УДК 519.63 : 532.5 DOI: https://doi.org/10.30837/IYF.CVSAMM.2024.264

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ТЕЧІЙ СТРУКТУРНИМ МЕТОДОМ R-ФУНКЦІЙ

Подгорний О.Р.
Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ,
м. Харків, Україна
e-mail: oleksii.podhornyi1@nure.ua

The problem of the stationary porous media flow theory in an isotropic inhomogeneous media is considered in the assumption that the Darcy law is fulfilled. The mathematical model of this problem is the elliptic equation for the stream function, supplemented by second kind boundary conditions at the reservoir boundaries, and the first kind boundary conditions in regions that are impenetrable to the liquid.

The structural-variational method (the R-functions method) is proposed to be used for numerical analysis and that will allow taking into account all the geometric and analytical information from the problem statement most fully.

Фільтраційною течією називається просочування у пористому середовищі рідин, нафти та газу, газованої [2]. До розгляду таких течій приводять процеси осушення і зрошення, втікання морської води в прісну, обтікання гідротехнічних споруд, просочування води крізь земляні дамби тощо. Отже, розробка нових та вдосконалення існуючих методів чисельного аналізу фільтраційних течій є актуальною науковою задачею.

Розглянемо стаціонарну задачу напірної фільтрації [1]. Нехай маємо фільтраційний потік води, схема якого наведена на рис. 1.

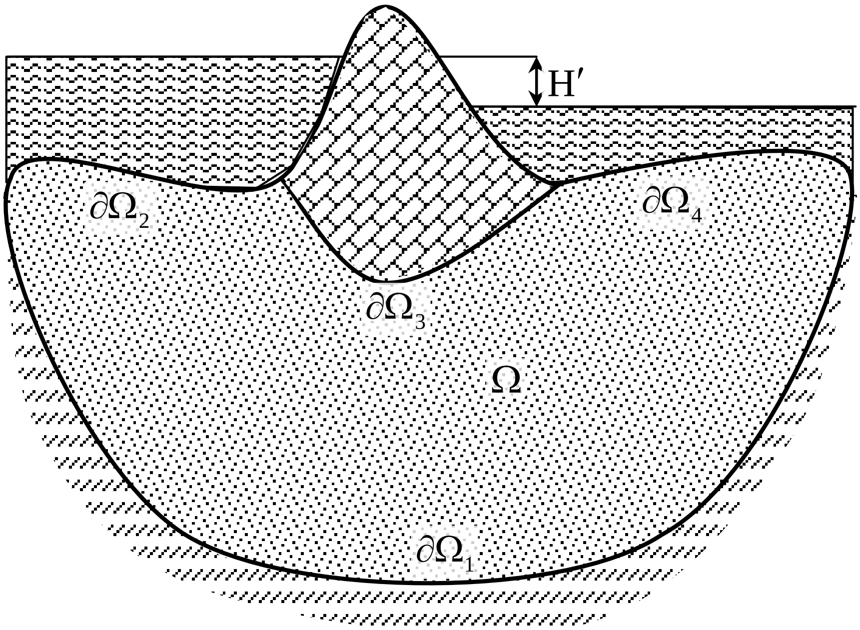

Рисунок 1 – Схема фільтраційного потоку води

На рис. 1 область фільтрації Ω обмежена непроникними межами $\partial\Omega_1$ і $\partial\Omega_3$ (вони є лініями течії) та двома межами водойми $\partial\Omega_2$ і $\partial\Omega_4$ (вони є потенціальними лініями). Позначимо $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ вектор швидкості фільтраційного потоку. Вважатимемо, що виконується закон Дарсі. Це означає, що втрати напору при фільтрації пропорційні швидкості фільтрації.

Уводячи у розгляд за допомогою співвідношень

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y},\ v_x = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (1)$$

функцію течії ψ, отримаємо таку задачі:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0 \text{ у } \Omega, \qquad (2)$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega_1} = 0,\ \psi\big|_{\partial\Omega_3} = Q, \qquad (3)$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_2} = 0,\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_4} = 0, \qquad (4)$$

де $\kappa = \kappa(x, y)$ – коефіцієнт фільтрації, $\mathbf{n}$ – зовнішня нормаль до відповідних ділянок межі, H' – діючий напір, Q – повни витрати рідини, які є заздалегідь невідомими і визначаються інтегральним співвідношенням

$$\int_{\partial\Omega_3} \frac{1}{\kappa}\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} ds = -H'. \qquad (5)$$

Розглянемо допоміжну задачу

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \text{ у } \Omega, \qquad (6)$$

$$u\big|_{\partial\Omega_1} = 0,\ u\big|_{\partial\Omega_3} = 1, \qquad (7)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_2} = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_4} = 0. \qquad (8)$$

Зрозуміло, якщо u^* – розв’язок задачі (6) – (8), то функція $\psi^* = Q^* u^*$, де відповідно до (5)

$$Q^* = -H' \cdot \left(\int_{\partial\Omega_3} \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial\mathbf{n}} ds \right)^{-1},$$

є розв’язком вихідної задачі (2) – (4).

Нехай функції $\omega(x, y)$, $\omega_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3, 4$, побудовані користуючись конструктивним апаратом теорії R-функцій [3] є такими, що:

$$\omega(x, y) = 0 \text{ на } \partial\Omega;\ \ \omega(x, y) > 0 \text{ у } \Omega;\ \ \left.\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = -1,$$

$$\omega_i(x, y) = 0 \text{ на } \partial\Omega_i;\ \ \omega(x, y) > 0 \text{ у } \Omega \cup (\partial\Omega \setminus \partial\Omega_i);$$

$$\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_i} = -1,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

У [1, 4] було доведено, що жмуток функцій

$$u = f - \frac{\omega_{1-3}\omega_{2-4}}{\omega_{1-3} + \omega_{2-4}} D_1^{(2-4)} f + \omega_{1-3}\Phi - \frac{\omega_{1-3}\omega_{2-4}}{\omega_{1-3} + \omega_{2-4}} D_1^{(2-4)}(\omega_{1-3}\Phi), \qquad (9)$$

де $\Phi = \Phi(x, y)$ – невизначена компонента, а

$$f(x, y) = \frac{\omega_1(x, y)}{\omega_1(x, y) + \omega_3(x, y)},$$

$$D_1^{(2-4)} g = \frac{\partial\omega_{2-4}}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial\omega_{2-4}}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y},$$

$$\omega_{2-4}(x, y) = \omega_2(x, y) \wedge_\alpha \omega_4(x, y),$$

$$\omega_{1-3}(x, y) = \omega_1(x, y) \wedge_\alpha \omega_3(x, y),$$

є структурою розв’язку крайової задачі (6) – (8), тобто при будь-якому виборі невизначеної компоненти Φ функція вигляду (9) точно задовольняє крайові умови (7), (8).

Для апроксимації невизначеної компоненти Φ структури скористаємося методом Рітца. Обчислювальний експеримент було проведено для тестових значень параметрів і для задачі, точний розв’язок якої був відомим. Зокрема, для обчислювального експерименту було обрано такі коефіцієнти фільтрації:

$$\kappa_0 = 0{,}391,\ \kappa_1 = 1{,}593e^{2y},\ \kappa_2 = 0{,}811\,\mathrm{ch}^{-2}\, y.$$

При цьому у ґрунтах з коефіцієнтами фільтрації, які зменшуються з глибиною, напір більше на понур і менше на підошву флютбету, ніж в однорідному ґрунті. При цьому, чим швидше зменшується коефіцієнт фільтрації з глибиною, тим більший перерозподіл тиску відбувається між понурою та підошвою флютбету.

Список використаних джерел:

1. Подгорний О.Р. Математичні моделі фільтраційних течій та застосування методу *R*-функцій для їх чисельного аналізу. *Радіоелектроніка та інформатика*. 2018. № 1. С. 40 – 47.

2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Москва : Наука, 1977. 664 с.

3. Рвачев В.Л. Теория *R*-функций и некоторые её приложения. Киев : Наукова думка, 1982. 552 с.

4. Сидоров М. В., Стороженко А. В. Математическое компьютерное моделирование некоторых фильтрационных течений. *Радиоэлектроника и информатика*. 2004. № 4. С. 58 – 61.