

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ БЕЗПІЛОТНИХ АПАРАТІВ  
У ТРИВИМІРНОМУ ПРОСТОРИ**

Гончаренко В.Д.

Науковий керівник – канд. техн. наук, доц. Єсілевський В.С.  
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ,  
м. Харків, Україна  
e-mail: vadym.honcharenko@nure.ua

This work is devoted to describing major mathematical models of UAV and UUV. Utilizing differential equations and state-space representations, enables the design and testing of new models and algorithms without the need for real prototypes. Models often incorporate assumptions of rigid body dynamics and are based on Newton's 2nd law, conservation of momentum. With the Euler-Lagrange and Newton-Euler models being particularly prevalent for describing the dynamics of these systems in terms of linear and angular components.

У сучасних умовах все більшу кількість завдань та робіт виконують за допомогою автономних або віддалено керованих систем. В останні десятиріччя безпілотні літальні та підводні апарати розвиваються стрімкими кроками, вони використовуються в різних сферах: моніторингу інфраструктурних об'єктів, таких як ЛЕП, дороги, мости; картографуванні міської забудови, будинків, споруд, морського дна; обстеженні складно доступних місць, таких як ємності з хімічними речовинами, трубопроводи; в природоохоронному, поліцейському та військовому моніторингу територій.

Для опису математичних моделей зазвичай використовують дві еквівалентних форми вираження моделі:

- 1) диференційних рівнянь, яка зазвичай використовується для формальної та теоретичної роботи у фізиці та математиці;
- 2) у простір станів, що широко використовується у теорії керування та інших аплікаціях, що використовують чисельні методи розв'язання задач.

Важливою частиною таких моделей є вибір систем відліку (просторових координат), найбільш широко використовуваними в таких моделях є геодезичні координати Earth-Centred Earth-Fixed (ECEF), які прив'язані до Землі; та система відліку об'єкта (body frame of reference), які прив'язані до самого об'єкта моделювання.

Таким чином об'єкт описується так званими генералізованими координатами  $\gamma$ , які складаються з 3-х координат простору, свого положення відносно Землі –  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , 3-х кутів повороту відносно себе  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  (рискання, тангаж, крен) та  $\theta_i$  – значеннями, що відповідають за показники рушія.

Моделі базуються на декількох базових поняттях:

1. Об'єкт вважається абсолютно твердим тілом, тобто відстань між будь якими двома точками незмінна з часом.
2. Маса об'єкта незмінна в часі.

3. Розподіл маси по об'єкту є незмінним.

Найбільш популярними моделями є моделі збереження моменту, Ейлера – Лагранжа та Ньютона – Ейлера. Вони базуються на законі збереження імпульсу та другому законі Ньютона:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F}_e + \vec{F}_T, \quad (1)$$

де  $m$  – маса об'єкту,  $v$  – вектор швидкості,  $g$  – прискорення вільного падіння,  $F_e$  – зовнішні сили, такі як аеро- та гідродинамічні та статичні,  $F_T$  – сили, що продукуються рушієм об'єкта.

Наведемо найбільш просту та використовувану модель збереження моменту, яка описує систему у координатах об'єкта та розділяється на дві частини:

1) лінійну:

$$m \begin{pmatrix} \dot{v}_x + v_z \dot{\theta} - v_y \dot{\psi} \\ \dot{v}_y + v_x \dot{\psi} - v_z \dot{\phi} \\ \dot{v}_z + v_y \dot{\phi} - v_x \dot{\theta} \end{pmatrix} = m\vec{g} + \vec{F}_e + \vec{F}_T; \quad (2)$$

2) кутову:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} I_{xx} - \dot{\psi} I_{xz} - \phi \theta I_{xz} + \theta \psi (I_{zz} - I_{yy}) &= J_{xe} + J_{xT}; \\ \dot{\theta} I_{yy} + \theta \psi (I_{xx} - I_{zz}) + (\phi^2 - \psi^2) I_{xz} &= J_{ye} + J_{yT}; \\ \dot{\psi} I_{zz} - \dot{\phi} I_{xz} + \phi \theta (I_{yy} - I_{xx}) + \theta \psi I_{xz} &= J_{ze} + J_{zT}, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $I$  – матриця інерції об'єкту, з відповідними значеннями по осях;  $J$  – моменти по осях, де другий індекс позначає походження моменту:  $e$  – зовнішніх сил (аеро-, гідродинамічних),  $T$  – ті що виникають через дію рушія об'єкту.

Список використаних джерел:

1. Muraleedharan, Narendran, et al. Modelling and simulation of UAV systems. Imaging and Sensing for Unmanned Aircraft Systems. Volume 1: Control and Performance, 2020, 101–121.

2. Poole, R. J. Aircraft Dynamics: From Modeling to Simulation, MR Napolitano, John Wiley and Sons, The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex, PO19 8SQ, UK. 2012. 706pp. Illustrated. £ 49.99. ISBN 978-0-470-62667-2. The Aeronautical Journal, 2012, 116.1180: 680-680.

3. Yesilevskiy, V. et al. V. "LSTM networks for anaerobic digester control" / Scientific Bulletin of National Mining University, 2019, Issue 5, p. 130. DOI: 10.29202/nvngu/2019-5/21.