УДК 517.958 DOI: https://doi.org/10.30837/IYF.CVSAMM.2024.309

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННІ ПРОЦЕСІВ ПЛАЗМОСТАТИКИ

Шерстнюк Д.В.
Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ,
м. Харків, Україна
e-mail: dmytro.sherstniuk@nure.ua

We considers the two-dimensional problem of plasma statics with a cylindrical geometry and a helical magnetic field. Problems of this class arise when calculating the characteristics of plasma configurations in magnetic traps. The mathematical model of the plasma statics problem under consideration is a nonlinear boundary value problem for the Grad-Shafranov equation. For the numerical study of the problem, it is proposed to use successive approximations method and least squares method.

Розвиток програм керованого термоядерного синтезу приводить до підвищеного інтересу до розрахунку рівноважних плазмових конфігурацій. Найбільший інтерес з практичної точки зору викликають рівноважні конфігурації, що мають деякий тип симетрії.

Розглянемо задачу плазмостатики. В круглому циліндрі радіуса R на відстані ρ_0 ($\rho_0 < R$) від центра через рівні кути $\frac{2\pi}{N}$ розташовано N гвинтових провідника зі струмами, які рівні за величиною і напрямком. Вважатимемо, що задача має гвинтову симетрію, тобто в циліндричній системі координат (ρ, φ, z) усі величини залежать тільки від двох змінних ρ і $\omega = \varphi - \frac{\alpha z}{\rho_0}$, де $\alpha = \frac{2\pi\rho_0}{h}$, h – крок гвинта провідників. В цьому випадку компоненти H_ρ і $H_\omega \equiv H_\varphi - \alpha\rho H_z$ вектора напруги магнітного поля можна подати через похідні функції магнітного потоку ψ: $H_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\omega}$, $H_\omega = -\frac{\partial\psi}{\partial\rho}$, та від вихідних рівнянь Максвелла для електромагнітного поля перейти до скалярного рівняння для ψ (рівняння Греда-Шафранова):

$$\Delta^{**}\psi = -j_z^{ex} + \frac{2\alpha I}{\nu^2} - \frac{dI}{d\psi} - \frac{I}{\nu}\frac{dI}{d\psi} \text{ у } \Omega = \{\rho < R\}, \qquad (1)$$

де $\Delta^{**}\psi \equiv \nabla\left(\frac{\nabla\psi}{\rho}\right) \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho}{\nu}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\omega^2}$, $\nu \equiv 1 + \alpha^2\rho^2$, j_z^{ex} – щільність токів заданих провідників.

Тиск плазми $p(\psi)$ і функцію електричного струму $I(\psi) \equiv H_z + \alpha\rho H_\varphi$ відповідно можна задати у вигляді $I = \frac{\alpha}{2\pi}$, $p(\psi) = p_0 e^{-\frac{\psi^2}{q^2}}$.

Крайова задача з рівнянням (1) розглядається в області $\Omega = \{\rho < R\}$, межа якої $\partial\Omega = \{\rho = R\}$ вважається непроникною для магнітного поля: $H_\rho = 0$. Тоді рівняння (1) слід доповнити крайовою умовою:

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = C = \text{const}. \tag{2}$$

Для забезпечення максимуму тиску $p(\psi)$ на вісі циліндра сталу C обирають так, щоб:

$$\psi\big|_{\rho=0} = 0. \tag{3}$$

Таким чином, для знаходження функції магнітного потоку ψ треба розв'язати в області Ω рівняння (1) з крайовою умовою (2) і додатковою умовою (3). Позначимо $F(\rho,\,\omega,\,\psi) = -j_z^{ex} + \dfrac{2\alpha I}{\nu^2} - \dfrac{d\rho}{d\psi} - \dfrac{I}{\nu}\dfrac{dI}{d\psi}$ і в задачі (1), (2) зробимо заміну:

$$\psi = C + u, \tag{4}$$

де u – нова шукана функція.

Тоді для функції u отримаємо таку крайову задачу:

$$\Delta^{**} u = F(\rho,\,\omega,\,C+u) \text{ у } \Omega, \tag{5}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{6}$$

Для розв'язання задачі (5) – (6) скористаємося методом послідовних наближень. Нехай початкове наближення $u^{(0)}$ задано (наприклад, $u^{(0)} \equiv 0$) і знайдено наближення $u^{(k)}$. Тоді наступне $(k+1)$-е наближення $u^{(k+1)}$ знайдемо як розв'язок лінійної задачі:

$$\Delta^{**} u^{(k+1)} = F(\rho,\,\omega,\,C+u^{(k)}) \text{ у } \Omega, \tag{7}$$

$$u^{(k+1)}\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{8}$$

яка містить параметр C, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Наближений розв'язок задачі (7), (8) шукатимемо у вигляді:

$$u^{(k+1)} \approx u_{2n+1}^{(k+1)} = c_0^{(k+1)}(R-\rho) +$$
$$+\sum_{j=1}^{n} c_{2j-1}^{(k+1)} \rho^j (R-\rho)\cos j\omega + \sum_{j=1}^{n} c_{2j}^{(k+1)} \rho^j (R-\rho)\sin j\omega. \tag{9}$$

Коефіцієнти $c_0^{(k+1)}, c_1^{(k+1)}, \ldots, c_{2n}^{(k+1)}$ з (9) відповідно до метода найменших квадратів знайдемо з умови:

$$\int_0^R \rho\sqrt{1+\alpha^2\rho^2}\,d\rho \int_0^{2\pi} \left(R_{2n+1}(\rho,\,\omega,\,C)\right)^2 d\omega \to \min,$$

де відхил $R_{2n+1}(\rho,\,\omega,\,C) = \Delta^{**} u_{2n+1}^{(k+1)} - F(\rho,\,\omega,\,C+u^{(k)})$.

Далі з умови (3) слід знайти параметр C.