УДК 519.63 DOI: https://doi.org/10.30837/IYF.CVSAMM.2024.284

# МЕТОД R-ФУНКЦІЙ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕМІШУВАННЯ

Стаднікова Г.В.
Науковий керівник – канд. техн. наук, доц. Гибкіна Н.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ,
м. Харків, Україна
e-mail: hanna.stadnikova@nure.ua

The problem of mixing of a viscous liquid in multiply connected two-dimensional domain was considered. The approximate approach based on the Ritz method and the R-functions method was suggested to solve this problem.

Проблема чисельного аналізу математичних моделей перемішування в’язких рідин часто зустрічають в хімічній, фармацевтичній, харчовій промисловостях, а також в інших прикладних областях. Крім того, змішування рідин є фундаментальною науковою проблемою, тісно пов’язаною з сучасними концепціями хаотичної та регулярної динаміки. У той же час, більшість методів, що застосовуються в чисельному аналізі математичних моделей таких процесів, не мають властивості універсальності, й їх важко застосовувати для «непримітивних» областей.

Розглянемо в області $\Omega$ плоску квазістаціонарну течію в’язкої нестисливої рідини. Нехай область $\Omega$ є двозв’язною та її межа $\partial\Omega$ складається з зовнішнього контуру $\partial\Omega_0$ та внутрішнього контуру $\partial\Omega_1$; $\partial\Omega = \partial\Omega_0 \bigcup \partial\Omega_1$, до того ж $\partial\Omega_0 \bigcap \partial\Omega_1 = \varnothing$. Вважатимемо, що межа $\partial\Omega$ тверда, а течія в області викликана почережним рухом зовнішньої й внутрішньої меж зі сталими швидкостями.

Розв’язання першої частини задачі перемішування полягає в отриманні поля швидкостей $(v_x, v_y)$ в області течії $\Omega$. Вважатимемо, що розглядувана течія є повзучою та нелінійними доданками у рівняннях Навьє-Стокса можна знехтувати, тобто можна обмежитись розглядом наближення Стокса. Течію описуватимемо за допомогою функції течії $\psi(x, y, t)$, яку вводять у розгляд співвідношеннями

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y},\ v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Для функції течії $\psi(x, y, t)$ можна поставити таку крайову задачу:

$$\Delta^2\psi = 0 \text{ у } \Omega,$$

$$\psi\Big|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \psi\Big|_{\partial\Omega_1} = c(t), \quad \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\Bigg|_{\partial\Omega} = \begin{cases} g_0(t) & \text{на } \partial\Omega_0, \\ g_1(t) & \text{на } \partial\Omega_1, \end{cases} \tag{1}$$

де $c(t)$ –деяка невідома наперед функція часу $t$, $\mathbf{n}$ – зовнішня нормаль до $\partial\Omega$, $\Delta^2$ – бігармонічний оператор.

Функції $g_0(t)$ і $g_1(t)$ задаються, виходячи з заданих швидкостей рідини на $\partial\Omega_0$ та $\partial\Omega_1$ відповідно.

Функцію $c(t)$ можна знайти з умови однозначності тиску, що має вигляд

$$\int\limits_{\partial\Omega_1} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial\mathbf{n}}\,ds = 0, \qquad (2)$$

де $\Delta$ – оператор Лапласа.

Для розв’язання задачі (1), (2) скористаємось принципом суперпозиції, методами R-функцій та Рітца [1 – 3]. Розв’язок задачі (1), (2) подамо у вигляді

$$\psi(x,y,t) = \psi_0(x,y,t) + c(t)\cdot\psi_1(x,y), \qquad (3)$$

де $\psi_0(x,y,t)$ – розв’язок задачі

$$\Delta^2\psi_0 = 0 \text{ у } \Omega,$$
$$\psi_0\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left.\frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = \begin{cases} g_0(t) & \text{на } \partial\Omega_0, \\ g_1(t) & \text{на } \partial\Omega_1, \end{cases} \qquad (4)$$

а $\psi_1(x,y)$ – розв’язок задачі

$$\Delta^2\psi_1 = 0 \text{ у } \Omega,$$
$$\psi_1\big|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \psi_1\big|_{\partial\Omega_1} = 1, \quad \left.\frac{\partial\psi_1}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (5)$$

Розв’язання задачі (4) також зведемо до розв’язання двох стаціонарних задач. Подамо функцію $\psi_0(x,y,t)$ у вигляді

$$\psi_0(x,y,t) = g_0(t)u(x,y) + g_1(t)v(x,y), \qquad (7)$$

де $u(x,y)$ – розв’язок задачі

$$\Delta^2 u = 0 \text{ в } \Omega,$$
$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = \begin{cases} 1 & \text{на } \partial\Omega_0, \\ 0 & \text{на } \partial\Omega_1, \end{cases} \qquad (8)$$

а $v(x,y)$ – розв’язок задачі

$$\Delta^2 v = 0 \text{ в } \Omega,$$
$$v\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = \begin{cases} 0 & \text{на } \partial\Omega_0, \\ 1 & \text{на } \partial\Omega_1. \end{cases} \qquad (9)$$

Тоді, підставляючи спочатку (7) у (3), а потім у (2), отримаємо, що

$$c(t) = -g_0(t)\frac{\int\limits_{\partial\Omega_1}\frac{\partial\Delta u}{\partial\mathbf{n}}\,ds}{\int\limits_{\partial\Omega_1}\frac{\partial\Delta\psi_1}{\partial\mathbf{n}}\,ds} - g_1(t)\frac{\int\limits_{\partial\Omega_1}\frac{\partial\Delta v}{\partial\mathbf{n}}\,ds}{\int\limits_{\partial\Omega_1}\frac{\partial\Delta\psi_1}{\partial\mathbf{n}}\,ds}.$$

Відповідно до методу *R*-функцій було побудовано структури розв'язків крайових задач (5), (8) і (9). Нехай $\omega(x,y)=0$, $\omega_0(x,y)=0$, $\omega_1(x,y)=0$ – нормалізовані рівняння $\partial\Omega$, $\partial\Omega_0$, $\partial\Omega_1$ відповідно. Тоді структура розв'язку задачі (8) має вигляд $u=-\omega\dfrac{\omega_1}{\omega_0+\omega_1}+\omega^2\Phi_1$, структура розв'язку задачі (9) має вигляд $v=-\omega\dfrac{\omega_0}{\omega_0+\omega_1}+\omega^2\Phi_2$ а структура розв'язку задачі (5) має вигляд $\psi_1=\dfrac{\omega_0}{\omega_0+\omega_1}-\omega D_1\left(\dfrac{\omega_0}{\omega_0+\omega_1}\right)+\omega^2\Phi_3$. Тут $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$ – невизначені компоненти, а оператор $D_1$ визначається рівністю $D_1=\dfrac{\partial\omega}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{\partial\omega}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Для апроксимації невизначених компонент в структурних формулах можна скористатися методом Рітца.

Для розв'язання другої частини задачі перемішування складено й розв'язано (з використанням чисельних методів розв'язання задачі Коші) систему рівнянь руху лагранжевої частинки:

$$\frac{dx}{dt}=v_x\equiv\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{dy}{dt}=v_y\equiv-\frac{\partial\psi}{\partial x},$$
$$x(0)=x_0,\ y(0)=y_0. \tag{10}$$

Далі отримані траєкторії руху досліджують з точки зору наявності й характеру хаотичної поведінки за допомогою методів нелінійної динаміки (розшукують й аналізують стаціонарні точки, будують фазові портрети, досліджують еволюції лінійного й плоского елементів).

Таким чином, якісний аналіз системи (10) дозволяє виділити зони ефективного перемішування, що ілюструється результатами обчислювального експерименту.


Список використаних джерел:

1. Рвачёв В. Л. Теория *R*-функций и некоторые её приложения. Киев : Наукова думка, 1982. 552 с.

2. Стадникова А. В. Метод численного анализа квазистационарных процессов перемешивания в многосвязных областях. *Радиоэлектроника и информатика*. 2014. № 1 (64). С. 31 – 34.

3. Gybkina N. V., Sidorov M. V., Stadnikova H. V. Mathematical modeling of the quasi-stationary processes of viscous mixture mixing in a rectangular area by the R-functions method. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології*. 2022. № 2 (8). С. 87-93. DOI: 10.20998/2079-0023.2022.02.14