УДК 519.6 DOI: https://doi.org/10.30837/IYF.CVSAMM.2024.163

ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ В УЗАГАЛЬНЕННІЙ ФОРМУЛІ ДАЛАМБЕРА ДЛЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Білобородов А.А.
Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Першина Ю.І.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ,
м. Харків, Україна
e-mail: artem.biloborodov@nure.ua

This work addresses issues of interpolation of functions of two variables, which are reconstructed using the generalized D'Alembert formula proposed by O.M. Lytvyn [1–4]. The peculiarity of this formula is related to fact that it preserves the same class of differentiability to which the approximated function belongs. In construction of this operator, a system of parameters $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_N$ is used. This work overview method [5] of optimal selection of these parameters and shows several theorems about classes of functions that are precisely reconstructed by the generalized D'Alembert operator.

В даній роботі розглядаються метод [5] оптимального вибору параметрів в узагальненній формулі Даламбера, запропонованної О.М. Литвином [1–4] і розглянуто ряд теорем про класи функцій які точно відновлюються цим оператором. Розглянемо наступну теорему [1–4]:

Теорема 1. Хай $r, N \in \mathrm{N}$, $r > N$, $f(x,y) \in C^r(R^2)$, $\beta_i \left(i = \overline{0,N}\right)$ – задані числа, що не дорівнюють одне одному, $\beta_k \neq \beta_l$, $k \neq l$, $k,l = \overline{0,N}$. Тоді оператор:

$$D_{N,\beta} f(x,y) = \sum_{i=0}^{N} \lambda_{N0i} f(x+\beta_i y, 0) + \sum_{s=1}^{N} \sum_{i=0}^{N} \lambda_{Nsi} \int_{0}^{x+\beta_i y} f^{(0,s)}(t,0) \frac{(x+\beta_i y - t)^{s-1}}{(s-1)!} dt, \quad (1)$$

де числа λ_{Nsi} $(0 \leq s, i \leq N)$ є розв'язками $(N+1)$ – системи лінійних алгебричних рівнянь, відповідних значенням $0 \leq s \leq N$:

$$\sum_{i=0}^{N} \lambda_{Nsi} \beta_i^p = \delta_{p,s}, \; 0 \leq p \leq N, \quad (2)$$

має властивості:

$$D_{N,\beta} f(x,y) \in C^r(R^2), \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial^s D_{N,\beta} f(x,y)}{\partial y^s} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial^s f(x,y)}{\partial y^s} \right|_{y=0}, \; s = \overline{0,N}. \quad (4)$$

Можна побачити що твердження теореми 1 виконуються для довільних $\{\beta_i\}$, $i = \overline{0,N}$, які задовольняють вказаним вище умовам, тому актуальним є питання: як саме оптимально обирати параметри $\{\beta_i\}$. Наприклад з умови мінімуму похибки наближення $R_{N,\beta} f(x,y) = \left(I - D_{N,\beta}\right) f(x,y)$. Тобто можна сформулювати наступну оптимізаційну задачу: $\left\| R_{N,\beta} f(x,y) \right\|_{L_2} \to \min\limits_{\beta_i, i=\overline{0,N}}$.

Оператор (1) приведений у теоремі 1 автоматично зберігає клас диференційовності функції *f*. Тобто $f(x,y)\in C^r(R^2)\Rightarrow D_{N,\beta}f(x,y)\in C^r(R^2)$. При цьому залишок $R_{N,\beta}f(x,y)=(I-D_{N,\beta})f(x,y)$ має вигляд:

$$R_{N,\beta}f(x,y)=\int_0^y\left[\sum_{i=0}^{N}\Delta_{Ni}^{-1}\int_0^{x+\beta_i(y-z)}(A_{N+1,\beta}f)(t,z)\frac{(x+\beta_i(y-z)-t)^{N-1}}{(N-1)!}dt\right]dz, \quad (5)$$

де

$$(A_{N+1,\beta}f)(x,y)=\prod_{i=0}^{N}\left(-\beta_i\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y); \quad (6)$$

$$\Delta_{Ni}=\prod_{k=0,k\neq i}^{N}(\beta_i-\beta_k),\ 0\le s,i\le N.$$

Розглянемо питання оптимального вибору параметрів $\{\beta_i\}$, $i=\overline{0,N}$, з умови мінімуму похибки наближення $R_{N,\beta}f(x,y)$ (5). Далі наведено ряд теорем, запропонованих і доведених у [5].

Теорема 2. Нехай $\{\beta_k\}$, $0<\beta_0<\beta_1<...<\beta_N<\infty$, задана система чисел, а числа λ_{Nsi} це розв'язок $\sum_{i=0}^{N}\lambda_{Nsi}\beta_i^p=\delta_{p,s}$, $0\le s,p\le N$, тоді для системи чисел, $\beta_i=C\cdot\beta_i, i=\overline{0,N}$, $C>0$ числа $\lambda_{Nsi}=\lambda_{Nsi}C^{-s}$ будуть розв'язками системи (2).

Теорема 3. Нехай $r,N\in \mathrm{N}$, $r>N$, $f(x,y)\in C^r(R^2)$, $0<\beta_0<...<\beta_N<B<\infty$ – задана система чисел, а числа λ_{Nsi} це розв'язок системи (2), тоді оператор:

$$D_{N,\beta}f(x,y)=\sum_{i=0}^{N}\lambda_{N0i}f\left(x+\frac{\beta_i}{B}y,0\right)+\sum_{s=1}^{N}\sum_{i=0}^{N}\lambda_{Nsi}B^s\int_0^{x+\frac{\beta_i}{B}y}f^{(0,s)}(t,0)\frac{\left(x+\frac{\beta_i}{B}y-t\right)^{s-1}}{(s-1)!}dt$$

має властивості (3) та (4).

Теорема 4. Нехай $r,N\in \mathrm{N}$, $r>N$, $f(x,y)\in C^r(R^2)$, β_i $(i=\overline{0,N})$ $0<\beta_0<\beta_1<...<\beta_N<B<\infty$, задана система чисел, а числа λ_{Nsi} це розв'язок системи (2), тоді оператор:

$$D_{N,\beta}f(x,y)=\sum_{i=0}^{N}\lambda_{N0i}f(x+\beta_i y,0)+\sum_{s=1}^{N}\sum_{i=0}^{N}\lambda_{Nsi}\int_x^{x+\beta_i y}f^{(0,s)}(t,0)\frac{(x+\beta_i y-t)^{s-1}}{(s-1)!}dt$$

тотожньо дорівнює оператору (1) $D_{N,\beta}f(x,y)$.

З теорем 2 та 3 можна досягти вибору чисел $\{\beta_i\}$ в межах від 0 до 1. З теореми 4 випливає, що при побудові оператора $D_{N,\beta}f(x,y)$ є можливим змінювати область інтегрування. Все це має сенс у випадку наближеного обчислювання, таким чином зменшення області інтегрування може зменшити похибку.

Теорема 5. Якщо функція $f(x,y)\in C^r(R^2)$ має вигляд $f(x,y)=g(x+\alpha y)$, $g(t)\in C^r(R)$, $N<r$ то залишок оператору (1) $R_{N,\beta}f(x,y)=0$ при умові $\alpha\in\{\beta_i\}$. При чому $R_{N,\beta}f(x,y)$ матиме вигляд:

$$R_{N,\beta} f(x,y)=\prod_{i=0}^{N}(\alpha-\beta_i)\int_0^y\left(\sum_{i=0}^{N}\Delta_{Ni}^{-1}\int_x^{x+\beta_i(y-z)} g^{(N+1)}(t+\alpha z)\frac{\left(x+\beta_i(y-z)-t\right)^{N-1}}{(N-1)!}dt\right)dz.$$

Таким чином, в теоремі 5 стверджується, що для функцій виду $f(x,y)=g(x+\alpha y)$ узагальнена формула Даламбера точно наближує ці функції, якщо $\beta_k=\alpha$ при довільних не рівних один одному β_i, $i\neq k$, $i=\overline{0,N}$.

Теорема 6. Якщо наближувана функція $f(x,y)\in C^r(R^2)$ має вигляд

$$f(x,y)=\sum_{j=0}^{m}\varphi_j(x+\alpha_j y)+f(x,y),\quad \varphi_j(t)\in C^r(R),\quad f(x,y)\in C^r(R^2),\quad j=\overline{0,m},$$

$m<N<r$ то для залишку (5) узагальненого оператора Даламбера виконується рівність $R_{N,\beta} f(x,y)=R_{N,\beta} f(x,y)$ за умови, що $\alpha_j\in\{\beta_i\}$, $j=\overline{0,m}$, $i=\overline{0,N}$.

В теоремі 1 наведено оператор, який дозволяє отримати в результаті наближення функції які належать до того ж класу диференційовності, що і наближувана функція. З теорем 5, 6 випливає що функції виду $f(x,y)=g(x+\alpha y)$ наближуються точно при запропонованому виборі параметрів $\{\beta_i\}$. У загальнішому випадку $f(x,y)=\sum_{j=0}^{m}\varphi_j(x+\alpha_j y)+f(x,y)$, $m<N$ оптимальний вибір параметрів $\{\beta_i\}$ витікає з умови $\alpha_j\in\{\beta_i\}$, $j=\overline{0,m}$.

В загальному випадку знаходження параметрів $f(x,y)=\sum_{j=0}^{m}\varphi_j(x+\alpha_j y)+f(x,y)$ пропонується виконувати за допомогою мінімізації відповідної норми класичними методами оптимізації.

Список використаних джерел:

1. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Монографія Харків : Основа, 2002. – 544 с.

2. Литвин О. М. Методи обчислень. Додаткові розділи. Київ : Наукова думка, 2005. 331 с.

3. Сергієнко І. В., Литвин О. М., Литвин О. О., Ткаченко О. В., Грицай О. Л. Побудова та дослідження операторів ермітової інтерлінації функцій двох змінних на системі неперетинних ліній із збереженням класу диференційовності. *Проблеми машинобудування*. 2016. Т. 19, № 3. С. 60–68.

4. Сергієнко І. В., Литвин О. М., Литвин О. О., Ткаченко О. В., Грицай О. Л. Відновлення функцій двох змінних із збереженням класу $C^r(R^2)$ за допомогою їх слідів та слідів їх похідних до фіксованого порядку на заданій лінії. *Доповіді НАН України*. 2014. № 2. С. 50–55.

5. Сергієнко І. В., Литвин О. М., Литвин О. О., Ткаченко О. В., Білобородов А. А. Оптимізація параметрів в узагальненній формулі Даламбера для функцій двох змінних. *Кібернетика і системний аналіз*. 2021. Т. 57, № 4. С. 20–29.