УДК 519.63 DOI: https://doi.org/10.30837/IYF.CVSAMM.2024.203

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ САМОЗАЙМАННЯ У ПІВКРУЗІ МЕТОДАМИ РОТЕ ТА ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ

Калініченко А.С.
Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ,
e-mail: anatolii.kalinichenko@nure.ua

This work is devoted to the use of the Rothe's method in combination with the method of two-sided approximations based on the use of the Green's function to solve the 2D initial-boundary value problem for the semilinear equation of thermal conductivity in half-circular domain. The power of the internal heat source is approximated by exponential dependence.

Моделювання процесів самозаймання у насипові матеріалу (вугілля, бавовни), переріз якого має форму півкола (рис. 1), приводить до розгляду початково-крайової задачі для функції зміни температури:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\Delta u + Be^{u},\ \mathbf{x} \in \Omega,\ t \in (0, t_0], \tag{1}$$

$$u(\mathbf{x}, t) > 0,\ \mathbf{x} \in \Omega,\ t \in (0, t_0], \tag{2}$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = 0,\ \mathbf{x} \in \overline{\Omega}, \tag{3}$$

$$u(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ на } \partial\Omega,\ t \in [0, t_0], \tag{4}$$

де Δ – оператор Лапласа, $A > 0$, $B > 0$ – параметри, що задають фізико-хімічні властивості процесу, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \le 2, x_2 \ge 0\}$ – півкруг радіуса $\sqrt{2}$, t_0 – час моделювання. Останній доданок в правій частині рівняння (1) позначає тепло, що виділяється при хімічній екзотермичній реакції окиснення матеріалу, отриманий апроксимацією з закону Арреніуса [3], при сталих A і B.

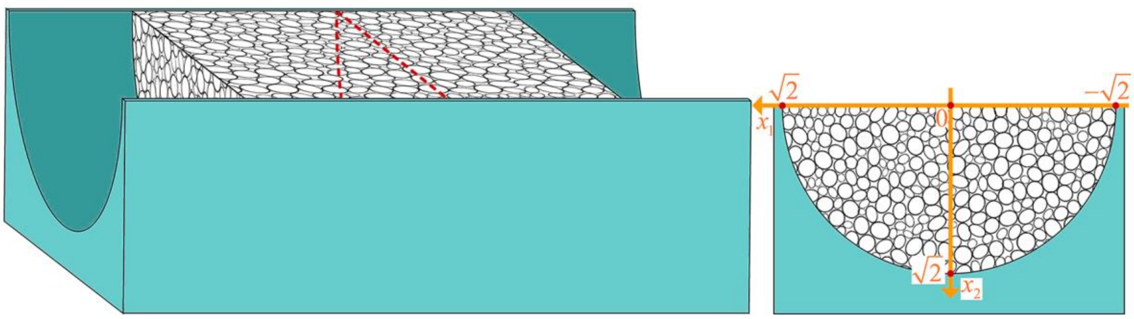

Рисунок 1 – Зображення насипу вугілля циліндричної форми та його перерізу, що описується областю Ω

Введемо на $[0, t_0]$ сітку з кроком τ $t_j = j\tau,\ j = 0, 1, 2, \ldots, m,\ m\tau = t_0$ та позначимо $U_j = U_j(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, t_j)$. Згідно з методом Роте розв'язок задачі (1)–(4) шукатимемо вздовж прямих $t = \text{const}$. Для цього на кожній прямій $t = t_j$ апроксимуємо похідну за часом відношенням скінченних різниць, що дозволяє перейти до послідовності крайових задач: $U_0(\mathbf{x})=0$,

$$-\Delta U_j+\frac{1}{A\tau}U_j=\frac{1}{A\tau}U_{j-1}+\frac{B}{A}e^{U_j},\ \mathbf{x}\in\Omega, \tag{5}$$

$$U_j(\mathbf{x})>0,\ \mathbf{x}\in\Omega, \tag{6}$$

$$U_j(\mathbf{x})=0 \text{ на } \partial\Omega,\ j=1,2,\ldots,m, \tag{7}$$

для знаходження наближеного розв'язку кожної з яких застосуємо метод двобічних наближень [2]. Для півкруга радіуса $\sqrt{2}$ функція Гріна крайової задачі (5)–(7) має вигляд:

$$G(r,\varphi,\rho,\psi)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{J_n\left(\dfrac{r\mu_{np}}{2}\right)J_n\left(\dfrac{\rho\mu_{np}}{2}\right)\sin n\varphi\sin n\psi}{[J_n'(\mu_{np})]^2\left(\mu_{np}^2+\dfrac{2}{A\tau}\right)},$$

де $J_n(\mu)$ – функція Бесселя, μ_{np} – p-й додатний корінь $J_n(\mu)=0$, декартові координати точок $\mathbf{x}$ і $\mathbf{s}$ пов'язані з полярними як $x_1=r\cos\varphi$, $x_2=r\sin\varphi$, $s_1=\rho\cos\psi$, $s_2=\rho\sin\psi$.

Надалі вважатимемо j фіксованим. Оскільки при знаходженні функції U_j уже відома функція U_{j-1}, то крайова задача (5)–(7) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна:

$$U_j(\mathbf{x})=\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\left(\frac{1}{A\tau}U_{j-1}(\mathbf{s})+\frac{B}{A}e^{U_j(\mathbf{s})}\right)d\mathbf{s},$$

яке далі розглянемо у банаховому просторі $C(\bar\Omega)$ функцій, неперервних у $\bar\Omega$, з конусом невід'ємних функцій $\mathcal{K}_+=\{u\in C(\bar\Omega):u(\mathbf{x})\geq 0,\ \mathbf{x}\in\bar\Omega\}$.

На j-му часовому шарі інваріантний конусний відрізок шукатимемо у вигляді $<0,\beta_j>$, де число $\beta_j>0$ визначається з нерівності:

$$\frac{1}{A\tau}\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})U_{j-1}(\mathbf{s})d\mathbf{s}+\frac{B}{A}e^{\beta}\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})d\mathbf{s}\leq\beta \text{ для всіх } \mathbf{x}\in\bar\Omega.$$

Отже, ітераційний процес методу двобічних наближень матиме вигляд:

$$v^{(k)}(\mathbf{x})=\frac{1}{A\tau}\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})U_{j-1}(\mathbf{s})d\mathbf{s}+\frac{B}{A}\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})e^{v^{(k-1)}(\mathbf{s})}d\mathbf{s},\ k=1,2,\ldots,$$

$$w^{(k)}(\mathbf{x})=\frac{1}{A\tau}\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})U_{j-1}(\mathbf{s})d\mathbf{s}+\frac{B}{A}\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})e^{w^{(k-1)}(\mathbf{s})}d\mathbf{s},\ k=1,2,\ldots,$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x})=0,\quad w^{(0)}(\mathbf{x})=\beta_j.$$

За наближений розв'язок вихідної задачі (1)–(4) на j-му часовому шарі на k-й ітерації з точністю $\varepsilon>0$ приймаємо функцію

$$U_j^{(k)}(\mathbf{x})=\frac{w^{(k)}(\mathbf{x})+v^{(k)}(\mathbf{x})}{2}$$

при виконанні умови

$$\max_{\mathbf{x}\in\Omega}\left(w^{(k)}(\mathbf{x})-v^{(k)}(\mathbf{x})\right)<2\varepsilon.$$

Застосовуючи до крайових задач методу Роте (5)–(7) на кожному часовому шарі запропонований ітераційний процес методу двобічних наближень, отримаємо набір функцій:

$$U_0(\mathbf{x}) = 0, U_1^{(k_1)}(\mathbf{x}), U_2^{(k_2)}(\mathbf{x}), \ldots, U_m^{(k_m)}(\mathbf{x}),$$

за яким за допомогою апарату теорії інтерлінації [1] можна побудувати наближений розв'язок $u_m(\mathbf{x}, t)$, неперервний по часовій координаті.

Графіки наближень $U_j(\mathbf{x})$, $j = \overline{0,3}$, задачі (1)–(4) при $A = 1$, $B = 1{,}25$, $t_0 = 1$, $\tau = 1/3$, отриманих запропонованими методами, зображено на рис. 2.

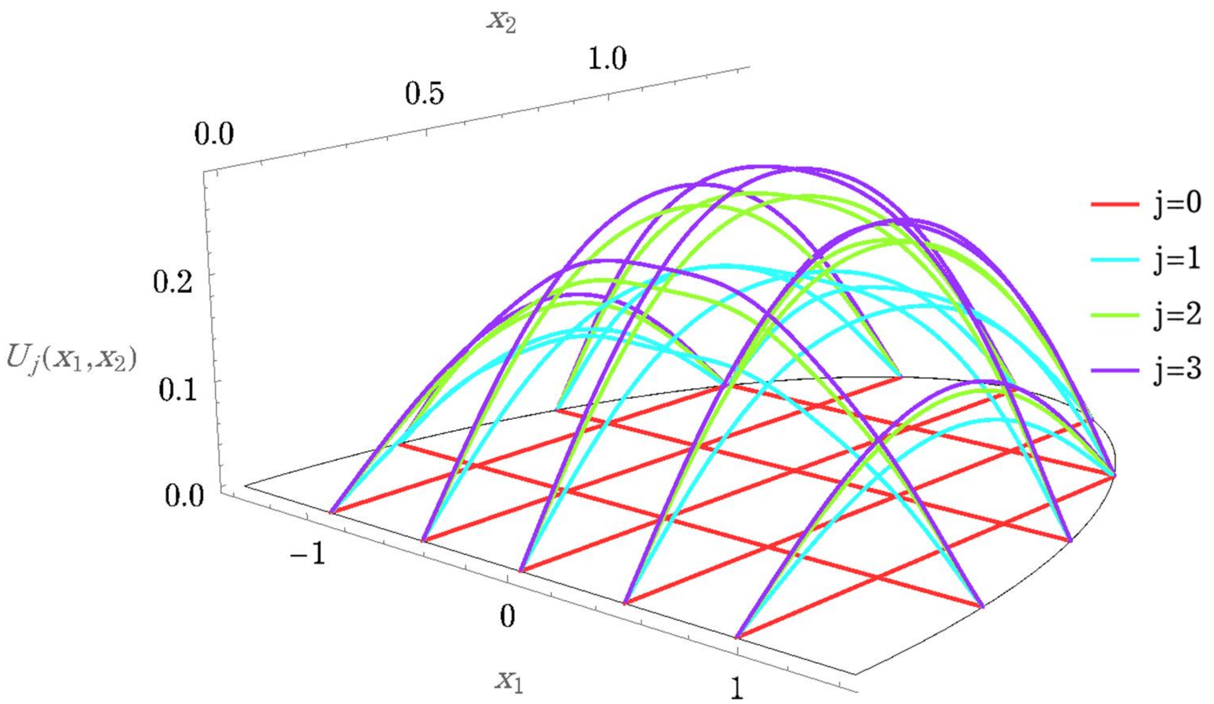

Рисунок 2 – Графіки наближених розв'язків $U_j(\mathbf{x})$ до розв'язку задачі (1)–(4) на часових шарах $t = \tau j$, $j = 0, 1, 2, 3$

Список використаних джерел:

1. Литвин О. М. Інтерлінація та інтерфлетація функцій і структурний метод В.Л. Рвачова. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2007. Т. 50, № 4. С. 61–82.

2. Сидоров М. В. Метод Роте у комбінації з методом двобічних наближень розв'язання початково-крайових задач для напівлінійного рівняння теплопровідності. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2018. № 1. С. 108–127.

3. Франк-Каменецкий Д. А. Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. Долгопрудный : Издательский Дом «Интеллект», 2008. 408 с.