УДК 517.957: 517.988.8 DOI: https://doi.org/10.30837/IYF.CVSAMM.2024.314

ДВОБІЧНІ ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ У МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ТЕРМОХІМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Янбеков Р.Я.
Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ,
м. Харків, Україна
e-mail: ravil.yanbekov@nure.ua

The paper considers the application of bilateral iterative methods to the solution of the first boundary value problem for an elliptic semi-linear differential equation with the Helmholtz operator, which occurs in mathematical modeling of thermochemical processes.

Математичне моделювання стаціонарних термохімічних процесів, що відбуваються у області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, приводить до наступної крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння [1]

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u),\ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(\mathbf{x}) > 0,\ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{2}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3}$$

У задачі (1) – (3) функція $f(\mathbf{x}, u)$ має сенс нелінійних джерел тепловиділення, джерел речовини при дифузії тощо. У багатьох випадках її можна пожати у вигляді $f(\mathbf{x}, u) = -qu + g(\mathbf{x}, u)$, де $g(\mathbf{x}, u)$ – неперервна та додатна, коли $\mathbf{x} \in \Omega,\ u > 0$, функція. Доданок qu описує джерела чи стоки тепла або речовини при хімічній реакції, що є пропорційними температурі. При цьому значенню $q > 0$ відповідає стік, а $q < 0$ – джерело. Позначивши $q = \pm\kappa^2$, від задачі (1) – (3) ми приходимо до задачі

$$-\Delta u \pm \kappa^2 u = g(\mathbf{x}, u),\ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{4}$$

$$u(\mathbf{x}) > 0,\ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{5}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{6}$$

У роботі [2] для випадку рівняння $-\Delta u + \kappa^2 u = g(\mathbf{x}, u)$ було обґрунтовано застосування методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна. Цей метод полягає у переході від диференціальної задачі до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна, ядром якого є функції Гріна першої крайової задачі для оператора Гельмгольця $-\Delta u + \kappa^2 u$. Зазначена функція Гріна є невід'ємною в $\Omega \times \Omega$, що дає можливість застосувати для обґрунтування методу двобічних наближень теорію нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах [3].

Проте до рівняння $-\Delta u - \kappa^2 u = g(\mathbf{x}, u)$ цей підхід не може бути застосований, оскільки функція Гріна першої крайової задачі для оператора

Гельмгольця $-\Delta u-\kappa^2 u$ існує не для всіх $\kappa>0$, а у разі існування може не бути невід'ємною у квадраті $\Omega\times\Omega$. Запишемо рівняння $-\Delta u-\kappa^2 u=g(\mathbf{x},u)$ у вигляді $-\Delta u=\kappa^2 u+g(\mathbf{x},u)$. Тоді відповідна крайова задача буде еквівалентною інтегральному рівнянню

$$u(\mathbf{x})=\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})[\kappa^2 u(\mathbf{s})+g(\mathbf{s},u(\mathbf{s}))]d\mathbf{s}, \tag{7}$$

де $G(\mathbf{x},\mathbf{s})$ – функція Гріна першої крайової задачі для оператора $-\Delta u-\kappa^2 u$.

Рівняння (7) розглядатимемо як операторне рівняння $u=T(u)$ у просторі $C(\bar{\Omega})$ функцій, що є неперервними в області $\bar{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$. Напівупорядкуємо цей простір конусом K_+ невід'ємних неперервних функцій, тобто $v\le w$ за конусом K_+, якщо $w-v\in K_+$. Якщо функція $g(\mathbf{x},u)$ дозволяє діагональне подання $g(\mathbf{x},u)=\hat{g}(\mathbf{x},u,u)$, де функція $\hat{g}(\mathbf{x},v,w)$ зростає за v і спадає за w, то оператор T, який визначається правою частиною рівняння (7) буде гетеротонним. Тоді за умови існування для нього сильно інваріантного конусного відрізка $<v_0,w_0>$ можна сформувати ітераційний процес

$$v^{(k)}(\mathbf{x})=\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})[\kappa^2 v^{(k-1)}(\mathbf{s})+\hat{g}(\mathbf{s},v^{(k-1)}(\mathbf{s}),w^{(k-1)}(\mathbf{s}))]d\mathbf{s},\ k=1,2,..., \tag{8}$$

$$w^{(k)}(\mathbf{x})=\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})[\kappa^2 w^{(k-1)}(\mathbf{s})+\hat{g}(\mathbf{s},w^{(k-1)}(\mathbf{s}),v^{(k-1)}(\mathbf{s}))]d\mathbf{s},\ k=1,2,..., \tag{9}$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x})=v_0(\mathbf{x}),\ w^{(0)}(\mathbf{x})=w_0(\mathbf{x}), \tag{10}$$

Якщо ітераційний процес (8) – (10) є збіжним, то він приводить до двобічної послідовності наближень до точного розв'язку $u^*(\mathbf{x})$ розглядуваної крайової задачі, а саме виконуватиметься ланцюг нерівностей

$$v_0=v^{(0)}\le v^{(1)}\le...\le v^{(k)}\le...\le u^*\le...\le w^{(k)}\le...\le w^{(1)}\le w^{(0)}=w_0.$$

Перевага запропонованого двобічного ітераційного метода перш за все полягає в тому, що ми на кожній ітерації можемо апостеріорно оцінити похибку наближення $u^{(k)}(\mathbf{x})=0,5(w^{(k)}(\mathbf{x})+v^{(k)}(\mathbf{x}))$ за формулою

$$\left\|u^*-u^{(k)}\right\|_{C(\bar{\Omega})}\le 0,5\max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}(w^{(k)}(\mathbf{x})-v^{(k)}(\mathbf{x})).$$

Список використаних джерел:

1. Pao C. V. Nonlinear parabolic and elliptic equations. New York : Plenum Press, 1992. XV+777 p.

2. Gybkina N. V., Lamtyugova S. M., Sidorov M. V. Two-sided approximations method based on the Green's functions use for construction of a positive solution of the Dirichlet problem for a semilinear elliptic equation. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*. 2021. № 3 (58). С. 26 – 41. DOI: 10.15588/1607-3274-2021-3-3

3. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси : Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 272 с.