УДК 517.958 : 517.988.8 DOI: https://doi.org/10.30837/IYF.CVSAMM.2024.302

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ КВАЗІФУНКЦІЇ ГРІНА-РВАЧОВА ДЛЯ ПОБУДОВИ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Чернишов Б.С.
Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ,
м. Харків, Україна
e-mail: bohdan.chernyshov@nure.ua

The paper considers the application of the Green-Rvachev quasi-functions method to the construction of the various methods of successive approximations for the numerical analysis of the first boundary value problem for the semilinear elliptic equation with the elliptic operator.

При математичному моделюванні стаціонарних процесів, що протікають у нелінійних середовищах, часто приходять до наступної першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння:

$$\mathfrak{L}u = f(\mathbf{x}, u), \ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(\mathbf{x}) > 0, \ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{2}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3}$$

де $\mathfrak{L}u = -\Delta u$ або $\mathfrak{L}u = -\Delta u + \kappa^2 u$, $\kappa > 0$, Δ – оператор Лапласа, Ω – область у $\mathbb{R}^2$ чи у $\mathbb{R}^3$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$, $\mathbf{x} = (x_2, x_2)$ чи $\mathbf{x} = (x_2, x_2, x_3)$ відповідно, $f(\mathbf{x}, u)$ є неперервною і додатною для всіх $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$, $u > 0$ функцією.

Одним з методів чисельного аналізу задачі (1) – (3) є перехід від диференціального рівняння до нелінійного інтегрального рівняння з подальшою побудовою для його розв'язання деякого ітераційного процесу. Класичним варіантом побудови еквівалентного задачі (1) – (3) інтегрального рівняння є використання методу функцій Гріна з подальшим застосуванням для розв'язання отриманого рівняння методу двобічних наближень [1]. Обмеженість практичної реалізації такого підходу пов'язана з тим, що, незважаючи на існування функції Гріна для доволі широкого класу областей, її фактичне знаходження може біти здійснено лише у поодиноких випадках. Отже, актуальною є задача розробки нових методів побудови еквівалентних задачі (1) – (3) інтегральних рівнянь та чисельних методів їх аналізу, які б мали ширші конструктивні можливості.

Це можна зробити на основі переходу до еквівалентного задачі (1) – (3) інтегрального рівняння Урисона, використовуючи квазіфункцію Гріна-Рвачова замість функції Гріна [2].

Припустимо, що область Ω обмежена скінченною кількістю кусків ліній $\sigma_i(\mathbf{x}) = 0$, де $\sigma_i(\mathbf{x})$ – елементарна функція, $i = 1, 2, ..., n$. Тоді за допомогою конструктивного апарату теорії R-функцій [3] можна побудувати у вигляді єдиного аналітичного виразу елементарну функцію $\omega(\mathbf{x})$ таку, що:

а) $\omega(\mathbf{x}) > 0$ у Ω; б) $\omega(\mathbf{x}) = 0$ на $\partial\Omega$; в) $|\nabla\omega(\mathbf{x})| \neq 0$ на $\partial\Omega$.

Квазіфункція Гріна-Рвачова $Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ першої крайової задачі має такий вигляд:

– для оператора $\mathfrak{L}u = -\Delta u$ у $\mathbb{R}^2$

$$Q_2(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{1 + \frac{4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}{r^2}},$$

де $\mathbf{x} = (x_2, x_2)$, $\mathbf{s} = (s_2, s_2)$, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{s}| = \sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2}$;

– для оператора $\mathfrak{L}u = -\Delta u$ у $\mathbb{R}^3$

$$Q_3(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})} - r}{r\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}},$$

де $\mathbf{x} = (x_2, x_2, x_3)$, $\mathbf{s} = (s_2, s_2, s_3)$, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{s}| = \sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + (x_3 - s_3)^2}$;

– для оператора $\mathfrak{L}u = -\Delta u + \kappa^2 u$ у $\mathbb{R}^2$

$$Q_2^{(\kappa)}(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi}\left(K_0(\kappa r) - K_0\left(\kappa\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}\right)\right),$$

де $\mathbf{x} = (x_2, x_2)$, $\mathbf{s} = (s_2, s_2)$, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{s}| = \sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2}$, $K_0(z)$ – модифікована функція Бесселя другого роду;

– для оператора $\mathfrak{L}u = -\Delta u + \kappa^2 u$ у $\mathbb{R}^3$

$$Q_3^{(\kappa)}(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}\,e^{-\kappa r} - r e^{-\kappa\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}}}{r\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}},$$

де $\mathbf{x} = (x_2, x_2, x_3)$, $\mathbf{s} = (s_2, s_2, s_3)$, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{s}| = \sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + (x_3 - s_3)^2}$.

Застосовуючи описаний у [2] підхід, отримаємо, що задача (1) – (3) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$u(\mathbf{x}) = \int_\Omega K(\mathbf{x},\mathbf{s})u(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_\Omega Q(\mathbf{x},\mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \tag{4}$$

де $K(\mathbf{x},\mathbf{s}) = -\dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{\partial^2\tilde{g}}{\partial s_1^2}(\mathbf{x},\mathbf{s}) + \dfrac{\partial^2\tilde{g}}{\partial s_2^2}(\mathbf{x},\mathbf{s})\right)$, а функція $\tilde{g}(\mathbf{x},\mathbf{s})$ визначається відповідно квазіфункції Гріна-Рвачова за формулами

$$\tilde{g}_2(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \ln\frac{1}{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}},\ \tilde{g}_3(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}},$$

$$\tilde{g}_2^{(\kappa)}(\mathbf{x},\mathbf{s}) = K_0\left(\kappa\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}\right),\ \tilde{g}_3^{(\kappa)}(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}}e^{-\kappa\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}}.$$

Розглянемо деякі ітераційні схеми, які можна запропонувати на основі рівняння (4).

1. Метод простої ітерації. Нехай $u^{(0)}(\mathbf{x})$ – початкове наближення (довільна неперервна і додатна у Ω функція, що задовольняє крайову умову (3)). Ітераційна схема має вигляд:

$$u^{(n)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K(\mathbf{x},\mathbf{s}) u^{(n-1)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x},\mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u^{(n-1)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \ n = 1, 2, \ldots. \qquad (5)$$

Умови збіжності ітерацій (5) отримуються, наприклад, на підставі застосування принципу Банаха про нерухому точку стискуючого оператора, а початкове наближення взяти у вигляді $u^{(0)}(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x})$.

2. Метод ітерацій за нелінійністю. Нехай початкове наближення $u^{(0)}(\mathbf{x})$ обрано як і у попередньому випадку. Тоді ітераційна схема має вигляд:

$$u^{(n)}(\mathbf{x}) - \int_{\Omega} K(\mathbf{x},\mathbf{s}) u^{(n)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} = \int_{\Omega} Q(\mathbf{x},\mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u^{(n-1)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \ n = 1, 2, \ldots. \qquad (6)$$

Ітерації (6) є послідовністю лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма. Кожне таке рівняння можна наближено розв'язати, наприклад, методом Гальоркіна, обравши за координатну систему $\varphi_k(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x})\tau_k(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, \ldots$, де $\{\tau_k(\mathbf{x})\}$ – довільна повна в $L_2(\Omega)$ система функцій. Питання збіжності ітераційного процесу (6) вирішуються аналогічно п. 1.

3. Метод двобічних наближень. Рівняння (4) розглядатимемо у банаховому просторі $C(\bar{\Omega})$ неперервних у $\bar{\Omega}$ функцій як рівняння $u = T(u)$ з гетеротонним оператором T. При цьому простір $C(\bar{\Omega})$ вважатимемо напівупорядкованим за допомогою конуса невід'ємних функцій. Якщо цей гетеротонний оператор має сильно інваріантний конусний відрізок $< v_0, w_0 >$, то, взявши за початкові наближення кінці цього відрізка, можна побудувати двобічний ітераційний процес знаходження наближеного розв'язку задачі (1) – (3), питання збіжності якого розглянуті у [2].

Обчислювальний експеримент було проведено для $f(\mathbf{x},u) = \frac{1}{5} + \frac{1}{4}u^{\frac{3}{4}}$, яка виникає, зокрема, при вивченні селекційної міграційної моделі у популяційній генетиці. Отримані наближені розв'язки було порівняно між собою.

Список використаних джерел:

1. Gybkina N. V., Lamtyugova S. M., Sidorov M. V. Two-sided approximations method based on the Green's functions use for construction of a positive solution of the Dirichlet problem for a semilinear elliptic equation. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*. 2021. № 3 (58). С. 26 – 41. DOI: 10.15588/1607-3274-2021-3-3

2. Sidorov M. V. Green-Rvachev's quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of nonlinear boundary value problems. *Carpathian Mathematical Publications*. 2018. Т. 10, № 2. С. 360-375. DOI: 10.15330/cmp.10.2.360-375

3. Рвачев В.Л. Теория *R*-функций и некоторые её приложения. Киев : Наукова думка, 1982. 552 с.