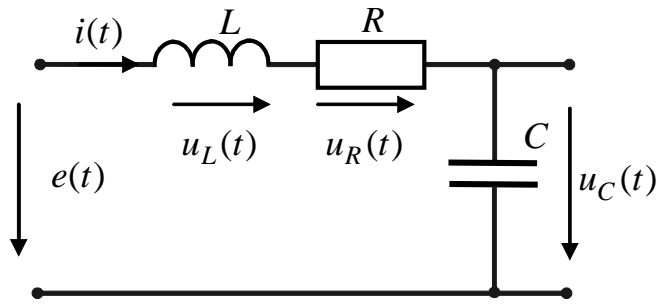


Рисунок 5.2 – Схема послідовного з'єднання елементів R, L, C

За другим законом Кірхгофа для миттєвих значень:

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = e(t).$$

На підставі співвідношень (5.14) та враховуючи, що при послідовному з'єднанні струм $i(t)$ є однаковим для усіх елементів, можна записати таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_C(t) = e(t); \\ C \frac{u_C(t)}{dt} = i(t). \end{cases}$$

Диференціюючи друге рівняння системи

$$C \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} = \frac{di(t)}{dt}$$

і підставляючи його до першого рівняння, отримуємо диференціальне рівняння другого порядку відносно $u_C(t)$:

$$LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = e(t). \quad (5.15)$$

Відомо, що розв'язок рівняння (5.15) слід шукати як суму двох функцій – загального розв'язку однорідного рівняння

$$LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0 \quad (5.16)$$

і частинного розв'язку неоднорідного рівняння:

$$u_C(t) = u_{C_{\text{вл}}}(t) + u_{C_{\text{вм}}}(t),$$

де $u_{C_{\text{вл}}}(t)$ – загальний розв'язок рівняння (5.16), який характеризує електричні явища за відсутності зовнішньої дії – вільна складова; $u_{C_{\text{вм}}}(t)$ – частинний розв'язок (5.15) з правою частиною – вимушена складова.

Вільна складова має вигляд:

$$u_{C_{\text{вл}}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (5.17)$$

Значення p_1, p_2 визначають як корені **характеристичного** рівняння

$$LCp^2 + R Cp + 1 = 0,$$

яке отримують формальною заміною оператора диференціювання комплексним оператором $\frac{d^n}{dt} = p^n$ у виразі (5.16):

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

Залежно від знака дискримінанта квадратного рівняння, корені є дійсними або комплексними, що характеризує відповідно **апериодичний** або **коливальний режим** встановлення перехідних процесів у колі.

Вимушену складову, яка характеризує режим, обумовлений зовнішнім джерелом визначають із аналізу усталеного режиму після комутації (зокрема, увімкнення джерела на вхід кола) для моменту часу $t \rightarrow \infty$. Для вхідної дії у вигляді одиничної функції в усталеному режимі $e(\infty) = 1$ В. У режимі постійного струму індуктивність еквівалентна замиканню, а ємність – розмиканню, тому для схеми (рис.5.2) $u_{C_{\text{вм}}}(t) = u_C(\infty) = 1$ В.

Отже, розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (5.15) визначається як сума вільної та вимушеної складових:

$$g(t) = u_C(t) = u_{C_{\text{вл}}}(t) + u_{C_{\text{вм}}}(t) = 1 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (5.18)$$

Значення коефіцієнтів A_1 і A_2 визначають за початковими умовами, виходячи із **законів комутації**.

Якщо момент комутації розглядати як початок відліку часу $t_0 = 0$, то момент безпосередньо перед комутацією позначається $t = -0$, а момент після комутації $t = +0$. Враховуючи ці позначення, можна записати:

$$i_L(-0) = i_L(+0) \text{ – перший закон комутації;}$$

$$u_C(-0) = u_C(+0) \text{ – другий закон комутації.}$$

Отже, у початковий момент після комутації струм в індуктивності (напруга на ємності) залишається саме таким, яким він був безпосередньо перед комутацією, а потім плавно змінюється.

Значення струму в індуктивності та напруги на ємності до моменту комутації називають **початковими умовами**. Розрізняють нульові та ненульові початкові умови. За нульових початкових умов, коли $i_L(-0) = 0$, $u_C(-0) = 0$, індуктивність у початковий момент часу після комутації еквівалентна розриву кола, а ємність – короткому замиканню. У випадку *ненульових* початкових

умов, коли $i_L(-0) \neq 0$, $u_C(-0) \neq 0$, індуктивність в перший момент після комутації еквівалентна джерелу струму $i_L(-0)$, а ємність – джерелу ЕРС $u_C(-0)$.

Для кола (рис.5.2) за нульових початкових умов $i_L(-0) = i_L(+0) = 0$; $u_C(-0) = u_C(+0) = 0$. Із рівняння (5.18) при $t = +0$

$$u_C(+0) = 0 = 1 + A_1 e^{p_1 \cdot 0} + A_2 e^{p_2 \cdot 0} = 1 + A_1 + A_2.$$

Використовуючи диференціальний зв'язок струму і напруги в ємності:

$$i(+0) = \left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0} = CA_1 p_1 e^{p_1 \cdot 0} + CA_2 p_2 e^{p_2 \cdot 0} = C(A_1 p_1 + A_2 p_2) = 0,$$

звідки $A_1 = \frac{p_2}{p_1 - p_2}$; $A_2 = \frac{p_1}{p_2 - p_1}$.

На підставі виразів (5.3), (5.12), (5.13) виходять інші повні динамічні характеристики:

- імпульсна характеристика

$$h(t) = g'(t) = \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1} e^{p_2 t};$$

- операторна передатна функція:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1};$$

- комплексна передатна функція:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{(1 - LC\omega^2) + j\omega RC} = \frac{(1 - LC\omega^2) - j\omega RC}{(1 - LC\omega^2)^2 + (\omega RC)^2}; \quad (5.19)$$

- АЧХ:

$$H(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2[H(j\omega)] + \text{Im}^2[H(j\omega)]} = \frac{1}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (\omega RC)^2}}, \quad (5.20)$$

де $\text{Re}[H(j\omega)] = \frac{1 - LC\omega^2}{(1 - LC\omega^2)^2 + (\omega RC)^2}$; $\text{Im}[H(j\omega)] = \frac{-\omega RC}{(1 - LC\omega^2)^2 + (\omega RC)^2}$;

- ФЧХ:

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im}[H(j\omega)]}{\text{Re}[H(j\omega)]} = -\arctg \frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}. \quad (5.21)$$

Враховуючи, що величина $\omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{LC}$ – резонансна частота контуру

(рис.5.2), а $Q = \rho/R = \sqrt{L/C}/R$ – добротність контуру, АЧХ і ФЧХ можна записати у вигляді:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{[(1 - (\omega/\omega_{\text{рез}})^2)]^2 + (\omega/Q\omega_{\text{рез}})^2}}; \quad (5.22)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{\omega/\omega_{\text{рез}}Q}{1 - (\omega/\omega_{\text{рез}})^2}. \quad (5.23)$$

Слід зазначити, що визначення динамічних характеристик на підставі складання і розв'язання диференціального рівняння не є найпростішим способом. Для складніших кіл доцільно визначати частотні характеристики або передатні функції безпосередньо за схемою, користуючись методом комплексних амплітуд або операторним методом відповідно.

5.3 Частотні характеристики кіл синусоїдного струму

До частотних характеристик електричного кола належать комплексна передатна функція (КПФ), амплітудно-частотна (АЧХ) і фазочастотна (ФЧХ) характеристики.

КПФ електричного кола $H(j\omega)$ – відношення вихідної величини до вхідної, виражене в комплексній формі:

$$H(j\omega) = \frac{F_{\text{мвих}}(j\omega)}{F_{\text{мвх}}(j\omega)}, \quad (5.24)$$

де $F_{\text{мвих}}(j\omega)$ – комплексна амплітуда вихідної величини (відгуку);

$F_{\text{мвх}}(j\omega)$ – комплексна амплітуда вхідної величини (дії).

Найпоширенішим видом КПФ є комплексний коефіцієнт передачі за напругою: $H(j\omega) = K_U(j\omega) = \underline{U}_{\text{вих}} / \underline{U}_{\text{вх}}$.

АЧХ і ФЧХ є відповідно модулем і аргументом $H(j\omega)$ (див. підрозд. 5.1).

Важливим параметром АЧХ кола є **смуга пропускання**

$$\Delta\omega = \omega_{\text{в}} - \omega_{\text{н}},$$

яка визначається за ослабленням АЧХ у межах верхньої $\omega_{\text{в}}$ та нижньої $\omega_{\text{н}}$ частот до рівня $1/\sqrt{2}$ від максимального значення.

Щоб знайти КПФ безпосередньо за формулою (5.24), використовують метод комплексних амплітуд (див. підрозд. 4.4).

Приклад 5.2. Інтегрувальна ланка.

Інтегрувальна ланка призначена для згладжування (інтегрування) змінювань напруги в електричних колах. Цю ланку можна реалізувати двома еквівалентними (дуальними) за властивостями схемами R, C і R, L (рис.5.3).

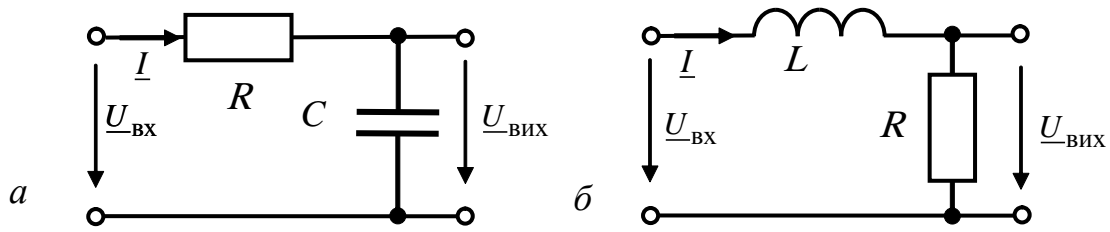


Рисунок 5.3 – Інтегрувальні ланки: *a* – R,C ; *б* – R,L

Властивість інтегрування обумовлена відповідним зв'язком між струмом і напругою в ємності та індуктивності.

Для ланки (рис.5.3, *a*) комплексний коефіцієнт передачі за напругою

$$K_U(j\omega) = \frac{U_{\text{ВИХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{I \frac{1}{j\omega C}}{I(R + 1/j\omega C)} = \frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{1}{1 + j\omega \tau}, \quad (5.25)$$

де $\tau = RC$ – стала часу ланки.

Якщо подати $K_U(j\omega)$ у показниковій формі,

$$K_U(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} e^{-j \arctg(\omega\tau)},$$

знайдемо АЧХ (рис.5.4, *a*):

$$K_U(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \quad (5.26)$$

і ФЧХ (рис.5.4, *б*):

$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega\tau). \quad (5.27)$$

Аналогічно для ланки (рис.5.3, *б*):

$$K_U(j\omega) = \frac{U_{\text{ВИХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{IR}{I(R + j\omega L)} = \frac{1}{1 + j\omega L/R} = \frac{1}{1 + j\omega \tau}, \quad (5.28)$$

де $\tau = L/R$ – стала часу ланки.

За частотними властивостями інтегрувальна ланка є фільтром нижніх частот (ФНЧ), оскільки пропускає без спотворення коливання нижніх частот (починаючи з постійного струму) і ослаблює (затримує) коливання високих частот. Смугу пропускання ФНЧ відраховують від $\omega_H = 0$ до ω_B і визначають з умо-

ви: $K_U(\omega_B) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_B \tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, звідки $\omega_B = \frac{1}{\tau}$.

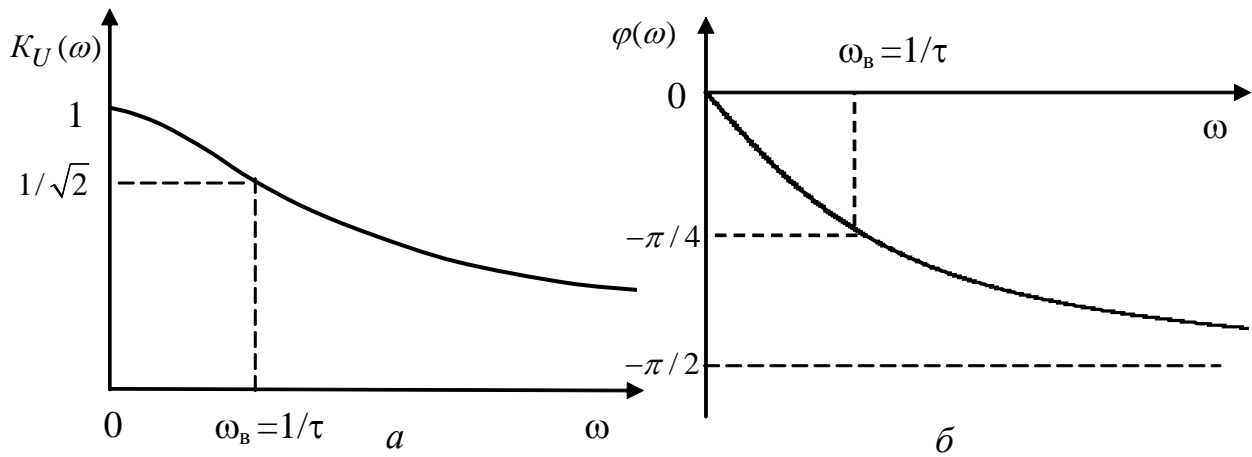


Рисунок 5.4 – Графіки частотних характеристик ланок R,C ; R,L :
 a – АЧХ; b – ФЧХ

Приклад 5.3. Диференціальна ланка.

Диференціальна ланка застосовується в електричних колах для виділення (диференціювання) змінювань напруги відносно постійної складової. Цю ланку можна реалізувати двома еквівалентними (дуальними) за властивостями схемами R, L і R, C (рис.5.5).

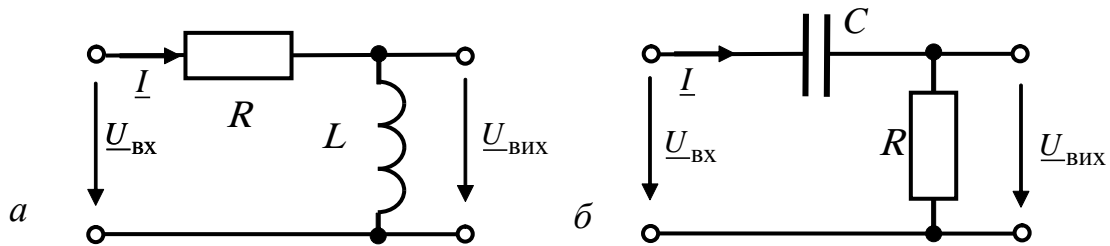


Рисунок 5.5 – Диференціальні ланки: a – R, L ; b – R, C

Властивість диференціювання обумовлена відповідним зв'язком між струмом і напругою в ємності та індуктивності.

Для ланки (рис.5.5, a) комплексний коефіцієнт передачі за напругою

$$K_U(j\omega) = \frac{U_{\text{вих}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{Ij\omega L}{I(R + j\omega L)} = \frac{j\omega L/R}{(1 + j\omega L/R)} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}, \quad (5.29)$$

де $\tau = L/R$ – стала часу ланки.

Якщо подати $K_U(j\omega)$ у показниковій формі,

$$K_U(j\omega) = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} e^{-j[\pi/2 - \arctg(\omega\tau)]},$$

знайдемо АЧХ (рис.5.6, a):

$$K_U(\omega) = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \quad (5.30)$$

і ФЧХ (рис.5.6, б):

$$\varphi(\omega) = \pi/2 - \text{arctg}(\omega\tau). \quad (5.31)$$

Диференціальна ланка за частотними властивостями є фільтром верхніх частот (ФВЧ), оскільки пропускає без спотворення коливання високих частот і ослабляє (затримує) низькі частоти (включаючи постійний струм). Смугу пропускання ФВЧ, яка лежить у межах від ω_H до $\omega_B \rightarrow \infty$ визначають з умови:

$$K_U(\omega_H) = \frac{\omega_H\tau}{\sqrt{1+(\omega_H\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ звідки } \omega_H = \frac{1}{\tau}.$$

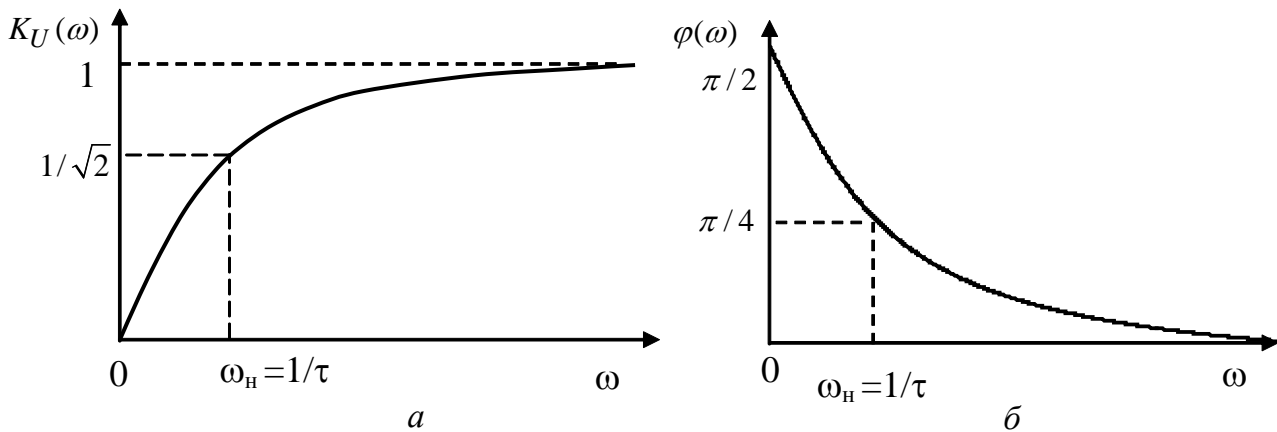


Рисунок 5.6 – Графіки частотних характеристик ланок R,L ; R,C : а – АЧХ; б – ФЧХ

Приклад 5.3. Послідовний резонансний контур.

Послідовний резонансний контур (рис.5.7) є вибіркою ланкою, яка виділяє коливання з частотами, близькими до частоти резонансу.

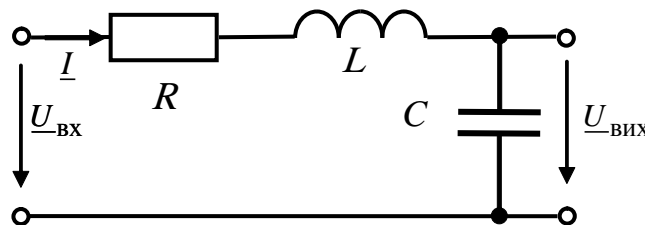


Рисунок 5.7 – Послідовний резонансний контур

Комплексний коефіцієнт передачі за напругою цієї ланки:

$$K_U(j\omega) = \frac{U_{\text{вих}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{I \frac{1}{j\omega C}}{I(R + j\omega L + 1/j\omega C)} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR}; \quad (5.32)$$

АЧХ (рис.5.8, а):

$$K_U(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}} = \frac{1}{\sqrt{[(1 - (\omega/\omega_{\text{рез}})^2)]^2 + (\omega/Q\omega_{\text{рез}})^2}}; \quad (5.33)$$

ФЧХ (рис.5.8, б):

$$\varphi(\omega) = -\text{arctg} \frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC} = -\text{arctg} \frac{\omega/\omega_{\text{рез}} Q}{1 - (\omega/\omega_{\text{рез}})^2}. \quad (5.34)$$

У формулах (5.33), (5.34) $\omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{LC}$ – резонансна частота,

$Q = \rho/R = \sqrt{L/C}/R$ – добротність; $\rho = \omega_{\text{рез}} L = \frac{1}{\omega_{\text{рез}} C} = \sqrt{L/C}$ – характеристичний

опір контуру. Величину, обернену добротності $d = 1/Q$, називають загасанням. Для високодобротних контурів $Q = 100 \dots 300$.

Вирази (5.33), (5.34) збігаються з виразами (5.22), (5.23), які отримано за допомогою диференціального рівняння кола.

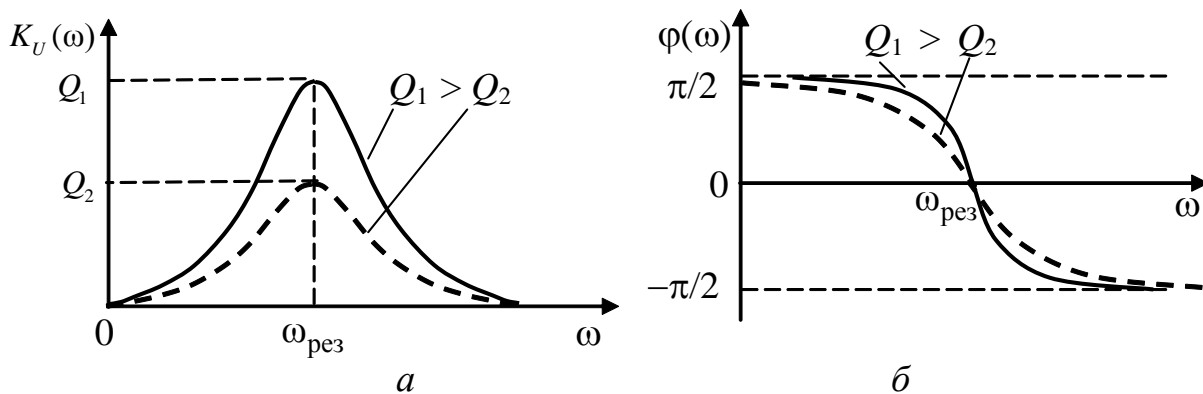


Рисунок 5.8 – Частотні характеристики послідовного контуру: а – АЧХ; б – ФЧХ

5.4 Операторна передатна функція

Операторну передатну функцію (ОПФ) можна отримати із диференціального рівняння кола або комплексної передатної функції, формально замінюючи відповідно оператор диференцювання d/dt або оператор повороту $j\omega$ на комплексну змінну p . Однак, застосовуючи **операторний метод**, можна отримати ОПФ, не складаючи диференціальні рівняння або не визначаючи КПФ. Для цього

необхідно скласти операторну схему заміщення кола та записати ОПФ, використовуючи закони Ома і Кірхгофа в операторній формі. Застосування цих правил для послідовного резонансного контуру (рис.5.7) призводить до операторної схеми заміщення (рис.5.9) та виразу для ОПФ:

$$H_U(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{I(p) \frac{1}{pC}}{I(p)(R + pL + 1/pC)} = \frac{1}{p^2LC + pCR + 1}. \quad (5.35)$$

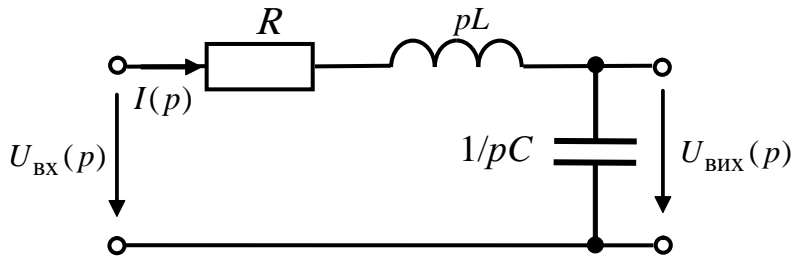


Рисунок 5.9 – Операторна схема послідовного

5.5 Часові характеристики

5.5.1 Імпульсна характеристика

Вище (див. підрозд.5.1) зазначено, що імпульсна характеристика кола $h(t)$ є реакцією кола на вхідну дію виду δ -функції. Зображення δ -функції дорівнює одиниці, тому вираз для ОПФ (5.12) має вигляд:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{H(p)}{1} = H(p).$$

Отже, імпульсна характеристика визначається як обернене перетворення Лапласа від операторної передатної функції:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\}. \quad (5.36)$$

Для схеми (рис.5.9) ОПФ визначається виразом (5.35):

$$H_U(p) = \frac{1}{p^2LC + pCR + 1} = \frac{1/LC}{p^2 + pR/L + 1/LC}.$$

На підставі табличного співвідношення (табл.5.1, поз.11) виходить:

$$h(t) = \frac{A}{\omega_1} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin \omega_1 t,$$

де $\omega_1 = \sqrt{\beta - \alpha^2/4}$; $A = \frac{1}{LC}$; $\alpha = \frac{R}{L}$; $\beta = \frac{1}{LC}$ або після підстановки ко-

ефіцієнтів:

$$h(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t = e^{-\frac{\omega_{\text{рез}}}{2Q}t} \sin \sqrt{\omega_{\text{рез}}^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)} t.$$

5.5.2 Перехідна характеристика

Перехідна характеристика $g(t)$ визначається як відгук кола на одиничну дію $1(t)$. Оскільки зображення одиничної функції становить $1/p$, вираз для ОПФ має вигляд:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{G(p)}{1/p} = pG(p).$$

Отже, зв'язок між перехідною характеристикою та ОПФ встановлюється виразом:

$$g(t) = \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{H(p)}{p} \right\}. \quad (5.37)$$

Для схеми (рис.5.9) можна записати:

$$g(t) = \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p(p^2LC + pCR + 1)} \right\}.$$

За таблицею перетворень Лапласа (табл.5.1, поз.16)

$$g(t) = \frac{A}{\beta} - \frac{A}{\beta} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \left(\cos \omega_1 t + \frac{\alpha}{2\omega_1} \sin \omega_1 t \right),$$

$$\text{де } \omega_1 = \sqrt{\beta - \alpha^2/4}; \quad A = \frac{1}{LC}; \quad \alpha = \frac{R}{L}; \quad \beta = \frac{1}{LC}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} g(t) &= 1 - e^{-\frac{R}{2L}t} \left(\cos \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t + \frac{R}{2L \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \sin \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t \right) = \\ &= 1 - e^{-\frac{\omega_{\text{рез}}}{2Q}t} \left[\cos \sqrt{\omega_{\text{рез}}^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)} t + \frac{R}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \sin \sqrt{\omega_{\text{рез}}^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)} t \right]. \end{aligned}$$

Похідна від цього виразу дорівнюватиме імпульсній характеристиці.

Таблиця 5.1 – Відповідності зображень і оригіналів

Номер	$F(p) = L[f(t)]$	$f(t) = L^{-1}[F(p)]$
1	A	$A \cdot \delta(t)$
2	A/p	$A \cdot 1(t)$
3	A/p^2	$A \cdot t$
4	$\frac{A}{p \pm \alpha}$	$Ae^{\mp \alpha t}$
5	$\frac{A}{(p + \alpha)^2}$	$Ate^{-\alpha t}$
6	$\frac{A}{(p + \alpha)^n}$	$\frac{A}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\alpha t} \quad (n = 1, 2, \dots)$
7	$\frac{A^2}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{A}{\omega} \sin \omega t$
8	$\frac{A^2 p}{p^2 + \omega^2}$	$A \cos \omega t$
9	$\frac{A}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{A}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$
10	$\frac{Ap}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{A}{a-b} (ae^{-at} - be^{-bt})$
11	$\frac{A}{p^2 + \alpha p + \beta}$	$\frac{A}{\omega_1} e^{-\alpha t/2} \sin \omega_1 t, \quad \omega_1 = \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}$
12	$\frac{Ap}{p^2 + \alpha p + \beta}$	$Ae^{-\alpha t/2} (\cos \omega_1 t - \frac{\alpha}{2\omega_1} \sin \omega_1 t), \quad \omega_1 = \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}$
13	$\frac{Ap}{(p + \alpha)^2}$	$A(1 - \alpha t)e^{-\alpha t}$
14	$\frac{A}{p(p + \alpha)}$	$\frac{A}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$
15	$\frac{A}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{A}{ab(a-b)} (a - b + be^{-at} - ae^{-bt})$
16	$\frac{A}{p(p^2 + \alpha p + \beta)}$	$\frac{A}{\beta} - \frac{A}{\beta} e^{-\alpha t/2} (\cos \omega_1 t + \frac{\alpha}{2\omega_1} \sin \omega_1 t), \quad \omega_1 = \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}$

Продовження табл. 5.1

Номер	$F(p) = L[f(t)]$	$f(t) = L^{-1}[F(p)]$
17	$\frac{A}{p(p + \alpha)^2}$	$\frac{A}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t})$
18	$A \frac{1 - e^{-pt_i}}{p}$	A при $0 < t < t_i$; 0 при $t > t_i$
19	$A \frac{p(1 - e^{-pt_i})}{p^2 + \omega^2}$	$A \cos \omega t$ при $0 < t < t_i$; 0 при $t > t_i$ ($\frac{\omega t_i}{2\pi}$ – ціле число)
20	$A \frac{\omega(1 - e^{-pt_i})}{p^2 + \omega^2}$	$A \sin \omega t$ при $0 < t < t_i$; 0 при $t > t_i$ ($\frac{\omega t_i}{2\pi}$ – ціле число)

5.6 Контрольні запитання та завдання

1. Пояснити поняття динамічних характеристик лінійних електричних кіл.
2. Яке коло називають чотиріполюсником?
3. Які ДХ називають повними? Які повні ДХ розглядають під час аналізу лінійних чотиріполюсників?
4. Які ДХ називають частинними? Наведіть приклади частинних ДХ.
5. Пояснити поняття імпульсної характеристики.
6. Пояснити поняття перехідної характеристики.
7. Як визначається операторна передатна функція?
8. Як визначається комплексна передатна функція?
9. Пояснити поняття амплітудно-частотної характеристики.
10. Як визначити фазочастотну характеристику?
11. Як скласти диференціальне рівняння кола?
12. Як диференціальне рівняння пов'язано з операторною та комплексною передатними функціями?
13. Як розв'язати диференціальне рівняння кола?
15. Які існують частотні характеристики електричних кіл?
16. Як визначити смугу пропускання кола?
17. Отримайте вирази для частотних характеристик інтегрувальної ланки.
18. Отримайте вирази для частотних характеристик диференціальної ланки.

19. Отримайте вираз для частотних характеристик послідовного резонансного контуру.

20. Як знайти операторну передатну функцію кола?

21. Який зв'язок існує між імпульсною характеристикою кола та ОПФ?

22. Який зв'язок існує між перехідною характеристикою кола та ОПФ?

5.7 Контрольні завдання

Знайти повні динамічні характеристики лінійного електричного кола (рис.5.10): КПФ, АЧХ, ФЧХ, ОПФ, імпульсну і перехідну характеристики. Елементи кола наведені у табл.5.2, причому $R_1 = 1$ кОм; $R_2 = 2$ кОм; $R_3 = 4$ кОм; $C_1 = 1$ мкФ; $C_2 = 2$ мкФ; $L_1 = 1$ мГн; $L_2 = 2$ мГн.

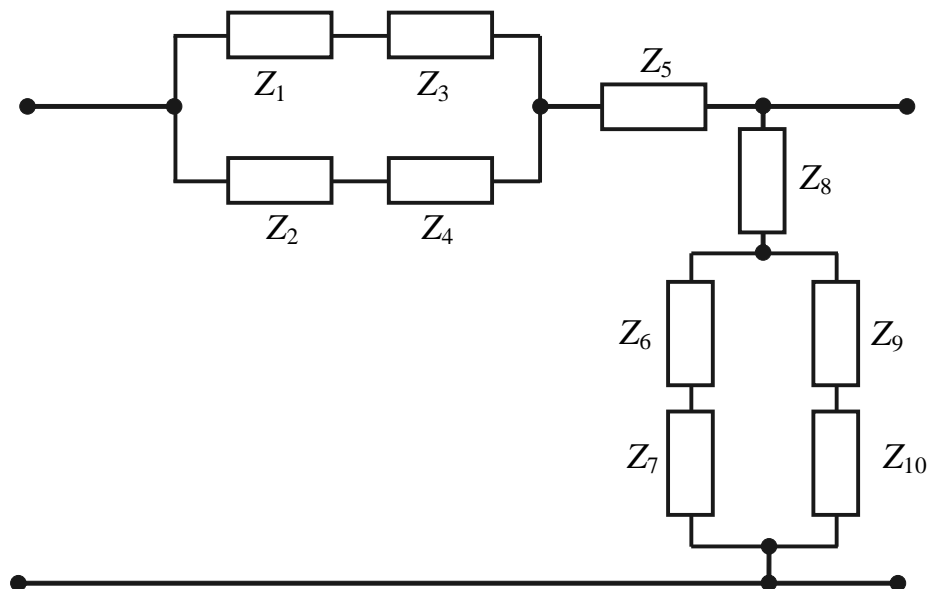


Рисунок 5.10 – Узагальнена схема кола

Таблиця 5.2 – Варіанти контрольних завдань

Номер варіанта	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}
1-а	R_1	R_2	C_1	0	0	∞	0	L_1	0	0
2-а	R_1	C_1	L_1	0	0	∞	0	R_2	0	0
3-а	R_1	C_1	R_2	0	0	∞	0	L_1	0	0
4-а	L_1	R_1	C_1	0	0	∞	0	R_2	0	0
5-а	R_1	∞	L_1	0	R_2	∞	0	C_1	0	0
6-а	R_1	∞	C_1	0	L_1	R_2	R_3	0	∞	0
7-а	C_1	L_1	R_1	R_2	0	0	∞	R_3	0	0
8-а	R_1	C_1	0	0	0	R_2	0	0	L_1	0
9-а	C_1	L_1	0	0	L_2	∞	0	R_1	0	0
10-а	L_1	R_1	0	0	R_2	∞	0	C_1	0	0
11-а	C_1	R_1	0	0	R_2	∞	0	L_1	0	0
12-а	R_1	L_1	R_2	0	0	∞	0	C_1	0	0
13-а	R_1	R_2	L_1	0	0	∞	0	C_1	0	0
14-а	R_1	L_1	R_2	0	0	C_1	R_3	0	∞	0
15-а	R_1	∞	C_1	0	R_2	∞	0	L_1	0	0
16-а	R_1	C_1	R_2	L_1	0	∞	0	R_3	0	0
17-а	R_1	0	L_1	0	0	R_2	0	0	C_1	0
18-а	R_1	C_1	R_2	0	R_3	∞	0	L_1	0	0
19-а	R_1	L_1	R_2	0	R_3	∞	0	C_1	0	0
20-а	R_1	L_1	R_2	0	C_1	∞	0	R_3	0	0
21-а	R_1	C_1	R_2	0	L_1	∞	0	R_3	0	0
22-а	R_1	0	R_2	0	C_1	R_3	L_1	0	∞	0
23-а	R_1	0	R_2	0	L_1	C_1	R_3	0	∞	0
24-а	R_1	R_2	0	0	C_1	0	∞	L_1	0	0
25-а	R_1	R_2	0	0	L_1	0	∞	C_1	0	0
26-а	R_1	R_2	L_1	0	C_1	0	∞	R_3	0	0
27-а	R_1	R_2	C_1	0	L_1	0	∞	R_3	0	0
28-а	R_1	L_1	0	0	C_1	R_2	R_3	0	∞	0
29-а	L_1	C_1	0	0	R_1	0	0	R_2	∞	0
30-а	C_1	∞	R_1	0	L_1	0	0	R_2	∞	0

Продовження табл. 5.2

Номер варіанта	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}
1-б	R	C_1	0	C_2	0	∞	0	L	0	0
2-б	L	C_1	0	C_2	0	∞	0	R	0	0
3-б	R_1	L_1	0	L_2	0	∞	0	C	0	0
4-б	C_1	L_1	0	L_2	0	∞	0	R	0	0
5-б	R	C_1	0	0	C_2	∞	0	L	0	0
6-б	L	C_1	0	0	C_2	∞	0	R	0	0
7-б	R	L_1	0	0	L_2	∞	0	C	0	0
8-б	L_1	C	0	0	L_2	∞	0	R	0	0
9-б	R	L_1	C_1	0	0	∞	0	C_2	0	0
10-б	L	C_1	R	0	0	∞	0	C_2	0	0
11-б	L_1	C	R	0	0	∞	0	L_2	0	0
12-б	R	L_1	C	0	0	∞	0	L_2	0	0
13-б	L_1	L_2	R	0	0	∞	0	C	0	0
14-б	C_1	C_2	R	0	0	∞	0	L	0	0
15-б	C_1	C_2	0	0	R	∞	0	L	0	0
16-б	C_1	C_2	0	0	L	∞	0	R	0	0
17-б	0	∞	0	0	C	L_1	0	R	L_2	0
18-б	L_1	L_2	0	0	C	∞	0	R	0	0
19-б	C_1	R	L_1	0	0	0	0	C_2	∞	0
20-б	C_1	C_2	L_1	0	0	0	0	R	∞	0
21-б	C_1	R	L_1	0	0	0	0	L_2	∞	0
22-б	C_1	L_1	L_2	0	0	0	0	R	∞	0
23-б	L	C_1	0	0	R	∞	0	C_2	0	0
24-б	L_1	C_1	0	0	R	∞	0	L_2	0	0
25-б	L_1	C_1	0	0	0	R	0	0	L_2	0
26-б	L_1	C_1	0	0	0	R	0	0	C_2	0
27-б	R_1	C_1	0	0	0	L_1	0	0	C_2	0
28-б	R_1	L_1	0	0	0	L_2	0	0	C	0
29-б	∞	0	0	0	C_1	R	0	0	L_1	L_2
30-б	∞	0	0	0	L_1	R	0	0	C_1	C_2

5.8 Приклад виконання контрольного завдання

Визначити усі повні динамічні характеристики кола (рис.5.10) для заданого варіанта, причому $R_1 = 1$ кОм; $R_2 = 2$ кОм; $C_1 = 1$ мкФ; $C_2 = 2$ мкФ.

Номер варіанта	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}
приклад	R_1	∞	C_1	∞	0	R_2	0	0	C_2	0

1. Складемо схему кола для заданого варіанта (рис.5.11)

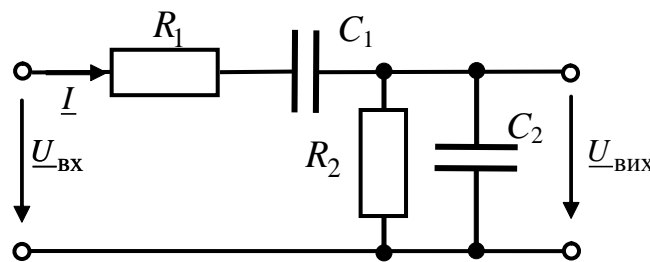


Рисунок 5.11 – Схема кола для заданого варіанта

2. Складемо диференціальне рівняння кола.

За другим законом Кірхгофа:

$$u_{\text{ВХ}}(t) = R_1 i(t) + \frac{1}{C_1} \int i(t) dt + u_{\text{ВХ}}(t).$$

За першим законом Кірхгофа:

$$i(t) = \frac{u_{\text{ВХ}}(t)}{R_2} + C_2 \frac{du_{\text{ВХ}}(t)}{dt}.$$

Підставляючи другий вираз до першого, отримуємо:

$$u_{\text{ВХ}}(t) = \frac{R_1}{R_2} u_{\text{ВХ}}(t) + R_1 C_2 \frac{du_{\text{ВХ}}(t)}{dt} + \frac{1}{R_2 C_1} \int u_{\text{ВХ}}(t) dt + \frac{C_2}{C_1} u_{\text{ВХ}}(t) + u_{\text{ВХ}}(t).$$

Після диференціювання та упорядкування запису, виходить:

$$\frac{d^2 u_{\text{ВХ}}(t)}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_2} \right) \frac{du_{\text{ВХ}}(t)}{dt} + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2} u_{\text{ВХ}}(t) = \frac{1}{R_1 C_2} \frac{du_{\text{ВХ}}(t)}{dt}.$$

Записуючи у чисельнику передатної функції праву частину диференціального рівняння, у знаменнику – ліву та замінюючи оператор диференціювання d/dt на оператор $j\omega$ та оператор p , отримуємо КПФ і ОПФ відповідно:

$$H(j\omega) = \frac{j\omega \frac{1}{R_1 C_2}}{(j\omega)^2 + j\omega \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_2} \right) + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}} =$$

$$= \frac{j\omega R_2 C_1}{(1 - \omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2) + j\omega(R_2 C_2 + R_1 C_1 + R_2 C_1)};$$

$$H(p) = \frac{p \frac{1}{R_1 C_2}}{p^2 + p \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_2} \right) + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}}.$$

3. Визначимо КПФ безпосередньо за схемою, користуючись законом Ома у комплексній формі:

$$H(j\omega) = \frac{U_{\text{ВИХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{I Z_{RC}}{I Z_{\text{ВХ}}} = \frac{\frac{R_2 / j\omega C_2}{R_2 + 1 / j\omega C_2}}{\frac{R_2 / j\omega C_2}{R_2 + 1 / j\omega C_2} + R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} =$$

$$= \frac{j\omega R_2 C_1}{(1 - \omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2) + j\omega(R_2 C_2 + R_1 C_1 + R_2 C_1)}.$$

4. Визначимо АЧХ (рис.5.12, а) як модуль КПФ:

$$H(\omega) = \frac{\omega R_2 C_1}{\sqrt{(1 - \omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2)^2 + \omega^2 (R_2 C_2 + R_1 C_1 + R_2 C_1)^2}} =$$

$$= \frac{\omega \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{(1 - \omega^2 \cdot 4 \cdot 10^{-6})^2 + \omega^2 (4 \cdot 10^{-3} + 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3})^2}} = \frac{\omega \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{(1 - \omega^2 \cdot 4 \cdot 10^{-6})^2 + \omega^2 \cdot 49 \cdot 10^{-6}}}.$$

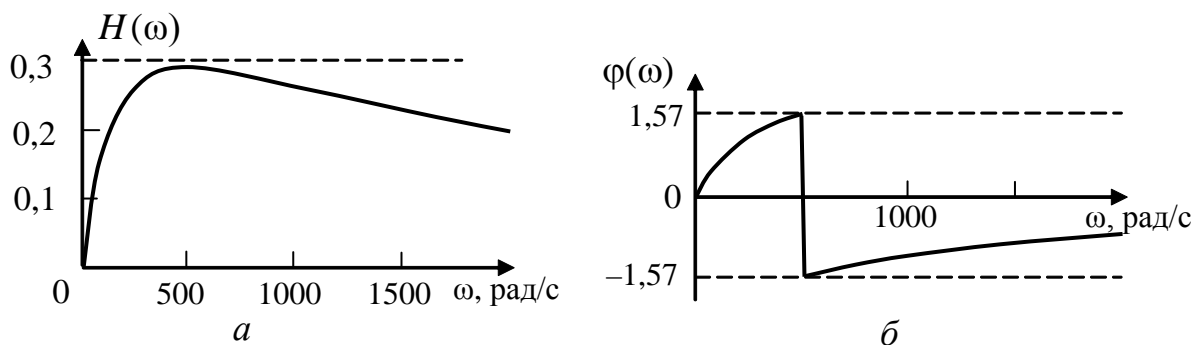


Рисунок 15.12 – Графіки частотних характеристик: а – АЧХ; б – ФЧХ

5. Визначимо ФЧХ (рис.5.12, б) як аргумент КПФ:

$$\begin{aligned}\varphi(\omega) &= \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\omega(R_2C_2 + R_1C_1 + R_2C_1)}{1 - \omega^2 R_1C_1R_2C_2} = \\ &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\omega \cdot 7 \cdot 10^{-3}}{1 - \omega^2 \cdot 4 \cdot 10^{-6}}.\end{aligned}$$

6. Визначимо операторну передатну функцію:

$$\begin{aligned}H(p) &= \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{I(p) \frac{R_2/pC_2}{R_2 + 1/pC_2}}{I(p) \left(\frac{R_2/pC_2}{R_2 + 1/pC_2} + R_1 + \frac{1}{pC_1} \right)} = \\ &= \frac{p \frac{1}{R_1C_2}}{p^2 + p \left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_2} + \frac{1}{R_1C_2} \right) + \frac{1}{R_1C_1R_2C_2}} = \frac{p \cdot 0,5 \cdot 10^3}{p^2 + p \cdot 1,75 \cdot 10^3 + 0,25 \cdot 10^6}.\end{aligned}$$

Знайдемо корені знаменника, прирівнявши його до нуля і розв'язавши квадратне рівняння:

$$\begin{aligned}p_{1,2} &= \frac{-1,75 \cdot 10^3 \pm \sqrt{(1,75 \cdot 10^3)^2 - 10^6}}{2} = -0,875 \cdot 10^3 \pm 0,718 \cdot 10^3; \\ p_1 &= -1,593 \cdot 10^3; \quad p_2 = -0,157 \cdot 10^3.\end{aligned}$$

Отже, корені знаменника – від'ємні дійсні числа і записавши знаменник як добуток співмножників, запишемо ОПФ у вигляді:

$$H(p) = \frac{0,5 \cdot 10^3 p}{(p + 1,593 \cdot 10^3)(p + 0,157 \cdot 10^3)}.$$

7. Визначимо імпульсну характеристику кола згідно з формулою (5.36) як обернене перетворення Лапласа від операторної передатної функції:

$$h(t) = L^{-1}\{H(p)\} = L^{-1}\left\{ \frac{0,5 \cdot 10^3 p}{(p + 1,593 \cdot 10^3)(p + 0,157 \cdot 10^3)} \right\}.$$

За таблицею перетворень Лапласа (табл.5.1, поз.10) зображенню $\frac{Ap}{(p+a)(p+b)}$ відповідає оригінал $\frac{A}{a-b}(ae^{-at} - be^{-bt})$, тому запишемо:

$$\begin{aligned}h(t) &= \frac{0,5 \cdot 10^3}{1,593 \cdot 10^3 - 0,157 \cdot 10^3} \left(1,593 \cdot 10^3 e^{-1,593 \cdot 10^3 t} - 0,157 \cdot 10^3 e^{-0,157 \cdot 10^3 t} \right) = \\ &= 0,555 \cdot 10^3 e^{-1,593 \cdot 10^3 t} - 0,0547 \cdot 10^3 e^{-0,157 \cdot 10^3 t}.\end{aligned}$$

8. Знайдемо перехідну характеристику кола.

Перший спосіб: на підставі зв'язку між перехідною та імпульсною характеристиками (5.4)

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^t h(x) dx = \int_0^t (0,555 \cdot 10^3 e^{-1,593 \cdot 10^3 x} - 0,0547 \cdot 10^3 e^{-0,157 \cdot 10^3 x}) dx = \\ &= \frac{0,555 \cdot 10^3}{-1,593 \cdot 10^3} e^{-1,593 \cdot 10^3 x} \Big|_0^t - \frac{0,0547 \cdot 10^3}{-0,157 \cdot 10^3} e^{-0,157 \cdot 10^3 x} \Big|_0^t = \\ &= -0,348 e^{-1,593 \cdot 10^3 t} + 0,348 + 0,348 e^{-0,157 \cdot 10^3 t} - 0,348 = \\ &= 0,348 (e^{-0,157 \cdot 10^3 t} - e^{-1,593 \cdot 10^3 t}). \end{aligned}$$

Другий спосіб: на підставі зв'язку між зображеннями ОПФ та перехідної характеристики (5.37)

$$g(t) = \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{H(p)}{p} \right\} = \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{0,5 \cdot 10^3}{(p + 1,593 \cdot 10^3)(p + 0,157 \cdot 10^3)} \right\}.$$

Згідно із табл. 5.1 (поз.9) зображенню $\frac{A}{(p+a)(p+b)}$ відповідає оригінал

$\frac{A}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$, тому можна записати:

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{0,5 \cdot 10^3}{0,157 \cdot 10^3 - 1,593 \cdot 10^3} (e^{-1,593 \cdot 10^3 t} - e^{-0,157 \cdot 10^3 t}) = \\ &= 0,348 (e^{-0,157 \cdot 10^3 t} - e^{-1,593 \cdot 10^3 t}). \end{aligned}$$

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Бакалов В.П., Дмитренко В.Ф., Крук Б.И. Основи теорії цепей: Учебник для вузов. – М.: Радио и связь, 2000. – 592 с.
2. Основи теорії кіл: підручник для студентів ВНЗ. Ч.1 / Ю.О. Коваль, Л.В. Грінченко, І.О. Милютченко, О.І. Рибін. – Харків: ХНУРЕ: Колегіум, 2004. – 436 с.
3. Основи теорії кіл: підручник для студентів ВНЗ. Ч.2 / Ю.О. Коваль, Л.В. Грінченко, І.О. Милютченко, О.І. Рибін. – Харків: ХНУРЕ: Колегіум, 2006. – 668 с.
4. Основи теорії кіл, сигналів та процесів в СТЗІ: підручник для студентів ВНЗ. Ч.1. / Ю.О. Коваль, І.О. Милютченко, А.М. Олейніков, В.М. Шокало та ін; за заг. редакцією В.М. Шокала. – Харків: НТМТ, 2011. – 544 с.
5. ДСТУ 2815-94 Електричні й магнітні кола та пристрої. Терміни та визначення. – Чинний від 01.01.1996. К.: Держстандарт України, 1995. –107 с.
6. ДСТУ 3120-95 Електротехніка. Літерні позначення основних величин. – Чинний від 01.10.1997. К.: .: Держстандарт України, 1995. – 40 с.
7. Милютченко І.О. Довідник з основ теорії кіл: навч. посібник для студентів ЗВО / І.О. Милютченко. – Харків: ХНУРЕ; 2018. – 150 с.

ГЛОСАРІЙ

Амплітуда (амплитуда, amplitude) – максимальне значення синусоїдного струму, напруги або ЕРС.

Амплітудно-частотна характеристика, АЧХ (амплитудно-частотная характеристика, gain-frequency characteristic) – залежність від частоти модуля комплексної передатної функції кола.

Векторна діаграма (векторная диаграмма, vector (Argand) diagram) – сукупність векторів, які відповідають комплексним амплітудах (комплексним діючим значенням) синусоїдних струмів, напруг або ЕРС і алгебраїчно підсумовуються за законами Кірхгофа.

Відгук, або реакція (отклик, response) – поява струму (напруги) у колі.

Вітка (ветвь, branch) – декілька послідовно сполучених елементів, в яких проходить один і той самий струм.

Вузол (узел, node) – точка з'єднання трьох і більше віток.

Базисний вузол (базисный узел, basic node) – вузол, потенціал якого дорівнює нулю.

Діюче значення (действующее значение, effective value) періодичного струму – середньо-квадратичне значення струму за період. *Діюче значення синусоїдного струму $i(t)$* чисельно дорівнює такому постійному струму I , який в опорі R за період T виділяє таку саму енергію, як і струм $i(t)$ за таких саме умов (у тому ж опорі за такий самий час).

Дія (воздействие, action) – внесення джерела до електричного кола.

Добротність (добротность, quality factor) – відношення характеристичного опору контуру до опору втрат.

Електрорушійна сила, ЕРС (электродвижущая сила, ЭДС, electromotive force) чисельно дорівнює роботі, що витрачає джерело на переміщення одиничного позитивного заряду всередині джерела від одного затискача до іншого.

Еквівалентні перетворення (эквивалентные преобразования, equal transformations) – перетворення однієї частини схеми, при яких не змінюється

режим роботи (струми і напруги) в іншій частині схеми, що залишилася неперетвореною.

Ємність (ємкость, capacity) – ідеальний пасивний елемент, в якому накопичується енергія електричного поля.

Імпульсна характеристика (импульсная характеристика, pulse (response) characteristic) – чисельно дорівнює відгуку пасивного лінійного кола на дію джерела типу дельта-функції за нульових початкових умов.

Індуктивність (индуктивность, inductance) – ідеальний пасивний елемент, в якому накопичується енергія магнітного поля.

Коло (цепь, circuit) – сукупність пристроїв і середовищ, що створюють замкнені шляхи для електричного струму.

Комплексна амплітуда (комплексная амплитуда, complex amplitude) – комплексне число, модуль якого дорівнює амплітуді, а аргумент – початковій фазі синусоїдного струму (напруги, ЕРС).

Комплексна передатна функція, КПФ (комплексная передаточная функция, complex transfer function) – це відношення комплексної амплітуди відгуку до комплексної амплітуди дії.

Контур (контур, circuit) – замкнений шлях по вітках схеми.

Навантага (нагрузка, load) – частина електричного кола, увімкнена до затискачів джерела. Ознакою навантаги (зовнішнього кола або приймача електричної енергії) є перетворення енергії електромагнітного поля в інші види енергії (теплову, звукову, механічну тощо).

Напруга (напряжение, voltage) – різниця електричних потенціалів двох точок кола.

Операторна передатна функція, ОПФ (операторная передаточная функция, operational transfer function) – відношення зображення відгуку до зображення дії.

Опір (сопротивление, resistance) – ідеальний пасивний елемент, у якому незворотно поглинається енергія.

Паралельне з'єднання (параллельное соединение, parallel connection) – з'єднання елементів з однаковою напругою на них.

Перехідна характеристика (переходная характеристика, transient characteristic) – чисельно дорівнює відгуку лінійного пасивного кола на дію джерела типу одиничної функції за нульових початкових умов.

Перехідний (переходный, transient) або нестационарний **режим** характерний тим, що струми і напруги є неперіодичними функціями часу. Причинами виникнення перехідних режимів є увімкнення кола до джерел і відімкнення від них, змінювання схеми та її параметрів, дія сигналів.

Період (период, period) – мінімальний проміжок часу, через який періодичний процес і його похідні повторюються.

Послідовне з'єднання (последовательное соединение, series connection) – з'єднання елементів, коли в них протікає однаковий струм.

Потужність (мощность, power) – швидкість змінювання енергії.

Принцип накладання (принцип наложения, superposition principle) – відгук кола на декілька дій дорівнює алгебраїчній сумі відгуків від кожної окремої дії. Принцип накладання (суперпозиції або незалежності дії), покладений до основи методу накладання. Метод накладання справедливий тільки для лінійних кіл.

Резонанс (резонанс, resonance) – явище в електричному колі, що має ділянки з індуктивним та ємнісними елементами, за якого різниця фаз напруги і струму на вході кола дорівнює нулю.

Резонансний контур (резонансный контур, resonance circuit) – електричне коло, в якому виникає явище резонансу (напруг чи струмів).

Смуга пропускання (полоса пропускания, bandwidth) – діапазон частот, у межах якого АЧХ зменшується не більше, ніж у задане число разів порівняно з максимальним значенням.

Стала часу кола (постоянная времени, time constant) – інтервал часу, за який напруга (струм) у колі з одним інерційним елементом (індуктивністю чи

ємністю) зменшуються за абсолютною величиною у вільному режимі в 2,718 рази.

Струм (ток, current) – впорядковане переміщення електричних зарядів.

Схема електричного кола (схема электрической цепи, electrical circuit diagram) – графічне зображення способу з'єднання пасивних і активних елементів кола. З'єднання елементів на схемі здійснюється ідеальними провідниками.

Фазочастотна характеристика, ФЧХ (фазочастотная характеристика, phase-frequency characteristic) – залежність від частоти аргумента комплексної передатної функції кола.

Частота (частота, frequency) – величина, обернена періоду періодичного процесу.

Навчальне видання

ЗАХАРОВ Ігор Петрович
МИЛЮТЧЕНКО Іван Олександрович

ОСНОВИ АНАЛІЗУ
ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Навчальний посібник
для студентів спеціальності

152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка»

Відповідальний випусковий	І.П. Захаров
Редактор	Б.П. Косіковська
Комп'ютерна верстка	Л.Д. Медведєва

План 2021 (друге півріччя), поз. 16

Підп. до друку 06.07.21

Формат 60x 84 ¹/₁₆.

Спосіб друку – ризографія.

Умов. друк. арк. 5,9.

Облік. вид. арк. 6,1.

Тираж 50 прим.

Ціна договірна.

ХНУРЕ. 61166, Харків, просп. Науки 14

Віддруковано в редакційно-видавничому відділі ХНУРЕ
61166, Харків, просп. Науки, 14