УДК 519.6 DOI: https://doi.org/10.30837/IYF.CVSAMM.2024.173

ГІПЕРСИНГУЛЯРНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПРИ ЧИСЛОВОМУ МОДЕЛЮВАННІ РОЗВИНЕННЯ ТРІЩИН

Вєрушкін І.О.[1], Осипов І.М.[2]
Науковий керівник – д-р техн. наук, проф. Стрельнікова О.О.
[1]Інститут проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного НАНУ
м. Харків, Україна
[2]Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна,
м. Харків, Україна
e-mail: olena.strelnikova@nure.ua

This paper aims to develop advanced numerical methods for analyzing stress in structures containing crack-like defects. The innovative aspect of the proposed research lies in involving hypersingular integral equations to solve a benchmark test. The benchmark test employs both boundary and finite element methods. The investigation involves fatigue analysis under finite amplitude cyclic loading, revealing a significant increase in service life, ensuring successful transportation of the intact structure. However, placing a penny-shaped crack in the zone of maximum stresses results in a notable decrease in the expected service life before failure. For practical applications, short-distance transportation is deemed sufficient, as long-distance transport may induce fatigue crack propagation within the shell, leading to depressurization and eventual failure.

Для визначення напружено-деформованого стану пружного тіла використовується система рівнянь еліптичного типу в частинних похідних другого порядку відносно вектору переміщення $\mathbf{U}$:

$$\mu\Delta U_j + (\lambda+\mu)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j} = 0,\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2},\ \vartheta = \mathrm{div}\mathbf{U},\ j=1,2,3, \tag{1}$$

де μ та λ коефіцієнти Ламе.

Введемо диференціальний оператор поверхневого напруження класичної теорії пружності як:

$$\mathbf{T}^{\mathbf{n}(\mathbf{x})}\mathbf{U} = 2\mu\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial n} + \lambda\mathbf{n}\mathrm{div}\mathbf{U} + \mu(\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\mathbf{U}), \tag{2}$$

де $\mathbf{n}$ – одинична зовнішня нормаль до поверхні.

Сформульовано крайову задачу для тривимірного тіла, обмеженого областю Ω та ослабленого розрізами S_i (i=1,...,n), для визначення $\mathbf{U}$:

$$\Delta U_j + (\lambda+\mu)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j},\ j=1,2,3,\ U_i(\mathbf{x}) = u_{i1}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\Omega_1,\ \mathbf{T}^{\mathbf{n}(\mathbf{x})}\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\Omega_2, \tag{3}$$

$$(\mathbf{T}^{\mathbf{n}(\mathbf{x})}\mathbf{u}(\boldsymbol{x})\cdot\mathbf{n}(\boldsymbol{x})) = N_{3i},\ (\mathbf{T}^{\mathbf{n}(\mathbf{x})}\mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\tau}_k(\mathbf{x})) = N_{ki},\ \mathbf{x}\in\Omega_2,\ i=1,2.$$

Розв’язання крайової задачі (3) може бути знайдено за допомогою різних числових методів. Серед них варто відзначити методи скінчених [1] та граничних елементів (МГЕ) [2]; обидва засновані на використанні методу зважених похибок. Далі використано формулювання на основі методу граничних елементів. Однією з ключових особливостей цього методу є використання сингулярних пробних функцій, які задовольняють диференціальне рівняння (1) всюди, за винятком однієї сингулярної точки. Таким чином, фундаментальні та сингулярні розв'язки рівняння (1) використовуються як пробні функції. Фундаментальний розв'язок теорії пружності отримується при розв'язанні рівняння (1) з правою частиною у вигляді дельта-функції і подається в матричній формі:

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\left[\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} + \frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}\right]. \tag{4}$$

З використанням подання (4) у разі ізольованої кругової тріщини отримано гіперсингулярне інтегральне рівняння у вигляді [1]:

$$\frac{1}{4\pi}\iint_s \frac{\alpha_3(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}dS_y = Mq(\mathbf{x}),\ M = \frac{1-\nu}{\mu}, \tag{5}$$

де $q(\mathbf{x})$ – функція, що характеризує зовнішнє навантаження, ν – коефіцієнт Пуассона. Рівняння (5) розглядалось для тріщини у вигляді кола радіусом R при однорідному розтягуванні σ. Таким чином, $q(\mathbf{x})=\sigma$. Область інтегрування S розділена на N плоских трикутних та чотирикутних елементів. Розглянуто гіперсингулярний інтеграл по апроксимованій поверхні і отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^{N} H_{kj}\alpha_{3k} = f(\mathbf{x}_{0j}),\ j=1,2,...,N, \tag{6}$$

де елементи матриці H_{kj} обчислюються за формулами:

$$H_{kj} = \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{([\mathbf{l}_i\times\mathbf{r}_i]\cdot\mathbf{n})}{\left|[l_i\times r_i]\right|^2}\left[\frac{(l_i\cdot r_{i+1})}{r_{i+1}} - \frac{(l_i\cdot r_i)}{r_i}\right]\cdot\mathbf{r}_k = (x_k-x_0, y_k-y_0, z_k-z_0),$$

$$\mathbf{l}_i = (x_{i+1}-x_i, y_{i+1}-y_i, z_{i+1}-z_i),\ i=\overline{1,m},$$

$$\mathbf{n} = (n_1,n_2,n_3),\ x_{m+1}=x_1,\ y_{m+1}=y_1,\ z_{m+1}=z_1,\ r_k=|\mathbf{r}_k|.$$

Оскільки область у рівнянні (5) є колом, то двовимірне гіперсингулярне рівняння зводиться до одновимірного [2]. Застосовується циліндрична система координат, тому $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ x_0=\rho_0\cos\varphi_0,\ y_0=\rho_0\sin\theta_0$. Введемо позначення: $a=\rho^2+\rho_0^2+(z-z_0)^2$, $b=2\rho\rho_0$ і отримаємо одновимірне гіперсингулярне інтегральне рівняння. Числову реалізацію цього рівняння зроблено методами [3,4]. Для тріщини у формі круга радіусом R, яка знаходиться під дією навантаження σ, використовується МГЕ, при цьому тріщина розглядається в необмеженому тривимірному просторі. Таким чином, виникає два варіанти розв'язання задачі із гіперсингулярними інтегральними рівняннями. Перший варіант пов'язаний з двовимірним інтегральним рівнянням (5), тоді як другий стосується аксіально-симетричного формулювання [4]. При числових симуляціях вибрані значення R=0.005 м і σ=1 МПа. Загальна кількість плоских трикутних та чотирикутних елементів складала при використанні рівняння (5) складала N=9284. Сегмент

[0, π] був поділений на N_1=100 одновимірних граничних елементів. Аналітичний розв'язок рівняння аксіально-симетричної задачі отриманий в [4] як $\alpha_3(\rho) = 4\sqrt{R^2 - \rho^2}/\pi$.

Найважливішими параметрами руйнування є коефіцієнти інтенсивності напружень. У розглянутому випадку потрібен лише коефіцієнт K_I, щоб адекватно описати деформований стан в околі тріщини, його аналітичний вираз для кругової тріщини радіусом R під дією навантаження σ має вигляд $K_I = 2\sigma\sqrt{\pi R}/\pi$. У табл. 1 надано порівняння аналітичних та числових результатів, отриманих різними методами для різних полярних кутів φ. Сітка скінчених елементів складалась з 43674 елементів.

Таблиця 1 – Порівняння числових та аналітичних результатів

φ	Аналітичне значення	Двовимірне рівняння	Одновимірне рівняння	МСЕ
10	1.12827	1.13217	1.12988	1.14217
30	1.12827	1.12945	1.12837	1.14207
50	1.12827	1.12876	1.12830	1.14204
70	1.12827	1.12842	1.12828	1.14203
90	1.12827	1.12830	1.12828	1.14200

Результати, подані в табл. 1, свідчать про точність і надійність методів скінченних та граничних елементів, що надалі будуть використані при аналізі можливості руйнування паливних баків з початковими мікродефектами при транспортуванні.

Список використаних джерел:

1. K.V. Avramov, E.A. Strelnikova. "Chaotic vibrations of plates two-sided interacting with flux of moving fluid", Int. Appl. Mech, Vol. 50, P. 329–335, 2014.

2. O. Sierikova, E. Strelnikova, V. Gnitko, K Degtyarev, "Boundary Calculation Models for Elastic Properties Clarification of Three-dimensional Nanocomposites Based on the Combination of Finite and Boundary Element Methods", IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), P. 351–356, 2021.DOI: 10.1109/KhPIWeek53812.2021.9570086

3. С.М. Ламтюгова, А.О. Поляков, М.В. Сидоров, "Конструктивне дослідження методами двосторонніх наближень крайових задач для напівлінійних еліптичних рівнянь другого порядку", Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, № 1, 2023, 142–148 DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.21

4. A. Karaiev, E. Strelnikova, "Axisymmetric polyharmonic spline approximation in the dual reciprocity method". Z Angew Math Mech. 101, e201800339, 2021, DOI:10.1002/zamm.201800339.