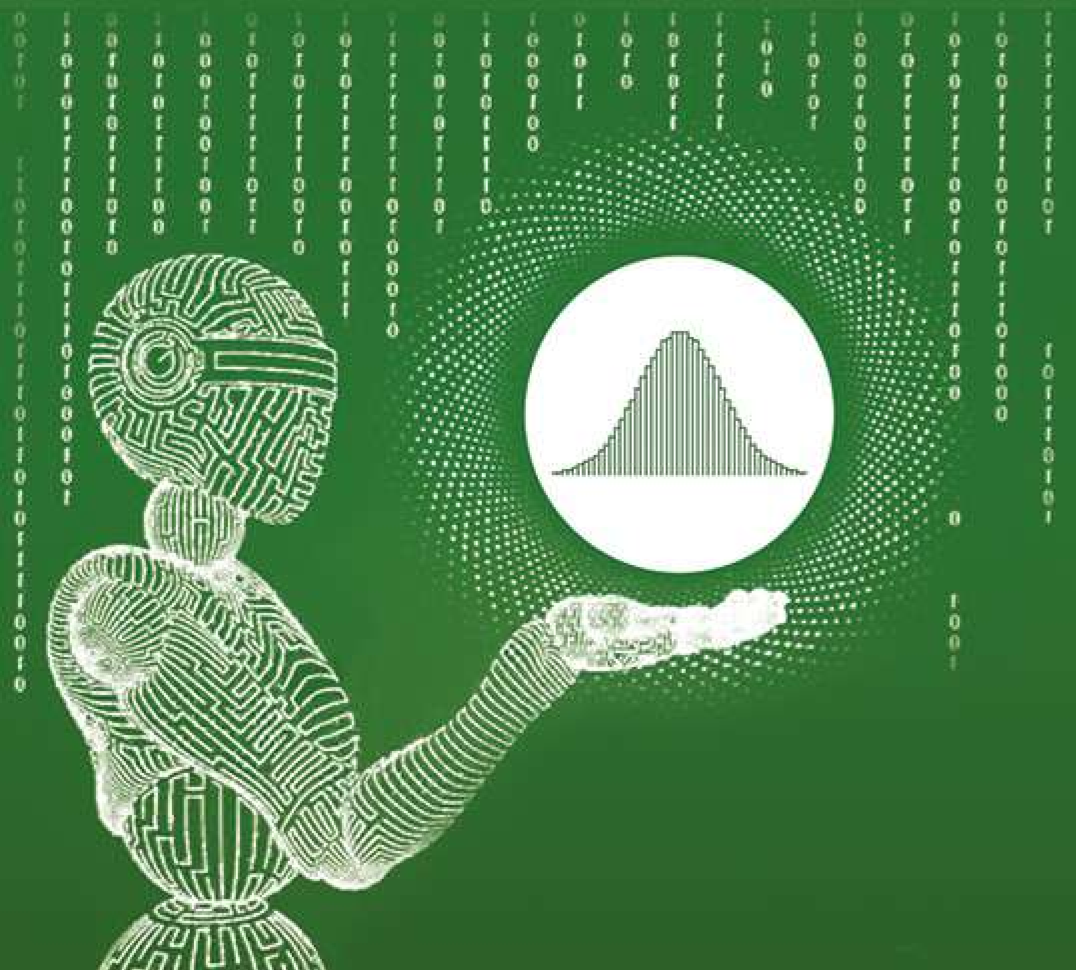


І. П. Захаров, О. А. Боцюра

СУЧАСНІ ПІДХОДИ ДО ОЦІНЮВАННЯ ЯКОСТІ ВИМІРЮВАНЬ

Монографія

І.П. Захаров, О.А. Боцюра

СУЧАСНІ ПІДХОДИ ДО ОЦІНЮВАННЯ ЯКОСТІ ВИМІРЮВАНЬ

Монографія

Харків
2024

УДК 006.91.001
ББК 30.10Ц
З38

Рекомендовано до друку Науково-технічною Радою Харківського національного університету радіоелектроніки (Протокол №3/7 від 20.03.2024 р.)

Рецензенти:
Карташов В.М., д-р. техн. наук, професор (ХНУРЕ);
Кошевий М.Д., д-р. техн. наук, професор (Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського "Харківський авіаційний інститут")

З38 Захаров І.П., Боцюра О.А. Сучасні підходи до оцінювання якості вимірювань: монографія. − Харків: Оберіг, 2024. − 100 с.

ISBN 978-966-8689-66-6

У монографії викладено основні питання оцінювання невизначеності вимірювань. Наводяться недоліки реалізації базового алгоритму GUM. Розглядається байєсівський підхід до оцінювання невизначеності вимірювань та його чисельна реалізація методом Монте-Карло. Проводиться порівняння оцінок невизначеності, які одержуються з урахуванням базового алгоритму і за допомогою ММК. Описується метод ексцесів, який дозволяє отримати оцінки невизначеності вимірювань, зіставні з оцінками ММК. Розглядаються недоліки методу ексцесів. Розглядається закон розповсюдження розширеної невизначеності, що усуває ці недоліки. Описуються питання оцінювання невизначеності вимірювань при нелінійних модельних рівняннях. Наводяться алгоритми реалізації методу ексцесів при калібруванні засобів вимірювальної техніки.

Рекомендується науковим працівникам, викладачам, співробітникам калібрувальних та випробувальних лабораторій, аспірантам та студентам метрологічних спеціальностей.

УДК 006.91.001
ББК 30.10Ц

ISBN 978-966-8689-66-6
DOI 10.30837/978-966-8689-66-6

ПЕРЕДМОВА

У 1993 році була оприлюднена “Настанова з подання невизначеності вимірювань” (GUM), яка протягом 30 років слугувала стандартом для оцінювання якості вимірювань у міжнародній практиці. Найсуттєвішим недоліком GUM є незалежність отриманих за його допомогою оцінок розширеної невизначеності від розподілів вхідних величин.

Усунення недоліків GUM призвело до створення у 2008 році доповнення до нього (GUM-S1), побудованого на основі методу Монте-Карло (ММК), що є чисельною реалізацією байєсівського підходу до оцінювання невизначеності вимірювань.

Розбіжності в підходах до оцінювання невизначеності в обох документах призвели до чисельних відмінностей в оцінці стандартної невизначеності, пов’язаної з спостережуваним розсіянням показів вимірювальних приладів.

Останнє спричинило необхідність перегляду GUM, спроба якого була зроблена WG-1 JCGM у 2014 році. В основу нового GUM ліг байєсівський підхід, застосування якого дозволило досягти узгодженості з GUM-S1 в частині оцінки стандартних невизначеностей.

Проте оцінки розширеної невизначеності в проекті нового GUM були суттєво завищені і все ще не залежали від законів розподілу вхідних величин, оскільки розробники, не знайшовши вирішення цього питання, пропонували використовувати так звані “консервативні” коефіцієнти покриття.

У монографії представлені розроблені авторами процедури для оцінювання невизначеності вимірювань на основі методу ексцесів і закону поширення розширеної невизначеності. Запропоновані процедури дозволяють отримати оцінки розширених невизначеностей вимірювань, які є зіставними з оцінками, отриманими при використанні ММК.

Описуються алгоритми реалізації методу ексцесів для оцінювання розширеної невизначеності при калібруванні вимірювальних приладів та матеріальних мір різними методами.

В додатках наведені значення коефіцієнтів Стьюдента для ймовірностей 0,95 та 0,9545 для дробових степенів свободи а також таблиці значень коефіцієнтів покриття для різних поєднань законів розподілу двох домінуючих вхідних величин, розглянуто зсув числового значення вимірюваної величини та її стандартної невизначеності при використанні нелінійної моделі вимірюваної величини, що дозволяє отримати незміщені оцінки вимірюваної величини та її стандартної невизначеності без використання ММК, описано обґрунтування методу ексцесів та закону розповсюдження розширеної невизначеності.

Крім загального списку посилань в монографії наведений перелік публікацій авторів з прикладами оцінювання невизначеності вимірювань запропонованими методами.

Монографія рекомендується науковим працівникам, викладачам, співробітникам калібрувальних та випробувальних лабораторій, аспірантам та студентам метрологічних спеціальностей технічних університетів.

Автори заздалегідь висловлюють подяку всім читачам, які надішлють свої зауваження та пропозиції щодо покращення книги на адресу: newzip@ukr.net.

ПОЗНАЧЕННЯ ТА СКОРОЧЕННЯ

- c_i – коефіцієнт чутливості;
- c_{ii} – частинна похідна другого порядку від Y по X_i, яка оцінена при $X_1 = x_1, ..., X_N = x_N$;
- c_{ij} – змішана частинна похідна другого порядку від Y по X_i, X_j, яка оцінена при $X_1 = x_1, ..., X_N = x_N$;
- $\mathrm{cov}(x_k, x_m)$ – коваріація результатів вимірювань *k*-ї та *m*-ї вхідних величин;
- d – дискретність відліку вимірювального приладу;
- f – функція моделі вимірювань;
- k_p – коефіцієнт охоплення для рівня довіри p;
- n_i – число багаторазових вимірювань *i*-ї вхідної величини;
- L – число калібрувань, проведених до теперішнього моменту часу;
- M – об’єм випадкових чисел при реалізації ММК;
- N – число вхідних величин в моделі вимірювань;
- n – кількість багаторазових вимірювань величини;
- p – рівень довіри;
- r_{km} – коефіцієнт кореляції між результатами вимірювань величин X_k, X_m;
- s_i – стандартне відхилення *i*-ї вхідної величини;
- $s(\overline{x}_i)$ – стандартне відхилення середнього арифметичного *i*-ї вхідної величини;
- $t_{p;\nu}$ – коефіцієнт Стьюдента для ймовірності p та числа степенів свободи ν;
- u_A, u_B – стандартні невизначеності типу *A* та *B*, відповідно;
- $u(x_i) = u_i$ – стандартна невизначеність *i*-ї вхідної величини;
- $u(y)$ – стандартна невизначеність вимірюваної величини;
- $u_c(y)$ – сумарна стандартна невизначеність вимірювань;
- U – розширена невизначеність вимірюваної величини;
- U_A – розширена невизначеність типу *A* вимірюваної величини;
- U_B – розширена невизначеність типу В вимірюваної величини;

- X_i – i-а вхідна величина моделі вимірювань;
- x_i – числове значення i-ї вхідної величини;
- x_{iq} – q-й повторний показ ВП при вимірюванні i-ї вхідної величини;
- X_c, x_c – велична та її значення, які вимірюються ВП, або відтворюється ММ, що калібруються;
- X_s, x_s – велична та її значення, які вимірюється еталонним ВП, або відтворюється еталонною ММ;
- X_0, x_0 – вихідна велична компаратора та її значення;
- Y – вимірювана (вихідна) величина моделі вимірювань;
- y – числове значення вимірюваної величини;
- y_{conv}, y_{ref}, y_{true} – прийняте, опорне та справжнє значення величини Y, відповідно.
- α – коефіцієнт, який характеризує обмежений закон розподілу вхідної величини;
- α_T – параметр трапецієвидного закону розподілу;
- β – відносне відхилення неточно заданих границь рівномірного розподілу;
- δ_{corr}, δ_i – поправка на i-у впливову величину;
- Δ, Δ_{syst} – систематична похибка;
- Δ_b – поправка на зсув, який указаний в сертифікаті калібрування еталонного ВП;
- Δ_c – поправка на похибку відліку ВП, що калібрується;
- Δ_s – поправка на сумарну додаткову похибку еталонного ВП або ММ;
- Δ_0 – поправка на сумарну додаткову похибку компаратора;
- $\Delta_{\text{пп}}$ – нееквівалентність завдання ПП значень вхідних величин для ВП, що калібрується та еталонного ВП;
- $\Delta(y)$ – зміщення вимірюваної величини;
- $\Delta(u^2)$ – зміщення дисперсії вимірюваної величини;
- ε_i – поправка на i-у випадкову похибку вимірювань;
- η_i – ексцес i-ї вхідної величини;

- η – ексцес вимірюваної величини;
- θ_i – границя розподілу i-ї вхідної величини;
- ν_i – число степенів свободи i-го внеску невизначеності;
- ν_{eff} – ефективне число степенів свободи;
- A, B – статистичний та нестатистичний методи оцінювання невизначеності вимірювань;
- BIPM – Міжнародне бюро мір та ваг;
- CGPM – Генеральна конференція з мір та ваг;
- EA – Європейська організація з акредитації;
- GUM – Настанова з подання невизначеності вимірювань;
- GUM-S1 – Доповнення 1 до GUM;
- IEC – Міжнародна електротехнічна комісія;
- ISO – Міжнародна організація зі стандартизації;
- JCGM – Об’єднаний комітет з настанов в метрології;
- MPE – максимально допустима похибка;
- PDF – функція щільності ймовірності;
- VIM – Міжнародний словник з метрології;
- WG-1 – робоча група 1 JCGM;
- ВП – вимірювальний прилад;
- ВЛ – випробувальна лабораторія;
- ВС – вимірювальна система;
- ЕЧСС – ефективне число степенів свободи;
- ЗВТ – засіб вимірювальної техніки;
- ЗРН – закон розповсюдження невизначеності;
- ЗРР – закон розповсюдження розподілів;
- ЗРРН – закон розповсюдження розширеної невизначеності;
- КЛ – калібрувальна лабораторія;
- МКІ – міжкалібрувальний інтервал;
- ММ – матеріальна міра;
- ММК – метод Монте-Карло;
- МХ – метрологічна характеристика;
- НВ – невизначеність вимірювань;
- НД – нормативна документація;
- ПП –прилад порівняння;
- СКВ – середньоквадратичне відхилення;
- ЦГТТЙ – центральна гранична теорема теорії ймовірності;
- ЧСС – число степенів свободи.

1. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЯКОСТІ ВИМІРЮВАНЬ

1.1. Похибки вимірювань

Вимірювання (measurement) – процес експериментального отримання одного або більше значень *y*, які можуть бути обґрунтовано приписані вимірюваній величині *Y* [1, п. 2.1].

Результат вимірювання (measurement result) – набор значень *y*, які приписуються вимірюваній величині *Y* разом з будь-якою іншою доступною та суттєвою інформацією [1, п. 2.9].

ПРИМІТКА. Зазвичай результат вимірювання містить “суттєву інформацію” про набір значень величини, таку, що деякі з цих значень можуть більшою мірою представляти вимірювану величину, ніж інші. Це може бути виражено ***щільністю розподілу ймовірностей*** (probability density function, PDF).

Похибка вимірювань (measurement error) Δ – різниця між виміряним *y* та опорним y_{ref} значеннями величини *Y* [1, п. 2.16]:

$$\Delta = y - y_{ref} \,. \tag{1.1}$$

Виміряне значення (measured value) *y* – значення величини *Y*, яке представляє результат вимірювання [1, п. 2.10].

Опорне значення (reference value) y_{ref} – значення величини *Y*, яке використовують у якості основи для порівняння зі значенням величин того ж роду [1, п. 5.18].

Похибка вимірювання являє собою алгебраїчну суму систематичних і випадкових складових, що відрізняються за характером мінливість в умовах повторюваності.

Під умовами повторюваності (збіжності) розуміють [1, п. 2.20]:

- однакова вимірювальна процедура;
- той самий спостерігач;
- той самий вимірювальний прилад, що застосовується в одних і тих же умовах;
- те ж саме місце проведення вимірювання;
- повторення вимірювань протягом короткого проміжку часу (такого малого, що зміною умов вимірювань або вимірюваної величини можна нехтувати).

Систематична похибка (systematic error) Δ_{syst} – складова похибки вимірювання, яка залишається постійною або закономірно змінюється при повторних вимірюваннях [1, п. 2.17].

ПРИМІТКА. Опорним значенням y_{ref} величини Y для систематичної похибки вимірювання є справжнє значення величини y_{true} або виміряне значення величини еталона y_s з нехтовно малою невизначеністю вимірювань, або прийняте значення величини y_{conv}.

Справжнє значення (true value) y_{true} – значення величини, яке відповідає визначенню величини [1, п. 2.11].

ПРИМІТКА. У теорії похибок при описі вимірювання справжнє значення y_{true} величини Y розглядається як єдине і на практиці непізнаване. Концепція невизначеності визнає, що насправді через неповний опис величини існує не єдине справжнє значення величини, а, швидше, – набір істинних значень, що погоджуються з визначенням. Однак ця сукупність значень, в принципі і на практиці, залишається невідомою.

Прийняте значення (conventional value) y_{conv} – значення величини, яке за згодою приписане величині для даної мети [1, п. 2.12].

Систематична похибка Δ_{syst} формально визначається як різність між середнім значенням $\overline{y}$, яке отримують при нескінченному числі вимірювань однієї й тієї ж величини Y в умовах повторюваності та опорним значенням вимірюваної величини y_{ref} [2, п. B.2.22]:

$$\Delta_{syst} = \lim_{n\to\infty} \overline{y} - y_{ref} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n} y_q - y_{ref} . \tag{1.2}$$

Зміщення (bias) $\hat{\Delta}_{syst}$ – оцінка систематичної похибки вимірювань [1, п. 2.18].

ПРИМІТКА. Систематична похибка вимірювання та її причини можуть бути відомими або невідомими. Для компенсації відомої систематичної похибки може вводитися ***поправка***.

Поправка (correction) δ_{corr} – компенсація оціненого систематичного ефекту [1, п. 2.53].

ПРИМІТКА. Поправка дорівнює оцінці систематичної похибки, яка взята зі зворотним знаком:

$$\hat{\delta}_{corr} = -\hat{\Delta}_{syst} . \tag{1.3}$$

Так як систематична похибка і всі її причини не можуть бути відомі точно, компенсація не може бути повною. Тому передбачається, що після внесення поправки математичне сподівання похибки, яка обумовлена систематичним ефектом, стає рівним нулю [2, п. 3.2.2], а невизначеність від неповної компенсації систематичного ефекту (невизначеність поправки) повинна враховуватися при оцінюванні невизначеності виправленого результату вимірювань.

Випадкова похибка (random error) – складова похибки вимірювання, яка при повторних вимірюваннях змінюється непередбачуваним (випадковим) чином (за знаком і значенням) [1, п. 2.19].

ПРИМІТКА. Опорним значенням величини для випадкової похибки вимірювання є середнє арифметичне, яке може бути отримано в результаті нескінченно великого числа повторних вимірювань однієї і тієї ж вимірюваної величини.

Випадкова похибка $\Delta_{rand\,q}$ формально визначається як різниця числового значення результату вимірювання y_q та середнього значення $\overline{y}$, яке могло бути отримане при нескінченно великому числі повторних вимірювань однієї та тієї ж величини, які проводяться в умовах повторюваності [2, п. В.2.21]:

$$\Delta_{rand\,q} = y_q - \lim_{n\to\infty} \overline{y} = y_q - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n} y_q . \qquad (1.3)$$

Як випливає з виразу (1.3), для знаходження випадкової похибки не потрібно знання істинного значення вимірюваної величини. Випадкова похибка одноразового вимірювання може бути, в принципі, визначена, якщо будуть відомі результати нескінченного числа повторних вимірювань. Однак у цьому випадку в її визначенні вже не буде потреби, оскільки величина $\lim_{n\to\infty} \overline{y} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n} y_q$, яка є оцінкою вимірюваної величини Y , не містить випадкової похибки.

Таким чином, випадкова похибка результату одноразового вимірювання не може бути компенсована поправкою, проте її можна зменшити, збільшивши кількість спостережень і приймаючи за результат вимірювання $\overline{y}$, оскільки математичне сподівання (очікуване значення) випадкової похибки дорівнює нулю .

До випадкових похибок відносяться також ***грубі*** похибки, що істотно перевищують очікувані за даних умов значення похибки. Такі похибки можуть виникати, наприклад, при різкій короткочасній зміні напруги в мережі живлення засобу вимірювання. Обтяжені грубими похибками результати вимірювань можна виявити під час статистичної обробки та виключити з розгляду.

1.2. Невизначеність вимірювань

1.2.1. Взаємозв'язок похибки та параметрів розкиду значень вимірюваної величини

Виміряне значення величини y з огляду на наявність у ньому випадкових і невиявлених складових систематичних похибок може бути дуже близьким до істинного значення вимірюваної величини y_{true} (тобто мати зневажливо малу похибку). Оскільки значення складових похибки невідоме, отримане числове значення результату вимірювань не викликає відповідної довіри. Саме тому для оцінки якості результату вимірювання зазвичай спираються не на похибку, а на її ***імовірнісні характеристики***, що ґрунтуються не на "справжньому" значенні вимірюваної величини, а на спостерігаємому (або оціненому на основі апріорної інформації) розкиду (dispersion) результату вимірювання. При цьому передбачається, що всі поправки на відомі складові систематичної похибки внесені, а присутність невиявлених складових систематичної похибки в результаті вимірювання є неминучим злом, що вносить свій внесок у його розкид.

Мірою розкиду випадкової величини, як відомо, служить центральний момент другого порядку, званий ***дисперсією*** (variation).

На рис. 1.1 наведено графічну ілюстрацію різних значень вимірюваної величини та їх дисперсій [2, п. D.6.2].

Тут у першому пункті показані (без масштабу) невиправлені результати спостережень (розташовані в порядку зростання на числовій осі) і дисперсія кожного з них.

У другому пункті зображено середнє арифметичне невиправлених результатів спостережень, що приймається за результат вимірювань (невиправлений), яке має дисперсію, меншу в порівнянні з дисперсією кожного спостереження в число разів, що дорівнює кількості спостережень.

Третій пункт ілюструє введення в невиправлений результат вимірювання поправки на всі відомі систематичні ефекти. Поправка має власну дисперсію, оскільки відома з кінцевою точністю.

У четвертому пункті показаний виправлений результат вимірювання та його дисперсія, яка дорівнює сумі дисперсії поправки та дисперсії середнього арифметичного результатів спостережень.

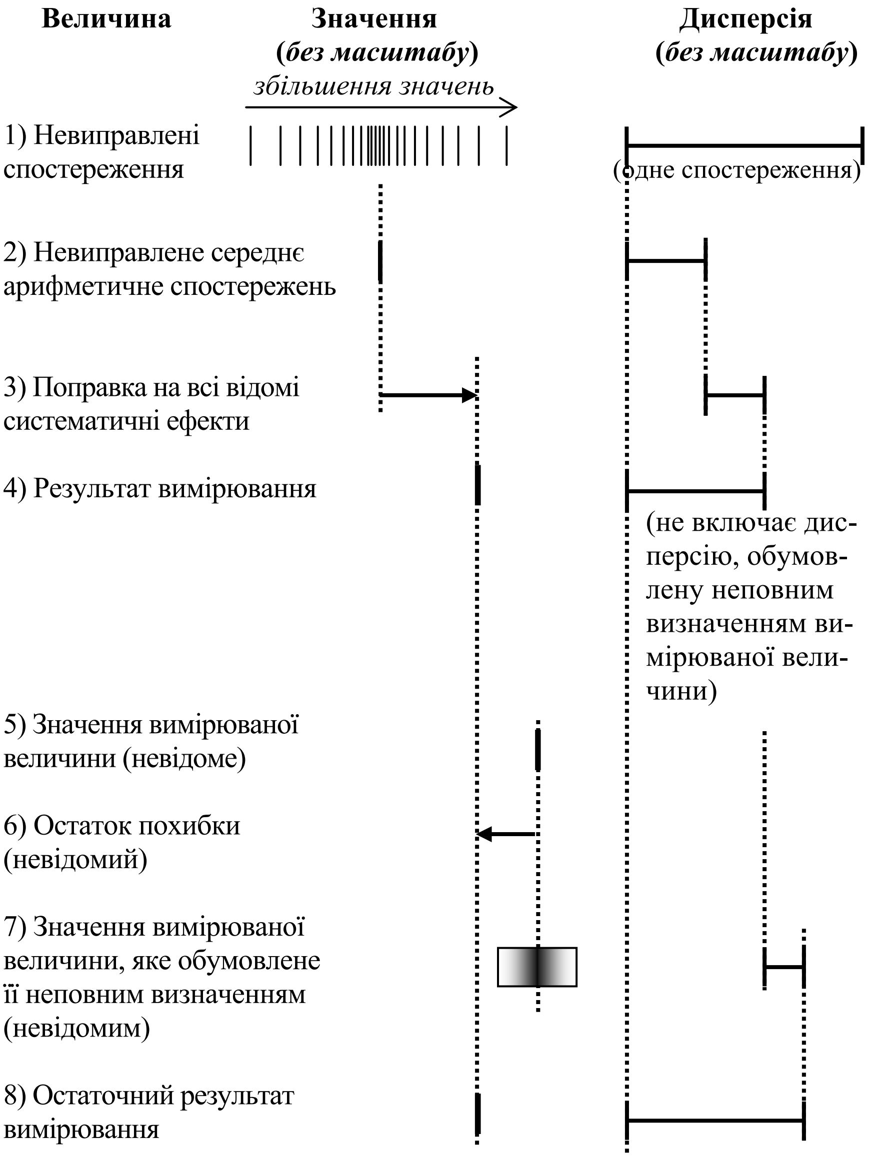


Рис. 1.1 – Графічна ілюстрація значень похибки
та дисперсії вимірюваної величини

У п’ятому пункті зображено значення вимірюваної величини (невідоме).

Шостий пункт ілюструє залишок похибки (невідомий, оскільки невідомо значення вимірюваної величини), який дорівнює різниці між результатом вимірювання і значенням вимірюваної величини.

Сьомий пункт показує, що неповне визначення вимірюваної величини також збільшує невизначеність результату вимірювання.

У восьмому пункті показано, що дисперсія остаточного результату вимірювань дорівнює сумі дисперсії середнього арифметичного результатів спостережень, дисперсії поправки та дисперсії неповного визначення вимірюваної величини.

Таким чином, ***по мірі уточнення результату вимірювання на систематичні ефекти, його похибка (яка залишається невідомою) – зменшується, а його дисперсія – збільшується***. Природно, що невідомий систематичний ефект не може бути врахований в оцінці дисперсії результату вимірювання, але він робить внесок у його похибку.

Крім дисперсії, існують й інші ймовірнісні параметри розсіювання результату вимірювання: як точкові, так і інтервальні. Ці оцінки, на відміну від дисперсії, мають розмірність вимірюваної величини. Прикладом може бути, позитивний корінь з дисперсії, званий стандартним відхиленням. Оцінки цих параметрів, що характеризують сумнів щодо достовірності результату вимірювання, називають невизначеністю вимірювання.

У широкому значенні слова **невизначеність вимірювання** (measurement uncertainty) – параметр, пов’язаний з результатом вимірювання, що характеризує розкид значень, які можна обґрунтовано приписати вимірюваній величині [2, п. 2.2.3].

1.2.2. Основні терміни та визначення

У [1, п. 2.26] наводиться ще одне визначення **невизначеності вимірювань** – невід’ємний параметр, що характеризує розсіювання значень величини, що приписується вимірюваній величині на підставі використовуваної інформації.

ПРИМІТКА 1. Невизначеність вимірювань включає складові, зумовлені систематичними ефектами, у тому числі складові, які пов’язані з поправками та приписаними значеннями еталонів, а також дефініціальну невизначеність. Іноді поправки на оцінені систематичні ефекти не вводять, а натомість останні розглядають як складові невизначеності вимірювань.

ПРИМІТКА 2. Параметром може бути, наприклад, стандартне відхилення, зване стандартною невизначеністю вимірювань (або кратне йому число) або половина ширини інтервалу з встановленою ймовірністю охоплення.

ПРИМІТКА 3. У загальному випадку невизначеність вимірювань включає багато складових. Деякі з цих складових можуть бути оцінені за типом *A* на підставі статистичного розподілу значень величини з серій вимірювань і можуть характеризуватись стандартними відхиленнями. Інші складові, які можуть бути оцінені за типом *B*, також можуть характеризуватись стандартними відхиленнями, що оцінюються через функції щільності ймовірностей на підставі досвіду або іншої апріорної інформації.

ПРИМІТКА 4. У цілому, при даному обсязі інформації мається на увазі, що невизначеність вимірювань пов'язують з певним значенням, що приписується вимірюваній величині. Зміна цього значення призводить до зміни невизначеності, що пов'язується з ним.

Інструментальна невизначеність (instrumental measurement uncertainty) – складова невизначеності вимірювань, обумовлена засобом вимірювань, що застосовується, або вимірювальною системою [1, п. 4.24].

ПРИМІТКА 1. Інструментальну невизначеність виявляють при калібруванні засобу вимірювань або вимірювальної системи, за винятком первинного еталона, коли для цього використовують інші підходи.

ПРИМІТКА 2. Інструментальну невизначеність використовують при оцінюванні невизначеності вимірювань за типом *B*.

ПРИМІТКА 3. Інформація, що стосується інструментальної невизначеності, може бути наведена у специфікації засобу вимірювань.

Модель вимірювань (measurement model) – математичний зв'язок між усіма величинами, про які відомо, що вони беруть участь у вимірюванні [1, п. 2.48].

Функція вимірювань (measurement function) – функція величин, значення якої, обчислене з використанням відомих значень вхідних величин в моделі вимірювань, є виміряним значенням вихідної величини в цій моделі вимірювань [1, п. 2.49].

ПРИМІТКА. Якщо модель вимірювань може бути записана в явному вигляді як $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$, де Y – вихідна величина в моделі вимірювань, то функція f є функція вимірювань.

Вхідна величина в моделі вимірювань (input quantity) – величина, яка має бути виміряна, або величина, значення якої може бути отримано іншим способом, для обчислення виміряного значення вимірюваної величини [1, п. 2.50].

ПРИМІТКА. Вхідними величинами моделі вимірювань можуть бути показання, поправки і впливні величини.

Вихідна величина моделі вимірювань (output quantity) – величина, виміряне значення якої обчислюють, використовуючи значення вхідних величин моделі вимірювань [1, п. 2.51].

Впливна величина (influence quantity) – величина, яка при прямому вимірюванні не впливає на величину, яку фактично вимірюють, але впливає на співвідношення між показами і результатом вимірювання [1, п. 2.52].

Дефініціальна невизначеність (definitional uncertainty) – складова невизначеності вимірювань, що є результатом обмеженої деталізації у визначенні вимірюваної величини [1, п. 2.27].

ПРИМІТКА 1. Дефініціальна невизначеність є практичний мінімум невизначеності вимірювань при будь-якому вимірюванні даної величини.

ПРИМІТКА 2 Будь-яка зміна деталізації у визначенні величини веде до іншої дефініціальної невизначеності.

Оцінювання невизначеності вимірювань за типом *A* (type *A* evaluation of measurement uncertainty) – оцінювання складової невизначеності вимірювань шляхом статистичного аналізу виміряних значень величини, які одержують при певних умовах вимірювання [1, п. 2.28].

Оцінювання невизначеності вимірювань за типом *B* (type *B* evaluation of measurement uncertainty) – оцінювання складової невизначеності вимірювань способами, відмінними від оцінювання невизначеності вимірювань за типом *A* [1, п. 2.29].

Приклади оцінювання на основі апріорної інформації:

- пов’язаної зі значеннями величини, взятими з авторитетних публікацій;

- пов’язаної зі значенням атестованого стандартного зразка;

- отриманого із сертифікатів калібрування;
- про дрейф;
- пов'язаної з класом точності повіреного засобу вимірювань;
- отриманої з границь, встановлених з урахуванням особистого досвіду.

Стандартна невизначеність вимірювань (standard measurement uncertainty) – невизначеність вимірювань, яка виражена у вигляді стандартного відхилення [1, п. 2.30].

Відносна стандартна невизначеність вимірювань (relative standard measurement uncertainty) – стандартна невизначеність вимірювань, поділена на абсолютне значення виміряного значення величини [1, п. 2.32].

Сумарна стандартна невизначеність вимірювань (combined standard measurement uncertainty) – стандартна невизначеність вимірювань, яку отримують виходячи з індивідуальних стандартних невизначеностей вимірювань, пов'язаних із вхідними величинами в моделі вимірювань [1, п. 2.31].

ПРИМІТКА. У разі кореляції вхідних величин у моделі вимірювань при обчисленні сумарної стандартної невизначеності вимірювань повинні також враховуватися коваріації.

Коваріація (covariation) – міра взаємної залежності двох випадкових величин [2, п. С.3.4].

Кореляція (correlation) – взаємодія двох або кількох випадкових величин у розподілі двох або декількох випадкових величин [2, п. С.2.8].

Розширена невизначеність вимірювань (expanded measurement uncertainty) – добуток сумарної стандартної невизначеності та коефіцієнта більшого, ніж число один [1, п. 2.35].

ПРИМІТКА 1. Коефіцієнт залежить від виду розподілу ймовірностей вихідної величини моделі вимірювань і обраної ймовірності охоплення.

ПРИМІТКА 2 Термін "коефіцієнт" у цьому визначенні стосується коефіцієнта охоплення.

Інтервал охоплення (coverage interval) – інтервал, заснований на наявній інформації, що містить сукупність істинних значень вимірюваної величини із заданою ймовірністю [1, п. 2.36].

ПРИМІТКА 1. Центр інтервалу охоплення не обов'язково збігатиметься з виміряним значенням величини.

ПРИМІТКА 2. Інтервал охоплення не слід називати "довірчим інтервалом", щоб уникнути плутанини з цим статистичним поняттям (див. [2, п. 6.2.2]).

ПРИМІТКА 3. Інтервал охоплення може бути виведений із розширеної невизначеності вимірювань (див. [2, п. 2.3.5]).

Імовірність охоплення (coverage probability) – ймовірність того, що сукупність істинних значень вимірюваної величини знаходиться в зазначеному інтервалі охоплення [1, п. 2.37].

ПРИМІТКА 1. Це визначення стосується концепції невизначеності, представленої в GUM.

ПРИМІТКА 2. У GUM для ймовірності охоплення використовується також термін "***рівень довіри***".

Бюджет невизначеності (uncertainty budget) – звіт про невизначеність вимірювань, що становлять невизначеність, їх обчислення та підсумовування [1, п. 2.33].

ПРИМІТКА. Бюджет невизначеності може включати модель вимірювань, оцінки та невизначеності вимірювань, які пов'язані з величинами, що входять в модель вимірювань, коваріації, види функцій щільності ймовірностей, що застосовуються, число степенів свободи, тип оцінювання невизначеності і коефіцієнт охоплення.

2. ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕННОСТІ ВИМІРЮВАНЬ В РАМКАХ GUM

2.1. Основні засади оцінювання невизначеності вимірювань

У GUM [2] розглянуто так званий ***модельний підхід*** до оцінювання невизначеності вимірювань. Суть його полягає у використанні ***моделі вимірювання***, яка зв'язує між собою ***вхідні величини*** $X_1, X_2, ..., X_N$ вимірювального процесу з вимірюваною (***вихідною***) величиною Y. При цьому за оцінками вхідних величин $x_1, x_2, ..., x_N$ обчислюють оцінку вимірюваної величини y, а за невизначеностями, пов'язаними з вхідними величинами $u(x_1), u(x_2), ..., u(x_N)$, обчислюють невизначеність вимірюваної величини $u(y)$, тому модельний підхід часто називають ***висхідним***.

В основу реалізації модельного підходу покладено шість основних принципів.

<u>ПРИНЦИП 1.</u>

Усі складові невизначеності вхідних величин можна згрупувати у дві категорії ***відповідно до способу їх оцінювання:***

• **категорія** ***A*** – складові, що оцінюються шляхом застосування статистичних методів (шляхом обробки результатів багаторазових вимірювань);

• **категорія** ***B*** – складові, що оцінюються іншим способом (за характеристиками, взятими зі специфікації на засіб вимірювальної техніки (ЗВТ), сертифіката калібрування, методики виконання вимірювань, з попередніх експериментів, з довідників тощо).

<u>ПРИНЦИП 2.</u>

Складові типу *A* виражаються стандартними невизначеностями (u_A), які дорівнюють середнім квадратичним (стандартним) відхиленням (СКВ) середніх арифметичних повторних (багаторазових) спостережень.

<u>ПРИНЦИП 3.</u>

Складові типу *B* виражаються стандартними невизначеностями (u_B), які отримують з ***апріорної інформації*** про мінливість вхідних величин.

ПРИНЦИП 4.

Стандартна невизначеність i-ї вхідної величини $u(x_i)$, формує пропорційний ***внесок у невизначеність вимірюваної величини*** $u_i(y)$:

$$u_i(y) = c_i u(x_i)\,, \qquad (2.1)$$

де c_i – т. зв. ***коефіцієнт чутливості***.

ПРИНЦИП 5.

Усі внески невизначеностей вхідних величин утворюють ***стандартну невизначеність вимірюваної величини*** $u(y)$ (***сумарну стандартну невизначеність*** u_c), яка обчислюється за правилом підсумовування дисперсій.

Для некорельованих внесків невизначеності $u_i(y)$, i=1, 2, …, N, це правило буде виглядати так:

$$u_c^2(y) = u_1^2(y) + u_2^2(y) + ... + u_N^2(y)\,, \qquad (2.2)$$

звідки шляхом вилучення кореня з обох частин цього рівняння, одержуємо вираз, званий в GUM ***законом розповсюдження невизначеності:***

$$u_c(y) = \sqrt{u_1^2(y) + u_2^2(y) + ... + u_N^2(y)}\,. \qquad (2.3)$$

ПРИНЦИП 6.

Інтервальною оцінкою невизначеності є ***розширена невизначеність*** U, яку отримують шляхом множення стандартної сумарної невизначеності $u_c(y)$ на коефіцієнт охоплення k:

$$U = k \cdot u_c(y)\,. \qquad (2.4)$$

Значення коефіцієнта охоплення залежить від закону розподілу вимірюваної величини і обраного рівня довіри p. У більшості випадків коефіцієнт охоплення для ймовірності 0,9545 приймається рівним 2, виходячи з припущення про нормальний закон розподілу вимірюваної величини.

Випадки оцінки коефіцієнта охоплення, що зустрічаються на практиці, які наведені в підрозділі 2.2.

2.2. Базовий алгоритм оцінювання невизначеності вимірювань

Базовий алгоритм оцінювання невизначеності вимірювань описаний у [2, 3]. Він включає наступні кроки.

1. Складання моделі вимірювань

Модель вимірювань виражає залежність між вихідною (вимірюваною) величиною Y і вхідними величинами $X_1, X_2, \ldots, X_N$:

$$Y = f(X_1, ..., X_N)\,. \tag{2.5}$$

2. Оцінювання вхідних величин

Значення вхідних величин $x_1, x_2, \ldots, x_N$ знаходять шляхом їх вимірювання з одноразовими (поодинокими) або багаторазовими (повторними) спостереженнями або беруть із зовнішніх джерел.

При проведенні багаторазових вимірювань за значення i-ї вхідної величини приймають середнє арифметичне результатів ряду окремих спостережень:

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{q=1}^{n_i} x_{iq}. \tag{2.6}$$

де n_i – кількість спостережень, які виконують при вимірюванні X_i.

3. Обчислення оцінки результату вимірювання

Оцінку вимірюваної величини y отримують при підстановці в модель вимірювань (2.5) оцінок вхідних величин $x_1, x_2, \ldots, x_N$:

$$y = f(x_1, \ldots, x_N)\,. \tag{2.7}$$

4. Обчислення стандартних невизначеностей вхідних величин

4.1. Стандартна невизначеність вимірювання типу A i-ї вхідної величини знаходиться за формулою:

$$u_A(\bar{x}_i) = \sqrt{\frac{1}{n_i(n_i - 1)}\sum_{q=1}^{n_i}(x_{iq} - \bar{x}_i)^2}\,. \tag{2.8}$$

4.2 Стандартна невизначеність вимірювання типу B i-ї вхідної величини залежить від апріорної інформації про її мінливість, яка може виражатися стандартним відхиленням s, нижньою θ^- і верхньою θ^+ границями інтервалу, в середині якого знаходяться можливі її значення, або розширеною невизначеністю *U*.

1) Якщо мінливість вхідної величини X_i представлена стандартним відхиленням s_i, то воно приймається таким, що дорівнює її стандартної невизначеності $u_B(x_i)$:

$$u_B(x_i) = s_i\,. \tag{2.9}$$

2) Якщо відомо, що вхідна величина X_i має мінливість в границях інтервалу [θ^-; θ^+], то її стандартну невизначеність можна визначити за формулою:

$$u_B(x_i) = (\theta^+ - \theta^-)/2\alpha_i\,, \tag{2.10}$$

де коефіцієнт α_i вибирається залежно від прийнятого закону розподілу можливих значень X_i усередині цих границь. Якщо границі інтервалу [θ^-; θ^+] симетричні щодо нуля, тобто $\theta^- = -\theta$; $\theta^+ = \theta$, то

$$u_B(x_i) = \theta/\alpha_i\,. \tag{2.11}$$

Види деяких обмежених законів розподілу, їх значення коефіцієнта α та випадки їх застосування наведені у табл. 2.1.

3) Границі мінливості величини виражені розширеною невизначеністю U_i, яка розрахована для рівня довіри *p*.

У цій ситуації для оцінювання стандартної невизначеності типу *B* слід розділити значення U_i на відповідний для даного випадку коефіцієнт охоплення k_i:

$$u_B(x_i) = \frac{U_i}{k_i}\,. \tag{2.12}$$

5. Обчислення внеску невизначеності вхідної величини у невизначеність вимірюваної величини

Внесок $u_i(y)$ невизначеності $u(x_i)$ кожної вхідної величини X_i в невизначеність вимірюваної величини $u(y)$ (сумарну стандартну невизначеність) визначають як добуток $u(x_i)$ на коефіцієнт чутливості c_i:

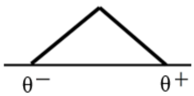
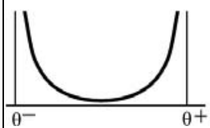
$$u_i(y) = c_i u(x_i). \tag{2.13}$$

Коефіцієнти чутливості c_i показують, як оцінка вихідної величини y змінюватиметься зі зміною оцінок вхідних величин x_i. Їх знаходять як частинні похідні вихідної величини за кожною з вхідних величин:

$$c_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial Y}{\partial X_i}\bigg|_{x_1, x_2, ..., x_N}. \tag{2.14}$$

Таблиця 2.1

Закони розподілу для обмежених інтервалів

Закон	Випадки застосування
 Рівномірний, $\alpha = \sqrt{3}$	• специфікація вказує границі ±θ без вказівки рівня довіри, наприклад, границя допустимої похибки ЗВТ; • зроблено припущення у вигляді максимального інтервалу границь ±θ без будь-яких знань про закон розподілу, наприклад, границі зміни температури в лабораторії.
 Трикутний, $\alpha = \sqrt{6}$	• коли можна вважати, що значення вхідної величини поблизу оціненого значення вірогідніші, ніж біля границь, наприклад, значення калібрувальних відміток на мірному посуді; • вхідна величина є сумою двох величин з рівномірним законом розподілу однакової ширини, наприклад, у методі заміщення похибка відліку входить до рівняння вимірювання двічі.
 Арксинусний, $\alpha = \sqrt{2}$	• коли вхідна величина є параметром функції, що синусоїдально змінюється, зокрема, при електричних вимірюваннях синусоїдальної напруги або при кутових вимірюваннях (наприклад, похибка відліку часу по циферблату секундоміра, викликана ексцентриситетом осі його стрілки); • для отримання максимально можливого значення стандартної невизначеності з відомих границь ±θ.

5.1. Для модельного рівняння у вигляді лінійної комбінації вхідних величин виду

$$Y = A_1 X_1 + A_2 X_2 + ... + A_N X_N,$$

де A_1, A_2, ..., A_N – постійні коефіцієнти, коефіцієнти чутливості дорівнюють коефіцієнтам при вхідних величинах:

$$c_1 = A_1,\ c_2 = A_2, \ldots, c_N = A_N.$$

5.2. Для модельного рівняння у вигляді добутку ступеневих одночленів

$$Y = B \cdot X_1^{\beta_1} \cdot X_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot X_N^{\beta_N}$$

коефіцієнти чутливості c_i дорівнюють відношенню значення вимірюваної величини y до значення відповідної вхідної величини x_i, помноженого на відповідний ступінь β_i:

$$c_1 = \beta_1 \frac{y}{x_1}, \; c_2 = \beta_2 \frac{y}{x_2}, \; \ldots, \; c_N = \beta_N \frac{y}{x_N}.$$

6. Обчислення стандартної невизначеності вихідної величини (сумарної стандартної невизначеності)

Обчислення сумарної стандартної невизначеності здійснюється за формулою, яка називається ***законом розповсюдження невизначеності***.

За відсутності кореляцій між результатами вимірювання вхідних величин стандартна невизначеність вихідної величини обчислюється як:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} u_i^2(y)} = \sqrt{c_1^2 u^2(x_1) + c_2^2 u^2(x_2) + \ldots + c_N^2 u^2(x_N)}. \quad (2.15)$$

Якщо в моделі вимірювань (2.5) присутні дві вхідні величини (наприклад, X_k, X_m), результати багаторазових вимірювань яких виконані одночасно і корелюють між собою з коефіцієнтом кореляції r_{km}, то вираз для сумарної стандартної невизначеності матиме наступний вигляд:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2 r_{km} c_k c_m u(x_k) u(x_m)}. \quad (2.16)$$

У загальному випадку формула для сумарної стандартної невизначеності з урахуванням кореляції між результатами вимірювань всіх вхідних величин має вигляд [2,3]:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} r_{ij} c_i c_j u(x_i) u(x_j)}. \quad (2.17)$$

7. Обчислення розширеної невизначеності

Розширену невизначеність U отримують шляхом множення невизначеності вихідної величини (сумарної стандартної невизначеності) на коефіцієнт охоплення:

$$U(y) = k \cdot u_c(y). \tag{2.18}$$

Значення коефіцієнту охоплення k залежить від закону розподілу вимірюваної величини та обраного рівня довіри p. В GUM [2] рівень довіри прийнятий таким, що дорівнює 0,9545 (приблизно 0,95), але не відкидається можливість обрання інших його значень.

Вибір коефіцієнта охоплення слід проводити з урахуванням аналізу бюджету невизначеності (табл. 2.4). Алгоритм вибору коефіцієнта охоплення в цьому випадку можна представити у вигляді, зображеному на рис. 2.1.

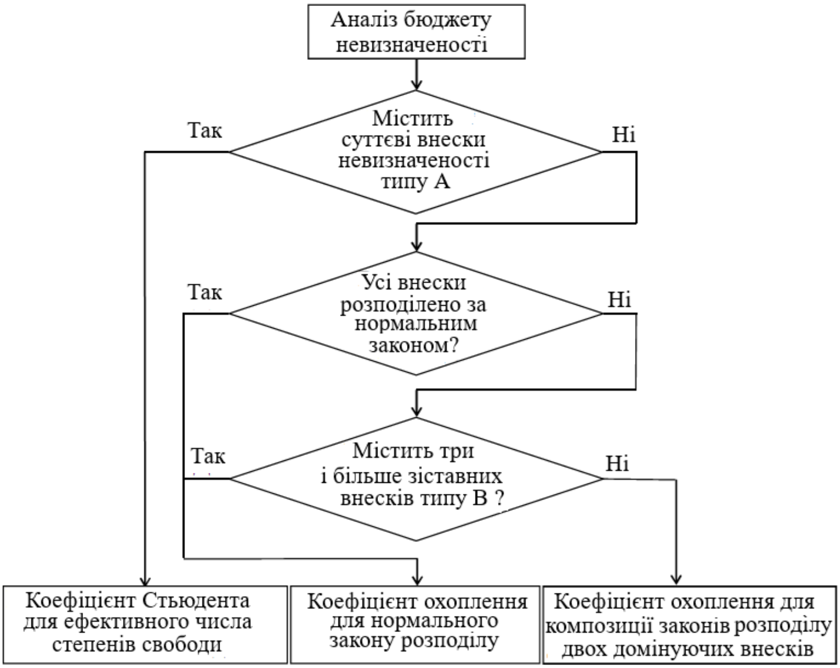


Рис. 2.1 Алгоритм вибору коефіцієнта охоплення при оцінюванні розширеної невизначеності вимірювань

За наявності суттєвих внесків невизначеності типу *A*, рекомендується брати як коефіцієнт охоплення коефіцієнт Стьюдента для ймовірності рівної 0,9545 і ефективного числа степенів свободи ν_{eff} [1, п. 5.7]:

$$k = t_{0,9545;\nu_{eff}} . \qquad (2.19)$$

Ефективне число степенів свободи визначається за формулою Велча-Саттерсвейта:

$$\nu_{eff} = u^4(y) \Big/ \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i} . \qquad (2.20)$$

де ν_i − число степенів свободи i-ї вхідної величини (см. табл. 2.2).

Значення коефіцієнтів Стьюдента для ймовірності p=0,9545 та дробового числа степенів свободи ν_{eff} [4] наведені у табл. А1 Додатку А.

За наявності в моделі вимірювань тільки однієї вхідної величини, оціненої за типом *A* з числом спостережень *n*, формула (2.20) може бути представлена у вигляді:

$$\nu_{eff} = (n-1)\left[\frac{u_c(y)}{u_A}\right]^4 . \qquad (2.21)$$

Таблиця 2.2

Значення чисел степенів свободи стандартних невизначеностей вхідних величин

Стандартна невизначеність вхідної величини	**Формула**	ν_i
Типу *A*, для *n* вимірювань	(2.8)	$n-1$
Типа *B*, СКВ одноразових вимірювань, яке визначено за раніш проведеними *n* вимірюваннями	(2.9)	$n-1$
Типу *B*, яка обчислена через границі, наведені без вказівки рівня довіри, наприклад границі допустимої похибки ЗВТ	(2.10), (2.11)	∞
Типу *B*, яка обчислена через розширену невизначеність U_i і коефіцієнт охоплення k_i, який дорівнює коефіцієнту Стьюдента для ефективного числа степенів свободи ν_{eff} та ймовірності 0,9545	(2.12)	ν_{eff}

За відсутності внесків невизначеності типу *A* та при числі степенів свободи внесків невизначеності типу *B*, які дорівнюють нескінченності, формула (2.20) дає нескінченність, тому коефіцієнт охоплення формально повинен дорівнювати коефіцієнту Стьюдента від нескінченності для ймовірності 0,9545, тобто $k = t_{0,9545;\infty} = 2$. Однак таке значення коефіцієнта охоплення відповідає випадку, коли вимірюваній величині Y приписують нормальний закон розподілу, що є результатом впливу на неї великої кількості факторів (джерел невизначеності), або коли є три і більше найбільших зіставних внесків невизначеності, розподілених за будь-яким іншим законом.

При визначенні коефіцієнта охоплення для композиції двох домінуючих анормальних внесків невизначеності (що відрізняються не менше ніж у 3 рази від інших), необхідно користуватися таблицями, наведеними в пунктах С1.8, С1.10-С1.12 додатка С документа [5] (таблиці А2-А5 Додатка А).

8. Запис повного результату вимірювання

Повний результат вимірювання включає в себе оцінку вихідної величини і приписане їй значення розширеної невизначеності із зазначенням рівня довіри:

$$Y = y \pm U, p = 0{,}95. \qquad (2.22)$$

При запису повного результату вимірювання слід дотримуватися таких правил округлення:

1. Числове значення розширеної невизначеності вказується не більше ніж з двома значущими цифрами.

2. Числове значення вимірюваної величини має закінчуватися десятковим знаком того ж розряду, що і округлена розширена невизначеність.

3. Якщо цифра старшого з розрядів, що відкидаються, у числовому значенні вимірюваної величини або розширеної невизначеності менше 5, то цифри числа, що залишаються, не змінюють, якщо цифра старшого розряду більша або дорівнює 5, то останню залишкову цифру збільшують на одиницю.

4. При округленні розширеної невизначеності його значення слід вказувати із округленням у бік збільшення, якщо при округленні воно зменшується більш ніж на 5%. Слід зазначити, що останнє прави-

ло працює тільки при прямих одноразових вимірюваннях при округленні значення розширеної невизначеності до однієї значущої цифри так, як зазначено в табл. 2.3.

Таблиця 2.3

Особливості округлення розширеної невизначеності до однієї значущої цифри

Значення, що округлюють$\cdot 10^n$, n=0,-1,-2,…	1,06-2,10	2,11-3,15	3,16-4,21	4,22-5,26	5,27-6,31	6,32-7,36	7,37-8,42	8,43-9,47	9,48-10,5
Округлене значення$\cdot 10^n$, n=0,-1,-2,…	2	3	4	5	6	7	8	9	10

9. Складання бюджету невизначеності

Усі отримані у процесі реалізації базового алгоритму результати зручно представляти як бюджет невизначеності (табл. 2.4).

Бюджет включає список всіх вхідних величин, їх оцінок разом з приписаними їм стандартними невизначеностями вимірювання, коефіцієнтами чутливості, числами степенів свободи та внесками невизначеності.

Крім інформації про вхідні величини до бюджету зручно включати інформацію про вимірювану величину: числове значення, сумарну стандартну невизначеність, ефективне число степенів свободи, коефіцієнт охоплення і розширену невизначеність.

Усі величини повинні наводитися у бюджеті із зазначенням одиниць вимірювання.

Таблиця 2.4

Бюджет невизначеності

Вхідна величина	Оцінка вхідної величини	Стандартна невизначеність	Число степенів свободи	Коефіцієнт чутливості	Внесок невизначеності
X_1	x_1	$u(x_1)$	ν_1	c_1	$u_1(y)$
X_2	x_2	$u(x_2)$	ν_2	c_2	$u_2(y)$
…	…	…	…	…	…
X_N	x_N	$u(x_N)$	ν_N	c_N	$u_N(y)$
Вимірювана величина	Значення вимірюваної величини	Сумарна стандартна невизначеність	Ефективне число степенів свободи	Коефіцієнт охоплення	Розширена невизначеність
Y	y	$u_c(y)$	ν_{eff}	k	U

2.3. Недоліки та обмеження оцінювання невизначеності вимірювань у рамках GUM

Проблема міжнародної стандартизації оцінювання якості вимірювань була викликана існуванням у різних країнах нормативних документів, що містять різні підходи до вирішення цього завдання. Це призводило до істотних відмінностей в оцінках значень характеристик точності вимірювань для однакових початкових умов незважаючи на те, що в основу цих документів були покладені підходи, засновані на тих самих методах теорії ймовірності та математичної статистики. Вирішення зазначеної проблеми стало особливо актуальним у зв'язку із проведенням міжнародних звірень національних еталонів.

У 1993 році було оприлюднено “Настанову з подання невизначеності вимірювань” (GUM) [2], як на даний час є фактичним стандартом вираження якості вимірювань у міжнародній практиці. В основу [2] покладено:

• закон розповсюдження невизначеності (ЗРН);

• центральна гранична теорема теорії ймовірності (ЦГТТЙ) із апаратом ефективного числа степенів свободи.

Застосування цих двох основних положень зумовило наступні обмеження та недоліки використання процедури GUM для оцінювання невизначеності вимірювань:

1) при нелінійних модельних рівняннях можуть виникати зміщення оцінок числових значень вимірюваної величини та її невизначеності, оскільки [2]:

а) обмеження нелінійної моделі членами першого порядку розкладання в ряд Тейлора не може розглядатися як допустиме наближення, а діапазон застосування ЗРН, побудованого на такому розкладі не визначений;

б) використання в розкладанні рівняння вимірювання в ряд Тейлора членів другого порядку при реалізації ЗРН виконано коректно в [2] тільки для гауссівських розподілів;

2) некоректно здійснюється знаходження розширеної невизначеності, для закону розподілу вимірюваної величини, побудованого на основі ЦГТТЙ, оскільки:

а) формула Велча-Саттерсвейта, яка наведена в GUM працює тільки при некорелевованих даних і навіть у цьому випадку ступінь її коректності не визначена навіть для нормальних законів розподілу вхідних величин.

б) у ряді випадків PDF вихідний величини не можна вважати ні нормальним, ні масштабованим зміщеним *t*-розподілом, оскільки:

• внесок різних анормальних складових невизначеності може бути суттєво неоднаковий;

• PDF вхідні величини можуть бути асиметричними;

• модель вимірювання може бути суттєво нелінійною.

Таким чином, загальним недоліком процедури оцінювання розширеної невизначеності вимірювань, описаної в GUM, є те, що вона не залежить від законів розподілу, що приписуються вхідним величинам моделі вимірювань.

3. ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ВИМІРЮВАНЬ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Перелічені вище обмеження та недоліки методики GUM [2] призвели до необхідності застосування чисельних методів для оцінювання невизначеності вимірювань [6]. У стандарті [7] розглянуто реалізацію модельного підходу на основі закону розповсюдження розподілів (ЗРР) методом Монте-Карло (ММК). Цей метод застосовують у випадках, коли порушуються умови застосування ЗРН і ЦГТТЙ, які покладені в основу GUM [7, п.1]:

- внесок різних складових невизначеності може бути суттєво неоднаковим;
- розподіл вихідної величини не можна вважати ні нормальним, ні масштабованим зміщеним *t*-розподілом;
- оцінка вихідної величини та відповідна стандартна невизначеність мають приблизно однакове значення;
- модель вимірювання нелінійна, і обмеження членами першого порядку розкладання в ряд Тейлора цієї залежності не може розглядатися як допустиме наближення;
- щільності розподілу ймовірностей вхідних величин асиметричні;
- трудно чи незручно знаходити часткові похідні від функції вимірювання, для обчислення внесків невизначеності.

При цьому ЗРР дозволяє врахувати невизначеність вхідних величин та обчислити стандартну невизначеність оцінки вихідної величини на основі:

1) найкращих оцінок вхідних величин;
2) стандартних невизначеностей оцінок вхідних величин;
3) числа степенів свободи для стандартних невизначеностей типу *A* оцінок вхідних величин;
4) всіх ненульових коваріацій пар цих оцінок.

ММК базується на використанні PDF вхідних величин для подальшого розрахунку PDF вихідної величини. Маючи PDF вихідної величини, можна визначити його математичне сподівання, що використовується як оцінка вихідної величини, і стандартне відхилення, яке використовується як стандартна невизначеність цієї оцінки. Крім того, PDF вихідної величини може бути використана для отримання інтервалу її охоплення, який відповідає заданій ймовірності.

3.1. Основні етапи оцінювання невизначеності вимірювань на основі ММК

Основні етапи оцінювання невизначеності вимірювань на основі ММК включають формулювання вимірювальної задачі, розповсюдження розподілів і отримання остаточного результату.

Формулювання вимірювального завдання включає:

1) завдання вихідної величини Y (вимірюваної величини);

2) виявлення вхідних величин $X_1, X_2, ..., X_N$, від яких залежить вихідна величина Y;

3) складання моделі вимірювання $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$, що визначає взаємозв'язок Y з вхідними величинами $X_1, X_2, ..., X_N$;

4) приписування PDF вхідним величинам $g(X_1), g(X_2), ..., g(X_N)$ (або спільного PDF величинам, які не є незалежними) на основі наявної інформації.

Розповсюдження PDF через модель передбачає визначення PDF вихідної величини $g(Y)$ на основі PDF вхідних величин $g(X_1), g(X_2), ..., g(X_N)$ і моделі вимірювання $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$, яка використовується.

Отримання остаточного результату передбачає використання PDF вихідний величини $g(Y)$ для визначення:

1) оцінки математичного сподівання величини $E(Y)$ як оцінки y;

2) оцінки стандартного відхилення величини Y у вигляді стандартної невизначеності $u(y)$, яка є асоційованою з y;

3) інтервалу охоплення для величини Y, який відповідає заданій ймовірності охоплення p.

Інтервал охоплення Y може бути визначений на основі функції розподілу $G_Y(\xi)$. Якщо задати необхідну імовірність охоплення p і взяти будь-яке число α з інтервалу від нуля до (1-p), то границями 100p %-го інтервалу охоплення для Y будуть значення $G_Y^{-1}(\alpha)$ та $G_Y^{-1}(p+\alpha)$, тобто квантилі розподілу $G_Y(\xi)$ рівнів α та $(p+\alpha)$, відповідно.

Вибір α=(1-p)/2 дозволяє визначити ймовірнісно симетричний 100p %-ний інтервал охоплення, границями якого є квантилі рівнів (1-p)/2 та (1+p)/2.

Якщо щільність розподілу ймовірностей для Y є симетричною щодо математичного сподівання y, то отриманий інтервал буде збігатися з інтервалом $y \pm U_p$, де розширена невизначеність U_p дорівнює добутку стандартної невизначеності $u(y)$ на коефіцієнт охоплення, що відповідає даної щільності розподілу ймовірностей.

Якщо щільність розподілу ймовірностей асиметрична, то більш підходящим може бути вибір α, що відрізняється від (1-p)/2, наприклад, що дозволяє отримати найменший 100%-й інтервал охоплення. Якщо щільність розподілу ймовірностей унімодальна, то вона має таку властивість, що найменший інтервал охоплення буде включати в себе моду цього розподілу. Даному інтервалу буде відповідати таке значення α, яке задовольняє співвідношенню $g_Y[G_Y^{-1}(\alpha)] = g_Y[G_Y^{-1}(p+\alpha)]$. У разі розподілу загального виду значення α, що відповідає найменшому 100p %-му інтервалу охоплення, має бути таким, щоб різниця $G_Y^{-1}(p+\alpha) - G_Y^{-1}(\alpha)$ була мінімальною.

3.2. Реалізація методу Монте-Карло

Чисельна реалізація закону поширення розподілів полягає у виконанні операцій, наведених на (рис. 3.1).

1. Задають PDF для вхідних величин $g(X_1)$, $g(X_2)$, …, $g(X_N)$. Сподівання та стандартні відхилення цих PDF відповідають числовим значенням вхідних величин $x_1, x_2, ..., x_N$ та їх стандартним невизначеностям $u(x_1), u(x_2), \ldots, u(x_N)$. Для корельованих вхідних величин задається спільна PDF із заданою матрицею невизначеності.

2. Генерують N наборів випадкових чисел, об’ємом $M \geq 10^6$ кожен, що мають задані в п.1 PDF вхідних величин.

3. Для встановленої моделі $f(X_1, X_2, ..., X_N)$ призводять перетворення кожної реалізації випадкових чисел $x_{1q}, x_{2q}, ..., x_{Nq}$ ($q = 1, 2, ..., M$) для вхідних величин $X_1, X_2, ..., X_N$ у відповідні реалізації вимірюваної величини $f(x_{1q}, x_{2q}, ..., x_{Nq})$.

4. Ранжуванням отриманих реалізацій вимірюваної величини отримують набір значень $y_1, y_2, ..., y_M$, що відповідає дискретному представленню функції розподілу $G_Y(\xi)$ для Y.

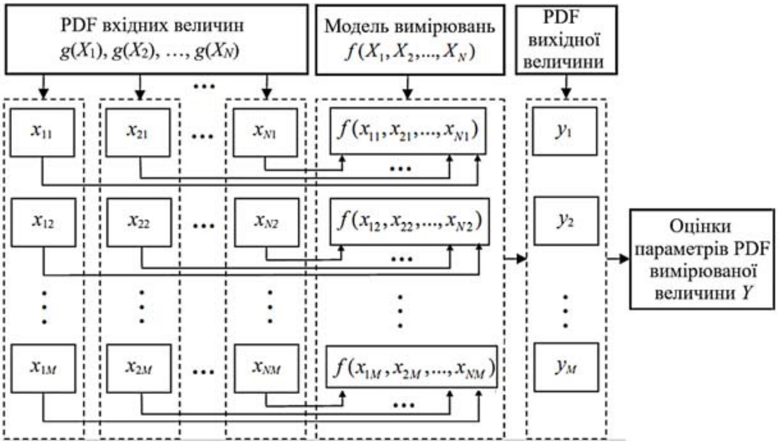


Рисунок 3.1 – Алгоритм реалізації метода Монте-Карло в GUM-S1

5. Використовують отримані значення $G_Y(\xi)$ для визначення оцінок:

- математичного сподівання $E(y)$:

$$E(y) = \frac{1}{M}\sum_{q=1}^{M} y_q \; ; \tag{3.1}$$

- стандартної невизначеності $u(y)$:

$$u(y) = \sqrt{\frac{1}{M-1}\sum_{q=1}^{M}(y_q - \bar{y})^2} \; ; \tag{3.2}$$

- розширеної невизначеності U_p, яка відповідає половині ширини імовірнісно-симетричного інтервалу охоплення для заданої ймовірності охоплення p:

$$U_p = \frac{1}{2}\left[y_{\frac{M(1+p)}{2}} - y_{\frac{M(1-p)}{2}} \right], \tag{3.3}$$

де $y_{\frac{M(1+p)}{2}}$ та $y_{\frac{M(1-p)}{2}}$ відповідно $\frac{M(1+p)}{2}$ та $\frac{M(1-p)}{2}$ члени ранжованого масиву даних вихідної величини $y_1, y_2, ..., y_M$;

- коефіцієнта охоплення:

$$k = \frac{U_p}{u(y)} . \tag{3.4}$$

3.3. Вибір PDF вхідних величин

ММК дозволяє отримати однозначне представлення PDF вимірюваної величини для заданої моделі вимірювань і заданих PDF її вхідних величин. При цьому виникає питання: як на основі апріорної інформації визначати PDF вхідних величин?

Відповідь на це питання дає наведена в [7, п. 6.4.1] інформація про випадкову змінну та вид відповідної PDF (Табл. 3.1), які можна використовувати при завданні законів розподілу вхідних величин.

3.4. Оцінки розподілу Стьюдента

У [7] наведено аналітичне рішення виразу для оцінювання ряду незалежних спостережень $x_1, x_2, ..., x_n$, які отримані з величини, що має розподіл Гаусса $N(\mu_0, \sigma_0^2)$, з невідомими сподіванням μ_0 і дисперсією σ_0^2. Воно має вигляд масштабованого і зсунутого t-розподілу $t_\nu(\bar{x}, s^2/n)$ зі $\nu = n-1$ ступенями свободи:

$$g_x(\xi) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left[1 + \frac{1}{n-1}\left(\frac{\xi - \bar{x}}{s/\sqrt{n}}\right)^2\right]^{-n/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\frac{n-1}{\pi}}\frac{s}{\sqrt{n}}}, \tag{3.5}$$

де $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$;

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2 .$$

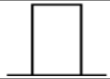
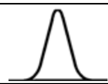
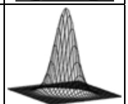
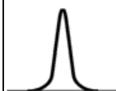
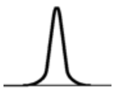
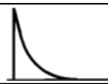
Цей розподіл має сподівання $\bar{x}$ та дисперсію

$$V(X) = \frac{n-1}{n-3}\frac{s^2}{n}, \tag{3.6}$$

яка в $(n-1)/(n-3)$ раз більше оцінки s^2/n, що застосовується в GUM, та визначається тільки для $n > 3$.

Таблиця 3.1

Інформація про випадкову змінну та вигляд відповідної PDF

Інформація про величину	Розподіл ймовірностей	
Нижня и верхня границі: a, b	Рівномірний R(a, b)	
Неточно відомі нижня та верхня границі: a ± d, b ± d	Криволінійно-трапецеїдальний CTrap (a, b, d)	
Сума двох рівномірно розподілених величин с границями (a_1, b_1) и (a_2, b_2)	Трапецеїдальний CTrap (a, b, β); $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$, $\beta = \lvert(b_1 - a_1) - (b_2 - a_2)\rvert/(b - a)$	
Сума двох рівномірно розподілених величин с границями (a_1, b_1) і (a_2, b_2) та рівною шириною $(b_1 - a_1) = (b_2 - a_2)$	Трикутний T (a, b); $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$	
Гармонічне коливання між нижньою (a) та верхньою (b) границями	Арксинусний (U-подібний) U(a, b)	
Найкраща оцінка x та її стандартна невизначеність $u(x)$	Нормальний (Гаусів) $N(x, u^2(x))$	
Найкраща оцінка $\boldsymbol{x}$ векторної величини та її відповідна матриця невизначеності $\boldsymbol{U_x}$	Багатовимірний нормальний (Гаусів) $N(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Ux})$	
Вибірка незалежних спостережень $x_1, \ldots, x_n$ з нормального розподілу з невідомими математичним сподіванням та дисперсією	t-розподіл (Стьюдента); $t_{n-1}(\bar{x}, s^2/n)$; $\bar{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j / n$ $s^2 = \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2 / (n-1)$	
Найкраща оцінка x, розширена невизначеність U_p, коефіцієнт охоплення k_p, число ефективних степенів свободи ν_{eff}	t-розподіл (Стьюдента); $t_{\nu_{eff}}(x, (U_p/k_p)^2)$	
Найкраща оцінка x невід'ємної величини	Експонентний Ex(1/x)	
Число q підрахованих об'єктів у вибірці	Гамма-розподіл G(q+1, 1)	

Таким чином, для $n > 3$ найкраща оцінка X та відповідна ій стандартна невизначеність мають вигляд:

$$x = \overline{x}\,, \tag{3.7}$$

$$u(x) = \sqrt{\frac{n-1}{n-3}}\frac{s(x)}{\sqrt{n}}\,. \tag{3.8}$$

Відповідно до GUM [2] стандартну невизначеність $u(x)$, що відповідає середньому арифметичному n незалежних спостережень, слід обчислювати за формулою

$$u(x) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}}\,, \tag{3.9}$$

а не за формулою (3.8). Як міру достовірності $u(x)$ потрібно використовувати число степенів свободи $\nu = n - 1$. Крім того, оцінкам невизначеності типу B також запропоновано ставити у відповідність число степенів свободи, засноване на суб'єктивному судженні про степінь довіри до цієї оцінки [2, п. G.4.2].

У байєсівскій інтерпретації ймовірності, яка використана у стандарті [7], такого поняття, як надійність оцінки невизначеності, немає. Відповідно, в стандарті [7] число степенів свободи оцінки невизначеності типу A не розглядається як міра цієї невизначеності, а поняття числа степенів свободи для оцінки невизначеності типу B не використовується.

3.5. Ревізія GUM. Співвідношення процедур оцінювання невизначеності вимірювань JCGM 100:2008 и JCGM 100:201X (CD)

Порівняння оцінок сумарної стандартної невизначеності, які одержуються з використанням підходів, описаних у GUM [2] і GUM-S1 [7], показує їх чисельну відмінність, обумовлену, перш за все, відмінністю в знаходженні стандартних невизначеностей вхідних величин за типом A. Це поставило завдання ревізії GUM перед Робочою групою з настанов з метрології (WG1) [8]. Основним мотивом для прийняття рішення про перегляд GUM було те, що GUM, після прийняття GUM-S1, більше не узгоджується з ним.

Перший проект нового GUM (JCGM 100:201X (CD)) [9] був поширений до кінця 2014 р. серед організацій-членів JCGM, національних метрологічних інститутів та інших одержувачів. В основу нового документа був покладений байєсівський підхід, відповідно до якого наявна інформація використовується для встановлення закону розподілу для розглянутих величин, а стандартне відхилення цього розподілу використовується як стандартна невизначеність. Як наслідок, стандартна невизначеність типу *A* більше не є оцінкою стандартного відхилення середнього арифметичного розсіювання показів засобу вимірювань, що спостерігається, а параметром PDF, встановленим на підставі доступного знання. Таким чином, поняття "число степенів свободи" і "ефективне число степенів свободи" стають більше не потрібними.

Зіставлення оцінок параметрів, представлених у JCGM 100:2008 та JCGM 100:201X (CD) наведено в табл. 3.2.

В ній x_i, $u_A(x_i)$ и $u_B(x_i)$ – відповідно значення *i*-ї вхідної величини та її стандартні невизначеності типу *A* і *B*; $\overline{x}_i$, s_i, n_i та ν_i відповідно середнє арифметичне, середньоквадратичне відхилення, число повторних спостережень та число степенів свободи *i*-ї вхідної величини; y, $u_i(y)$, ν_{eff}, $u(y)$ та $U(y)$ – відповідно значення вимірюваної величини, внесок невизначеності *i*-ї вхідної величини в невизначеність вимірюваної величини, ефективне число степенів свободи, стандартна і розширена невизначеності вимірюваної величини; r_{mk} – коефіцієнт кореляції між результатами вимірювань *m*-ї та *k*-ї вхідних величин (при m=k, r_{mk}=1).

Аналіз цієї таблиці показує, що розроблений документ зберіг багато раніше перерахованих методів та їх недоліків, більше того, він додав до них ще й два додаткові [9]:

- збільшення мінімально необхідного числа повторних спостережень до чотирьох;

- спосіб обчислення коефіцієнтів охоплення (т.зв. консервативних коефіцієнтів) не залежить від законів розподілу вхідних величин і призводить до надмірно завищених оцінок розширеної невизначеності (навіть у порівнянні з діючим GUM).

Для усунення перерахованих недоліків авторами були розроблені процедури оцінювання невизначеності вимірювань, засновані на методі ексцесів і законі розповсюдження розширеної невизначеності, що

Таблиця 3.2

Зіставлення процедур оцінювання невизначеності вимірювань у JCGM 100:2008 и JCGM 100:201X (CD)

Параметр, що піддається оцінці	JCGM 100:2008	JCGM 100:201X (CD)
x_i, $u_A(x_i)$	$\bar{x}_i$, $s_i/\sqrt{n_i}$	$\bar{x}_i$, $\sqrt{\frac{n_i-1}{n_i-3}}\frac{s(x_i)}{\sqrt{n_i}}$
x_j, $u_B(x_j)$	На основі апріорної інформації про закони розподілу вхідних величин	
y	$f(x_1, x_2, \ldots x_m)$	
$u_j(y)$	$c_j u(x_j)$, $c_j = \partial y/\partial x_j$	
$u(y)$	$\sqrt{\sum_{\substack{j=1\\i=1}}^{m} r_{ij} u_i(y) u_j(y)}$	
$U(y)$	$t_{0,9545;\nu_{eff}} u(y)$, $\nu_{eff} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^{N}\frac{u_i^4(y)}{\nu_i}}$	$k \cdot u(y)$, $k = 4,47$ (для невідомого розподілу); $k = 2,98$ (для симетричного унімодального розподілу)

дозволяють забезпечити отримання оцінок числових значень і невизначеності результату вимірювань, зіставних з оцінками, які одержують при використанні ММК.

3.6. Обмеження використання ММК у випробувальних та калібрувальних лабораторіях

Слід зазначити, що прямому використанню ММК для оцінювання невизначеності вимірювань у випробувальних та калібрувальних лабораторіях, які є акредитованими на відповідність вимогам стандарту ISO/IEC 17025:2017 [10], заважають наступні фактори:

• відмінність оцінок невизначеності вимірювань, що одержано під час використання ММК від оцінок, які одержано з використанням підходу GUM;

• відсутність спеціалізованих сертифікованих програмних засобів для оцінювання невизначеності вимірювань на основі ММК;

• неможливість документування покрокової процедури оцінювання невизначеності вимірювань на основі ММК.

Тому ММК можна розглядати як референтний метод, що дозволяє здійснити валідацію методик оцінювання невизначеності при суттєво нелінійних моделях вимірювань, наявності домінуючих анормальних внесків у бюджеті невизначеності та інших відхилень від ЗРН та ЦГТТЙ.

4. ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ВИМІРЮВАНЬ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ЕКСЦЕСІВ І ЗАКОНУ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ РОЗШИРЕНОЇ НЕВИЗНАЧЕННОСТІ

Процедури, які викладені у цьому розділі, призначені для оцінювання невизначеності вимірювань, коли виконуються такі умови:

1. Модель вимірювання – дійсна, явна, одновимірна, лінійна або така, що допускає лінеаризацію.
2. Закони розподілу ймовірностей вхідних величин – симетричні.
3. Закон розподілу генеральної сукупності спостережуваного розсіювання показань вимірювального приладу (ВП) – нормальний.

4.1. Модель вимірювання

Дійсна, явна, одновимірна модель вимірювань записується як:

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_N), \tag{4.1}$$

де Y – вимірювана величина; $X_1, X_2, ..., X_N$ – вхідні величини.

Вхідні величини можна класифікувати як:

• величини, значення та невизначеності яких визначаються безпосередньо в даному вимірюванні і можуть бути отримані з одиничного показу вимірювального приладу (ВП) або показів, що повторюються;

• поправки на покази ВП та поправки на впливові вхідні величини, такі як температура навколишнього середовища, барометричний тиск, вологість та ін;

• величини, значення та невизначеності яких введені у вимірювання із зовнішніх джерел, таких як відкалібровані еталони, сертифіковані стандартні зразки та дані, зазначені у довідниках.

4.2. Оцінювання вхідних величин, їх стандартних невизначеностей та коваріацій

Якщо безпосередньо в даному вимірюванні отримано одиничний показ x_i ВП вхідної величини X_i, то цей показ і є значенням цієї величини.

Інструментальну стандартну невизначеність цієї величини отримують з інформації, взятої з сертифіката калібрування ВП – розширеної інструментальної невизначеності U_{pi} та коефіцієнта охоплення k_{pi}:

$$u(x_i) = \frac{U_{pi}}{k_{pi}}, \qquad (4.2)$$

де p – рівень довіри, який зазвичай становить приблизно 0,95, тобто точно 0,9545. Для цієї ймовірності інформацію про щільність розподілу ймовірності (PDF), яка приписується цій вхідній величині, можна отримати з табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Коефіцієнти охоплення рівня довіри p=0,9545 і відповідні їм PDF*

k_{pi}	1,411	1,653	1,653…1,927
PDF	Арксинусний	Рівномірний	Трапецієвидний
k_{pi}	1,927	2	>2
PDF	Трикутний	Нормальний	Стьюдента

* *ПРИМІТКА. Номограми для знаходження параметра трапецієвидного закону розподілу та ефективного числа степенів свободи для закону розподілу Стьюдента для ймовірності 0,9545 наведено у додатку В.*

Якщо є апріорна інформація про мінливість одиничного показу x_i ВП вхідної величини X_i, що характеризується стандартним відхиленням s_i, в модель вимірювання необхідно додати поправку на випадкову похибку ε_i, значення якої $\hat{\varepsilon}_i = 0$, а стандартна невизначеність $u(\hat{\varepsilon}_i)$ дорівнює $s_i\sqrt{\nu_i/(\nu_i-2)}$, де ν_i – число степенів свободи, яка приписується і-й поправці.

Якщо безпосередньо в даному вимірюванні отримані n_i показів ВП, що повторюються $x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in_i}$, то оцінкою x_i даної величини X_i є їх середнє арифметичне:

$$x_i = \overline{x}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{q=1}^{n_i} x_{iq}. \qquad (4.3)$$

У цьому випадку модель вимірювання додається поправка ε_i на випадкову похибку, значення якої $\hat{\varepsilon}_i = 0$, а стандартна невизначеність визначається за формулою:

$$u(\hat{\varepsilon}_i) = \sqrt{\frac{1}{n_i(n_i-1)}\sum_{q=1}^{n_i}(x_{iq}-\overline{x}_i)^2}\sqrt{\frac{n_i-1}{n_i-3}} = \sqrt{\frac{1}{n_i(n_i-3)}\sum_{q=1}^{n_i}(x_{iq}-\overline{x}_i)^2} \;. \quad (4.4)$$

Цій поправці в [9] приписується незміщений масштабований закон розподілу Стьюдента з числом ступенів свободи $\nu_i = n_i - 1$. Оцінки стандартних невизначеностей (4.4) поправок ε_i мають сенс при $n_i \geq 4$ і справедливі лише для нормально розподілених результатів багаторазових вимірювань [9].

Якщо між вимірюваннями двох вхідних величин X_k, X_m спостерігається кореляція, то оцінка їх коваріації знаходиться за формулою:

$$\mathrm{cov}(x_k, x_m) = r_{km} u(\hat{\varepsilon}_k) u(\hat{\varepsilon}_m)\,, \quad (4.5)$$

де r_{km} – оцінка коефіцієнта кореляції, яка обчислюється за формулою:

$$r_{km} = \frac{\sum_{q=1}^{n}(x_{kq}-\overline{x}_k)(x_{mq}-\overline{x}_m)}{\sqrt{\sum_{q=1}^{n}(x_{kq}-\overline{x}_k)^2 \sum_{q=1}^{n}(x_{mq}-\overline{x}_m)^2}}\,. \quad (4.6)$$

Поправки на величини, що впливають δ_i, які мають оцінене значення $\hat{\delta}_i$ і стандартну невизначеність u_i вводяться шляхом адитивної або мультиплікативної корекції відповідної вхідної або вимірюваної величин.

Якщо вхідна величина X_i задана границями її мінливості $\pm\theta_i$, то її стандартну невизначеність знаходять за формулою:

$$u_i = \frac{\theta_i}{\alpha_i}\,, \quad (4.7)$$

де α_i – коефіцієнт, що визначається PDF X_i всередині границь її мінливості (табл. 4.2).

Таблиця 4.2

Коефіцієнти α для перерахування границь розподілу вхідної величини $\pm\theta_i$ в стандартну невизначеність

PDF	Арксинусний	Рівномірний	Трикутний
α	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$

Величинам X_i, які введені у вимірювання із зовнішніх джерел, таких як відкалібровані еталони, сертифіковані стандартні зразки і дані, зазначені в довідниках приписують значення x_i і стандартні невизначеності u_i на основі апріорної інформації, отриманої з цих джерел. Всім вхідним величинам апріорно приписують PDF, які характеризуються ексцесами η_i, значення яких наведено у табл. 4.3.

Таблиця 4.3

Ексцеси законів розподілу вхідних величин

Закон розподілу	Значення ексцесу
Арксинусний	$-1{,}5$
Рівномірний	$-1{,}2$
Рівномірний з неточно заданими границями (β – відносне відхилення границь рівномірного розподілу)	$-1{,}2\left[1+\frac{3\beta^2(\beta^2+6)}{(\beta^2+3)^2}\right]$
Трапецеїдальний з параметром α_T	$-1{,}2(1+\alpha_T^4)/(1+\alpha_T^2)^2$
Трикутний	$-0{,}6$
Нормальний	0
Стьюдента з числом степенів свободи ν	$6/(\nu-4)$

Обґрунтування вибору закону розподілу вхідної величини на основі доступної інформації наведено в [7].

4.3. Обчислення числового значення вимірюваної величини

Оцінку вимірюваної величини обчислюють шляхом підстановки в (4.1) отриманих оцінок вхідних величин $x_1, x_2, ..., x_N$:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_N)\,. \tag{4.8}$$

При нелінійній моделі такий спосіб оцінювання дає незміщений результат лише за відсутності невизначеності оцінок вхідних величин. За наявності значних невизначеностей вхідних величин зазначений спосіб призводить до зміщення оцінки вимірюваної величини [11]. Усунути цей недолік можна шляхом введення поправки до числового значення вимірюваної величини. Порядок обчислення поправки, критерій її значущості та спосіб отримання незміщеної оцінки числового значення результату вимірювання наведено в додатку С.

4.4. Обчислення стандартної невизначеності вимірюваної величини

Обчислення стандартної невизначеності вимірюваної величини здійснюється в GUM методом підсумовування дисперсій та коваріацій.

За відсутності кореляції між результатами вимірювання вхідних величин стандартну невизначеність вимірюваної величини знаходять за такою формулою:

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 u_i^2}\ , \tag{4.9}$$

де $c_i = \partial y / \partial x_i$ – коефіцієнти чутливості, які являють собою відповідні частинні похідні від Y по X_i, які оцінені при $X_1 = x_1, ..., X_N = x_N$.

За наявності кореляції між k-ю та m-ю вхідними величинами стандартну невизначеність вимірюваної величини $u(y)$ знаходять з виразу:

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 u_i^2 + 2 c_k c_m \operatorname{cov}(x_k, x_m)}\ . \tag{4.10}$$

Такий спосіб оцінювання дає незміщений результат тільки при лінійній моделі. При нелінійній моделі за наявності значних невизначеностей вхідних величин зазначений спосіб призводить до зміщення оцінки стандартної невизначеності вимірюваної величини [12], усунути яку можна шляхом введення поправки. Порядок обчислення поправки, оцінювання її значущості та отримання незміщеної оцінки стандартної невизначеності результату вимірювання наведено в додатку *D*.

4.5. Обчислення розширеної невизначеності методом ексцесів

Розширена невизначеність вимірювань обчислюється цим методом за такою формулою:

$$U = k_p \cdot u(y)\ , \tag{4.11}$$

де k_p – коефіцієнт охоплення, який для рівня довіри 0,95 розраховують за формулою [13]:

$$k_{0,95} = \begin{cases} 0,1085\eta^3 + 0,1\eta + 1,96, \text{ при } \eta < 0; \\ t_{0,95;(6/\eta+4)} \cdot \sqrt{\dfrac{3+\eta}{3+2\eta}}, \quad \text{при } \eta \ge 0, \end{cases} \tag{4.12}$$

а для рівня довіри 0,9545 – за формулою [13]:

$$k_{0,9545} = \begin{cases} 0,12\eta^3 + 0,1\eta + 2, \text{ при } \eta < 0; \\ t_{0,9455;(6/\eta+4)} \cdot \sqrt{\dfrac{3+\eta}{3+2\eta}}, \quad \text{при } \eta \ge 0, \end{cases} \tag{4.13}$$

Слід зазначити, що при $\eta \ge 0$ з відхиленням не більше 2 % можна прийняти $k_{0,95} = 1,96$ та $k_{0,9545} = 2$.

У виразах (4.12-4.13) η – ексцес розподілу вимірюваної величини, який визначається за відсутності кореляції між результатами вимірювань вхідних величин як:

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^{N} \eta_i c_i^4 u_i^4}{u^4(y)} \ . \tag{4.14}$$

причому η_i – ексцеси вхідних величин, взяті з табл. 4.3; $u(y)$ – стандартна невизначеність вимірюваної величини, що визначається за формулою (4.9).

За наявності кореляції між результатами вимірювань k-ї та m-ї вхідних величин, ексцес розподілу вимірюваної величини слід обчислювати за формулою [14]:

$$\eta = \frac{\sum\limits_{i=1;i\neq k;i\neq m}^{N} \eta_i c_i^4 u_i^4 + \eta_{km}[c_k^2 u_k^2 + 2c_k c_m \operatorname{cov}(x_k, x_m) + c_m^2 u_m^2]^2}{u^4(y)} \ , \tag{4.15}$$

де $u(y)$ – стандартна невизначеність вимірюваної величини, що визначається за формулою (4.10); $\eta_{km} = \eta_k = \eta_m = 6/(n-5)$ – ексцес k-ї (m-ї) вхідної величини.

Всі відомості про вхідні та вимірювані величини, отримані вище, зведені в табл. 4.4, яка є бюджетом невизначеності.

Таблиця 4.4

Бюджет невизначеності вимірювань для метода ексцесів

Вхідні величини	Значення вхідних величин	Стандартні невизначеності вхідних величин	Ексцеси вхідних величин	Коефіцієнти чутливості	Внески невизначеності
X_1	x_1	$u(x_1)$	η_1	c_1	$c_1u(x_1)$
X_2	x_2	$u(x_2)$	η_2	c_2	$c_2u(x_2)$
…	…	…	…	…	…
X_N	x_N	$u(x_N)$	η_N	c_N	$c_Nu(x_N)$
Вимірювана величина	Значення вимірюваної величини	Стандартна невизначеність вимірюваної величини	Ексцес вимірюваної величини	Коефіцієнт охоплення	Розширена невизначеність
Y	y	$u(y)$	η	k	U

Відхилення оцінок розширеної невизначеності, одержані методом ексцесів від оцінок, отриманих за допомогою ММК, не перевищує ±2,5%.

Слід зазначити, що виконання нерівності про наявність зсуву вимірюваної величини (С7) свідчить про асиметрію її закону розподілу. В цьому випадку для знаходження розширеної невизначеності необхідно використовувати ММК.

Так як ексцес розподілу Стьюдента існує при числі ступенів свободи більше 4, то метод ексцесів може бути застосований для числа повторних вимірювань вхідних величин більше 5. При меншій кількості повторних вимірювань для розрахунку розширеної невизначеності слід застосовувати закон розповсюдження розширеної невизначеності [15], описаний у підрозділі 4.6.

4.6 Обчислення розширеної невизначеності за допомогою закону розповсюдження розширеної невизначеності

Закон розповсюдження розширеної невизначеності (ЗРРН) застосовується для оцінювання розширеної невизначеності при числі повторних спостережень вхідних величин $n \geq 4$.

Вираз для обчислення розширеної невизначеності для ймовірності 0,95 у цьому випадку має вигляд [15]:

$$U = \sqrt{U_A^2 + U_B^2}\,, \tag{4.16}$$

де $U_A(y)$, $U_B(y)$ – розширені невизначеності типу *A* і *B* вимірюваної величини, відповідно.

Розширена невизначеність типу *A* обчислюється за формулою:

$$U_A = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{t^2_{(0,95;\nu_i)} c_i^2 u^2(\hat{\varepsilon}_i)(n_i - 3)}{n_i - 1}}\,, \tag{4.17}$$

де $u(\hat{\varepsilon}_i)$ визначається виразом (4); $t_{(0,95;\nu_i)}$ – коефіцієнт Стьюдента для ймовірності 0,95 та числа степенів свободи $\nu_i = n_i - 1$.

Стандартна невизначеність поправки на випадкову похибку вимірюваної величини визначається за формулою:

$$u(\varepsilon) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(\hat{\varepsilon}_i)}\,, \tag{4.18}$$

Розширена невизначеність типу *B* обчислюється за такою формулою:

$$U_B = k_B \cdot u_B(y)\,, \tag{4.19}$$

де $u_B(y)$ – стандартна невизначеність типу *B* вимірюваної величини:

$$u_B(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 u_B^2(x_i)}\,, \tag{4.20}$$

k_B – коефіцієнт охоплення типу *B*, що обчислюється методом ексцесів за формулою:

$$k_B = 0{,}1085\eta_B^3 + 0{,}1\eta_B + 1{,}96\,. \tag{4.21}$$

Тут η_B – ексцес розподілу композиції складових вимірюваної величини, що оцінюються за типом *B*, який дорівнює:

$$\eta_B = \frac{\sum_{i=1}^{N} \eta_B(x_i) c_i^4 u_B^4(x_i)}{u_B^4(y)}\,. \tag{4.22}$$

де $\eta_B(x_i)$ – ексцес розподілу типу *B* *i*-ї вхідної величини.

Оцінку сумарної стандартної невизначеності вимірюваної величини знаходять за формулою:

$$u(y) = \sqrt{[u(\hat{\varepsilon})]^2 + [u_B(y)]^2}\ . \tag{4.23}$$

При реалізації ЗРРН необхідно скласти два бюджети невизначеності: для складових, оцінених за типом *B* (табл. 4.5) і для поправок на випадкову похибку (табл. 4.6).

Таблиця 4.5

Бюджет невизначеності вимірювань для складових типу *B*

Вхідні величини	Значення вхідних величин	Стандартні невизначеності вхідних величин	Ексцеси вхідних величин	Коефіцієнти чутливості	Внески невизначеності
X_1	x_1	$u_B(x_1)$	η_1	c_1	$c_1 u_B(x_1)$
X_2	x_2	$u_B(x_2)$	η_2	c_2	$c_2 u_B(x_2)$
…	…	…	…	…	…
X_N	x_N	$u_B(x_N)$	η_N	c_N	$c_N u_B(x_N)$
Вимірювана величина	Значення вимірюваної величини	Стандартна невизначеність вимірюваної величини	Ексцес вимірюваної величини	Коефіцієнт охоплення	Розширена невизначеність типу *B*
Y	y	$u_B(y)$	η_B	k_B	U_B

Якщо між результатами вимірювань двох вхідних величин X_k, X_m спостерігається кореляція, то стандартна невизначеність поправки на випадкову похибку вимірюваної величини визначається за формулою [15]:

$$u(\hat{\varepsilon}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(\hat{\varepsilon}_i) + 2c_k c_m \operatorname{cov}(x_k, x_m)}\ , \tag{4.24}$$

а розширена невизначеність типу *A* обчислюється як:

$$U_A = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{t^2_{(0,95;\nu_i)} c_i^2 u^2(\hat{\varepsilon}_i)(n_i - 3)}{n_i - 1} + 2t^2_{(0,95;\nu)} c_k c_l \operatorname{cov}(x_k, x_m) \frac{(n-3)}{(n-1)}}, \tag{4.25}$$

де $n_k = n_l = n$.

Таблиця 4.6

Бюджет невизначеності вимірювань для поправок на випадкову похибку

Вхідні величини	Значення вхідних величин	Стандартні невизначеності вхідних величин	Числа степенів свободи вхідних величин	Коефіцієнти чутливості	Внески невизначеності
ε_1	0	$u(\hat{\varepsilon}_1)$	ν_1	c_1	$c_1 u(\varepsilon_1)$
ε_2	0	$u(\hat{\varepsilon}_2)$	ν_2	c_2	$c_2 u(\varepsilon_2)$
…	…	…	…	…	…
ε_N	0	$u(\hat{\varepsilon}_N)$	ν_N	c_N	$c_N u(\varepsilon_N)$
Вимірювана величина	Значення вимірюваної величини	Стандартна невизначеність вимірюваної величини			Розширена невизначеність типу A
ε	0	$u(\hat{\varepsilon})$			U_A

Відхилення оцінок розширеної невизначеності, отриманих цим методом від оцінок, отриманих за допомогою ММК, не перевищує ±4,5 %.

Перелік літератури з прикладами оцінювання невизначеності вимірювань обома методами наведено в Додатку G.

5. РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ ЕКСЦЕСІВ ПРИ КАЛІБРУВАННІ ЗАСОБІВ ВИМІРЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ

Невід'ємною умовою забезпечення єдності вимірювань є **метрологічна простежуваність** (metrological traceability) – властивість результату вимірювання, відповідно до якого він може бути співвіднесений з основою для порівняння через документований нерозривний ланцюг калібрувань, кожен з яких робить свій внесок у невизначеність вимірювань [1, п. 2.41].

У цьому визначенні "основою для порівняння" може бути визначення одиниці вимірювання через її практичну реалізацію, або методика вимірювань, що включає одиницю вимірювання для величин, відмінних від порядкових, або еталон.

Калібрування проводять лабораторії, які отримали акредитацію від органів, які уклали MRA [16] з аналогічними органами інших країн.

Згідно з [1, п. 2.39], **калібрування** (calibration) – операція, в ході якої при заданих умовах на першому етапі встановлюють співвідношення між значеннями величин з невизначеностями вимірювань, які забезпечують еталони, і відповідними показами ЗВТ, що калібрується, з властивими їм невизначеностями, а на другому етапі на основі цієї інформації встановлюють співвідношення, що дозволяє згодом отримувати результат вимірювання виходячи з показу відкаліброваного ЗВТ.

При цьому, відповідно до вимог ISO/IEC 17025:2017 [10], калібрувальні лабораторії (КЛ) повинні мати процедуру оцінювання невизначеності вимірювань (НВ).

Надійна оцінка розширеної невизначеності не може бути отримана без урахування законів розподілу вхідних величин. Для завдань калібрування достовірну оцінку розширеної невизначеності можна отримати з урахуванням методу ексцесу (КМ), розробленого авторами [13]. Його застосування дозволяє отримати оцінки розширеної невизначеності, близькі до оцінок, отриманих методом МКМ.

Нижче розглянуто застосування методу ексцесів для оцінювання НВ для основних схем калібрування, що застосовуються в метрологічної практиці [17-19].

Як показано у розділі 4, метод ексцесів може бути застосований в тому випадку, якщо закони розподілу вхідних величин симетричні, модель вимірювання лінійна або може бути лінеаризованою, число багаторазових вимірювань вхідних величин не менше 6. Всі ці обмеження відповідають реальним умовам калібрування. Рекомендації щодо вибору кількості спостережень при реалізації методу ексцесів наведені в [20].

5.1. Засоби та методи вимірювань, які застосовуються при калібруванні

Засіб вимірювальної техніки (measuring instrument) – пристрій, що використовується для виконання вимірювань, у тому числі у поєднанні з одним або декількома додатковими пристроями [1, п. 3.1].

ПРИМІТКА. ЗВТ може бути вимірювальним приладом (ВП) або матеріальною мірою (ММ).

Вимірювальний прилад (indicating measuring instrument) – ЗВТ, який забезпечує вихідний сигнал, що несе інформацію про значення вимірюваної величини [1, п. 3.3].

Матеріальна міра (material measure) – ЗВТ, який відтворює у процесі використання чи постійно зберігає приписані значення величин одного чи більше даних родів [1, п. 3.6].

ПРИМІТКА 1. Показами ММ є значення величини, що їй приписано.

Пристрій порівняння (ПП) (transfer device) – пристрій, який використовується як засіб звірення еталонів [1, п. 5.9].

Метод вимірювань (measurement method) – загальний опис логічної послідовності операцій під час вимірювання [1, п. 2.5].

Метод безпосередніх вимірювань (direct method of measurement) – метод вимірювань, при якому значення величини визначають безпосередньо за індикуючим ВП [21, п. 311-02-01].

ПРИМІТКА. Метод вимірювання залишається безпосереднім, навіть якщо необхідно провести додаткові вимірювання та визначити значення впливових величин, щоб ввести поправки.

Метод непрямих вимірювань ([21], 311-02-02) (indirect method of measurement) – метод вимірювань, при якому значення величини отримують методом безпосередніх вимірювань інших величин, пов’язаних з вимірюваною величиною за допомогою відомої залежності.

Метод вимірювання звірянням/метод порівняння з мірою (comparison method of measurement) ([21], 311-02-03) – метод вимірювання, заснований на порівнянні вимірюваної величини з відомою величиною того ж виду.

5.2. Калібрування вимірювального приладу

5.2.1. Пряме вимірювання ВП, що калібрується, величини, яка відтворюється еталонною ММ

Схема калібрування для цього випадку наведена на рис. 5.1.

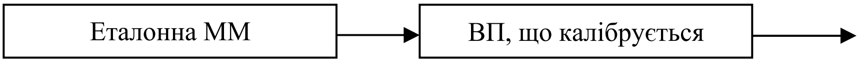


Рис. 5.2 – Схема прямого вимірювання ВП, що калібрується, величини, що відтворюється еталонною ММ

При реалізації цієї схеми систематична похибка ВП, що калібрується Δ, в точці калібрування визначається за формулою:

$$\Delta = (X_c + \Delta_c) - (X_s + \Delta_s), \tag{5.1}$$

де X_c – величина, яка вимірюється ВП, що клібрується; Δ_c – поправка на похибку квантування (відліку) ВП, що калібрується; X_s – величина, що відтворюється еталонною ММ; Δ_s – поправка на сумарну додаткову похибку еталонної ММ, яка пов’язана з дрейфом відтворюваного нею значення з часу останнього калібрування, відхиленнями в умовах експлуатації, впливом на значення, що відтворюється ММ, ВП, що калібрується, тощо.

При багаторазових вимірюваннях значення X_c визначається як середнє арифметичне результатів n показів x_{cq}:

$$x_c = \overline{x}_c = \frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n} x_{cq} . \tag{5.2}$$

Оцінка значення, що відтворюється еталонною ММ, x_s, береться з її сертифіката калібрування.

Зазвичай Δ_c та Δ_s є центрованими величинами (з оціненими значеннями $\hat{\Delta}_c$ і $\hat{\Delta}_s$, які дорівнюють нулю).

Тому оцінка систематичної похибки ВП, що калібрується, дорівнюватиме:

$$\hat{\Delta} = x_c - x_s . \tag{5.3}$$

Вхідним величинам рівняння (5.1) відповідають такі стандартні невизначеності:

- стандартна невизначеність, яка пов’язана зі спостережуваною мінливістю показів ВП, що калібрується, яка оцінюється за типом *A* при виконанні багаторазових вимірювань:

$$u_A(\overline{x}_c) = \sqrt{\frac{n-1}{n-3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{q=1}^{n}(x_{cq} - \overline{x}_c)^2}\ ; \qquad (5.4)$$

- стандартна невизначеність відліку ВП, що калібрується, у припущенні про рівномірний закон розподілу:

$$u_B(\hat{\Delta}_c) = \frac{d}{2\sqrt{3}}\,, \qquad (5.5)$$

де d − дискретність відліку;

- стандартна інструментальна невизначеність еталонної міри, яка отримана із значень розширеної невизначеності $U(x_s)$ та коефіцієнта охоплення k_s, зазначених у сертифікаті калібрування:

$$u_B(x_s) = \frac{U(x_s)}{k_s}; \qquad (5.6)$$

- стандартна невизначеність поправки $\hat{\Delta}_s$ в припущенні про рівномірний закон розподілу її всередині границь $\pm\theta_s$:

$$u_B(\hat{\Delta}_s) = \frac{\theta_s}{\sqrt{3}}\,, \qquad (5.7,а)$$

або при оцінюванні її за значеннями еталонної міри x_{si}, взятими з L останніх її сертифікатів калібрування:

$$u_B(\hat{\Delta}_s) = \sqrt{\frac{L-1}{L-3}}\sqrt{\frac{1}{L-1}\sum_{q=1}^{L}(x_{sq} - \overline{x}_s)^2}\,, \quad \overline{x}_s = \frac{1}{L}\sum_{q=1}^{L}x_{sq}\,. \qquad (5.7,б)$$

Сумарна стандартна невизначеність вимірювання систематичної похибки ВП, що калібрується, дорівнюватиме:

$$u_c\left(\hat{\Delta}\right) = \sqrt{u_A^2(\overline{x}_c) + u_B^2(\hat{\Delta}_c) + u_B^2(x_s) + u_B^2(\hat{\Delta}_s)}\,. \qquad (5.8)$$

Ексцес вимірюваної величини з урахуванням табл. 4.3 розраховується як:

$$\eta = \frac{\frac{6}{n-5} u_A^4(\overline{x}_c) + \eta(x_s)\cdot u_B^4(x_s) - 1{,}2\cdot u_B^4(\hat{\Delta}_c) + \eta(\hat{\Delta}_s)\cdot u_B^4(\hat{\Delta}_s)}{u_c^4(\hat{\Delta})}, \qquad (5.9)$$

де $\eta(x_s)$ – ексцес, який приписується $u_B(x_s)$ згідно з табл. 4.3 в залежності від закону розподілу, який указано в сертифікаті її калібрування еталонної ММ; $\eta(\hat{\Delta}_s)$ – ексцес, який приписується $u_B(\hat{\Delta}_s)$ в залежності від способу її знаходження:

$$\eta(\hat{\Delta}_s) = \begin{cases} -1{,}2, & \text{для формули}\,(5.7,\text{а}); \\ \dfrac{6}{L-5}, & \text{для формули}\,(5.7,\text{б}). \end{cases} \qquad (5.10)$$

Розширена невизначеність вимірювань обчислюється формулою (4.11):

$$U = k_p \cdot u_c(\hat{\Delta}),$$

де k_p – коефіцієнт охоплення, який для рівня довіри 0,95 розраховують за формулою (4.12):

$$k_{0,95} = \begin{cases} 0{,}1085\eta^3 + 0{,}1\eta + 1{,}96, \text{ при } \eta < 0; \\ 2, \quad \text{при } \eta \ge 0, \end{cases}$$

а для рівня довіри 0,9545 – за формулою (4.13):

$$k_{0,9545} = \begin{cases} 0{,}12\eta^3 + 0{,}1\eta + 2, \text{ при } \eta < 0; \\ 2, \quad \text{при } \eta \ge 0. \end{cases}$$

Бюджет невизначеності для даної схеми калібрування наведено в табл. 5.1.

Таблиця 5.1

Бюджет невизначеності прямих вимірювань ВП, що калібрується, величини, яка відтворюється еталонною ММ

Вхідна величина	Оцінка вхідної величини	Стандартна невизначе-ність	Ексцес вхідної величини	Коефіцієнт чутливості	Внесок невизначе-ності
1	2	3	4	5	6
X_c	(5.2)	(5.4)	6/(n-5)	1	$u_A(\overline{x}_c)$
Δ_c	0	(5.5)	-1,2	1	$u_B(\hat{\Delta}_c)$

Продовження табл. 5.1

1	2	3	4	5	6
X_s	x_s	(5.6)	$\eta(x_s)$	-1	$-u_B(x_s)$
Δ_s	0	(5.7)	-1,2; 6/(L-5)	-1	$-u_B(\hat{\Delta}_s)$
Вихідна величина	Оцінка вихідної величини	Сумарна стандартна невизначе-ність	Ексцес вимірюваної величини	Коефіцієнт охоплення	Розширена невизначе-ність
Δ	(5.3)	(5.8)	(5.9)	(4.12),(4.13)	(4.11)

5.2.2. Звірення ВП, що калібрується, та еталонного ВП за допомогою пристрою порівняння

Схема калібрування для цього випадку наведена на рис. 5.2.

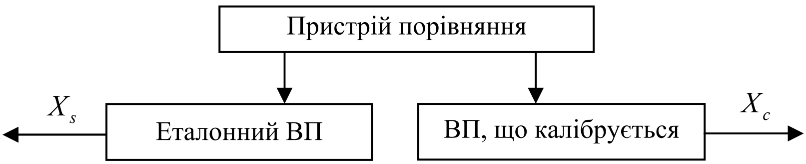


Рис. 5.2 – Схема звірення ВП, що калібрується та еталонного ВП

Як джерело сигналу вимірювальної інформації для обох ВП виступає пристрій порівняння (ПП).

Модельне рівняння для цього випадку калібрування має вигляд:

$$\Delta = (X_c + \Delta_c) - (X_s + \Delta_b + \Delta_s) + \Delta_{\text{пп}}, \tag{5.11}$$

де X_c, X_s – величини, що вимірюються, ВП, що калібрується та еталонним ВП, відповідно; Δ_c – поправка на похибку квантування (відліку) ВП, що калібрується; Δ_b – поправка на зсув, який указаний в сертифікаті калібрування еталонного ВП; Δ_s – поправка на сумарну додаткову похибку еталона, пов'язану з дрейфом значення з часу останнього калібрування, відхиленнями в умовах експлуатації та ін; $\Delta_{\text{пп}}$ – нееквівалентність завдання ПП значень вхідних величин для ВП, що калібрується та еталонного ВП.

При багаторазових вимірюваннях оцінки X_c та X_s визначаються як середні арифметичні результатів, відповідно n_c та n_s, показів ВП:

$$\overline{x}_c = \frac{1}{n_c}\sum_{q=1}^{n_c} x_{cq}\ , \tag{5.12}$$

$$\overline{x}_s = \frac{1}{n_s}\sum_{q=1}^{n_s} x_{sq}\ . \tag{5.13}$$

Зазвичай Δ_c, Δ_s та $\Delta_{\text{пп}}$ розглядають як центровані випадкові величини (з оціненими значеннями $\hat{\Delta}_{\text{c}}$, $\hat{\Delta}_{\text{s}}$ та $\hat{\Delta}_{\text{пп}}$, які дорівнюють нулю).

Тому оцінка систематичної похибки ВП, що калібрується дорівнюватиме:

$$\hat{\Delta} = \overline{x}_c - \overline{x}_s - \hat{\Delta}_b\,. \tag{5.14}$$

Вхідним величинам рівняння (5.9) відповідають такі стандартні невизначеності:

- стандартна невизначеність, що пов’язана зі спостережуваною мінливістю показів ВП, що калібрується, яка оцінюється за типом *A* при виконанні багаторазових вимірювань:

$$u_A(\overline{x}_c) = \sqrt{\frac{n_c - 1}{n_c - 3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n_c(n_c - 1)}\sum_{q=1}^{n_c}(x_{cq} - \overline{x}_c)^2}\ ; \tag{5.15}$$

- стандартна невизначеність відліку ВП, що калібрується, у припущенні про його рівномірний закон розподілу, дорівнює:

$$u_B(\hat{\Delta}_c) = \frac{d}{2\sqrt{3}}\,, \tag{5.16}$$

де d – дискретність відліку;

- стандартна невизначеність, що пов’язана з розсіюванням показів еталонного ВП, що спостерігається, яка оцінюється за типом *A* при виконанні багаторазових вимірювань:

$$u_A(\overline{x}_s) = \sqrt{\frac{n_s - 1}{n_s - 3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n_s(n_s - 1)}\sum_{q=1}^{n_s}(x_{sq} - \overline{x}_s)^2}\ ; \tag{5.17}$$

- стандартна інструментальна невизначеність еталонного ВП, яка отримана із значень розширеної невизначеності $U(x_s)$ та коефіцієнта охоплення k_s, зазначених у сертифікаті калібрування:

$$u_B(\Delta_b) = \frac{U(x_s)}{k_s}; \tag{5.18}$$

- стандартна невизначеність поправки $\hat{\Delta}_s$ у припущенні про рівномірний закон розподілу її всередині границь $\pm\theta_s$:

$$u_B(\hat{\Delta}_s) = \frac{\theta_s}{\sqrt{3}}, \tag{5.19,а}$$

або при оцінюванні її за значеннями зміщення еталонного ВП, взятими з L останніх його сертифікатів калібрування:

$$u_B(\hat{\Delta}_s) = \sqrt{\frac{L-1}{L-3}}\sqrt{\frac{1}{L-1}\sum_{q=1}^{L}(\hat{\Delta}_{sq} - \overline{\Delta}_s)^2}, \; \overline{\Delta}_s = \frac{1}{L}\sum_{q=1}^{L}\hat{\Delta}_{sq}; \tag{5.19,б}$$

- стандартна невизначеність $\hat{\Delta}_{\text{пп}}$ у припущенні про рівномірний закон розподілу її всередині границь $\pm\theta_{\text{пп}}$:

$$u_B(\hat{\Delta}_{\text{пп}}) = \frac{\theta_{\text{пп}}}{\sqrt{3}}. \tag{5.20}$$

<u>При неодночасному звіренні ВП</u>, що калібрується, та еталонного ВП, сумарна стандартна невизначеність вимірювання зміщення ВП, що калібрується, буде дорівнювати:

$$u_c(\hat{\Delta}) = \sqrt{u_A^2(\overline{x}_c) + u_B^2(\hat{\Delta}_c) + u_A^2(\overline{x}_s) + u_B^2(\hat{\Delta}_b) + u_B^2(\hat{\Delta}_s) + u_B^2(\hat{\Delta}_{\text{пп}})}. \tag{5.21}$$

Ексцес вимірюваної величини в цьому випадку буде розраховуватися як:

$$\eta = \frac{1}{u_c^4(\Delta)}\left[\frac{6}{n_c-5}u_A^4(\overline{x}_c) - 1,2\cdot u_B^4(\hat{\Delta}_c) + \frac{6}{n_s-5}u_A^4(\overline{x}_s) + \right.$$
$$\left. + \eta(\Delta_b)\cdot u_B^4(\hat{\Delta}_b) + \eta(\Delta_s)\cdot u_B^4(\hat{\Delta}_s) - 1,2u_B^4(\hat{\Delta}_{\text{пп}})\right], \tag{5.22}$$

де $\eta(\Delta_b)$ – ексцес, який приписується $u_B(\hat{\Delta}_b)$ згідно з табл. 4.3 в залежності від закону розподілу, який указано в сертифікаті калібрування еталонного ВП; $\eta(\Delta_s)$ – ексцес, який приписується $u_B(\hat{\Delta}_s)$ в залежності від способу її знаходження:

$$\eta(\Delta_s) = \begin{cases} -1{,}2, & \text{для формули}\,(5.19,\text{а}); \\ \dfrac{6}{L-5}, & \text{для формули}\,(5.19,\text{б}). \end{cases} \tag{5.23}$$

Розширена невизначеність вимірювань обчислюється формулою (4.11):

$$U = k_p \cdot u_c(\hat{\Delta}),$$

де k_p – коефіцієнт охоплення, який для рівня довіри 0,95 розраховують за формулою (4.12):

$$k_{0,95} = \begin{cases} 0{,}1085\eta^3 + 0{,}1\eta + 1{,}96, & \text{при } \eta < 0; \\ 2, & \text{при } \eta \ge 0, \end{cases}$$

а для рівня довіри 0,9545 – за формулою (4.13):

$$k_{0,9545} = \begin{cases} 0{,}12\eta^3 + 0{,}1\eta + 2, & \text{при } \eta < 0; \\ 2, & \text{при } \eta \ge 0. \end{cases}$$

Бюджет невизначеності для розглянутого випадку наведено у табл. 5.2.

Таблиця 5.2

Бюджет невизначеності вимірювань при неодночасному звіренні ВП, що калібрується та еталонного ВП за допомогою ПП

Вхідна величина	Оцінка вхідної величини	Стандартна невизначеність	Ексцес вхідної величини	Коефіцієнт чутливості	Внесок невизначеності
X_c	(5.12)	(5.15)	6/(n_c-5)	1	$u_A(\overline{x}_c)$
Δ_c	0	(5.16)	-1,2	1	$u_B(\hat{\Delta}_c)$
X_s	(5.13)	(5.17)	6/(n_s-5)	-1	$-u_A(\overline{x}_s)$
Δ_b	$\hat{\Delta}_b$	(5.18)	$\eta(x_s)$	- 1	$-u_B(\hat{\Delta}_b)$
Δ_s	0	(5.19)	(5.23)	-1	$-u_B(\hat{\Delta}_s)$
$\Delta_{пп}$	0	(5.20)	-1,2	1	$u_B(\hat{\Delta}_{пп})$
Вихідна величина	**Оцінка вихідної величини**	**Сумарна стандартна невизначеність**	**Ексцес вимірюваної величини**	**Коефіцієнт охоплення**	**Розширена невизначеність**
Δ	(5.14)	(5.21)	(5.22)	(4.12), (4.13)	(4.11)

При одночасному вимірюванні еталонним ВП і ВП, що калібрується, величини, яка відтворюється пристроєм порівняння, між їх показами може виникнути кореляція, що спостерігається [14].

Оцінка коефіцієнта кореляції, що спостерігається, може бути розрахована за показами еталонного ВП та ВП, що калібрується:

$$r_{c,s} = \frac{\sum_{q=1}^{n}(x_{cq} - \overline{x}_c)(x_{sq} - \overline{x}_s)}{\sqrt{\sum_{q=1}^{n}(x_{cq} - \overline{x}_c)^2 \sum_{i=1}^{n}(x_{sq} - \overline{x}_s)^2}}, \tag{5.24,а}$$

Значимим коефіцієнт кореляції є при виконанні нерівності:

$$\frac{|r_{c,s}|}{\sqrt{1 - r_{c,s}^2}}\sqrt{n-2} \geq t_{p;(n-2)}, \tag{5.24,б}$$

де $t_{p;(n-2)}$ – коефіцієнт Стьюдента для ймовірності p та числа степенів свободи (n-2).

В цьому випадку оцінку систематичної похибки ВП, що калібрується, краще обчислювати методом редукції за формулою:

$$\hat{\Delta} = \overline{x_c - x_s} = \frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n}(x_{cq} - x_{sq}), \tag{5.25}$$

а її суммарна стандартна невизначеність буде дорівнювати:

$$u_c(\hat{\Delta}) = \sqrt{u_A^2(\overline{x_c - x_s}) + u_B^2(\hat{\Delta}_b) + u_B^2(\hat{\Delta}_c) + u_B^2(\hat{\Delta}_s) + u_B^2(\hat{\Delta}_{\text{пп}})}, \tag{5.26}$$

де $u_A(\overline{x_c - x_s})$ стандартна невизначеність різниці одночасно спостерігаємих показів еталонного ВП та ВП, що калібрується, причому:

$$u_A(\overline{x_c - x_s}) = \sqrt{\frac{n-1}{n-3}}\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{q=1}^{n}[(x_{cq} - x_{sq}) - (\overline{x_c - x_s})]^2}. \tag{5.27}$$

Ексцес вимірюваної величини розраховується за формулою [13]:

$$\eta = \frac{1}{u_c^4(\hat{\Delta})}\left[\frac{6}{n_c - 5}u_A^4(\overline{x_c - x_s}) - 1{,}2 \cdot u_B^4(\hat{\Delta}_c) + \right.$$

$$\left. + \eta(\Delta_b) \cdot u_B^4(\hat{\Delta}_b) + \eta(\Delta_s) \cdot u_B^4(\hat{\Delta}_s) - 1{,}2 \cdot u_B^4(\hat{\Delta}_{\text{пп}})\right]. \tag{5.28}$$

Бюджет невизначеності для розглянутого випадку наведено у табл. 5.3.

Таблиця 5.3

Бюджет невизначеності вимірювань при одночасному звіренні ВП, що калібрується та еталонного ВП за допомогою ПП

Вхідна величина	Оцінка вхідної величини	Стандартна невизначеність	Ексцес вхідної величини	Коефіцієнт чутливості	Внесок невизначеності
$X_c - X_s$	$\overline{x_c - x_s}$	(5.27)	6/(n-5)	1	$u_A(\overline{x_c - x_s})$
Δ_c	0	(5.16)	-1,2	1	$u_B(\hat{\Delta}_c)$
Δ_b	$\hat{\Delta}_b$	(5.18)	$\eta(\Delta_b)$	- 1	$-u_B(\hat{\Delta}_b)$
Δ_s	0	(5.19)	(5.23)	-1	$-u_B(\hat{\Delta}_s)$
$\Delta_{пп}$	0	(5.20)	-1,2	1	$u_B(\hat{\Delta}_{пп})$
Вихідна величина	Оцінка вихідної величини	Сумарна стандартна невизначеність	Ексцес вимірюваної величини	Коефіцієнт охоплення	Розширена невизначеність
Δ	(5.25)	(5.26)	(5.28)	(4.12),(4.13)	(4.11)

5.3. Калібрування матеріальної міри

5.3.1. Пряме вимірювання еталонним ВП величини, яка відтворюється ММ, що калібрується

Схема калибрування для цього випадку наведена на рис. 5.3.

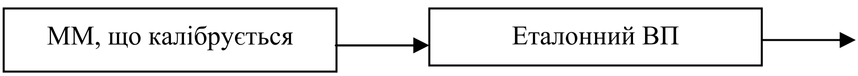


Рис. 5.3 – Схема прямого вимірювання еталонним ВП величини, яка відтворюється ММ, що калібрується

Модельне рівняння для цього випадку має вигляд:

$$X_c = X_s + \Delta_b + \Delta_s, \qquad (5.29)$$

де X_c – величина, яка відтворюється ММ, що калібрується; X_s – величина, що вимірюється еталонним ВП; Δ_b – поправка на зсув, який указаний в сертифікаті калібрування еталонного ВП; Δ_s – сумарна додаткова похибка еталонного ВП, яка пов'язана з дрейфом значення з часу останнього калібрування, відхиленнями в умовах експлуатації та ін.

При багаторазових вимірюваннях оцінка X_s визначається як середнє арифметичне при числі вимірювань n_s:

$$\overline{x}_s = \frac{1}{n_s}\sum_{q=1}^{n_s} x_{sq} \tag{5.30}$$

Зазвичай Δ_s розглядають як центровану випадкову величину (з оцінкою $\hat{\Delta}_s = 0$).

Тому оцінка значення величини x_c, яка відтворюється ММ, що калібрується, буде дорівнюти:

$$x_c = x_s + \hat{\Delta}_b\,. \tag{5.31}$$

Вхідним величинам рівняння (5.29) відповідають такі стандартні невизначеності:

- стандартна невизначеність, яка пов'язана з розсіюванням показів еталонного ВП, що оцінюється за типом *A* при виконанні багаторазових вимірювань:

$$u_A(\overline{x}_s) = \sqrt{\frac{n-1}{n-3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{q=1}^{n}(x_{sq} - \overline{x}_s)^2}\ ; \tag{5.32}$$

- стандартна інструментальна невизначеність еталонного ВП, яка отримана із значень розширеної невизначеності $U(x_s)$ та коефіцієнта охоплення k_s, зазначених у сертифікаті калібрування:

$$u_B(\Delta_b) = \frac{U(x_s)}{k_s}\ ; \tag{5.33}$$

- стандартна невизначеність поправки $\hat{\Delta}_s$ в припущенні про рівномірний закон розподілу її всередині границь $\pm\theta_s$:

$$u_B(\hat{\Delta}_s) = \frac{\theta_s}{\sqrt{3}}\,, \tag{5.34,a}$$

або при оцінюванні її за значеннями похибки еталонного ВП $\hat{\Delta}_{si}$, взятими з останніх *L* його сертифікатів калібрування:

$$u_B(\hat{\Delta}_s) = \sqrt{\frac{L-1}{L-3}}\sqrt{\frac{1}{L-1}\sum_{q=1}^{L}(\hat{\Delta}_{sq} - \overline{\Delta}_s)^2}\,, \quad \overline{\Delta}_s = \frac{1}{L}\sum_{q=1}^{L}\hat{\Delta}_{si}\,. \quad (5.34,б)$$

Сумарна стандартна невизначеність вимірювання значення x_c, яке відтворюється мірою, що калібрується, буде дорівнювати:

$$u_c(x_c) = \sqrt{u_A^2(\overline{x}_s) + u_B^2(\hat{\Delta}_b) + u_B^2(\hat{\Delta}_s)}\,. \qquad (5.35)$$

Ексцес вимірюваної величини для цього випадку визначатиметься за формулою:

$$\eta = \frac{\frac{6}{n-5}u_A^4(\overline{x}_s) + \eta(\Delta_b)\cdot u_B^4(\hat{\Delta}_b) - 1{,}2\cdot u_B^4(\hat{\Delta}_s)}{u_c^4(\hat{\Delta})}\,, \qquad (5.36)$$

де $\eta(\Delta_b)$ – ексцес, який приписується $u_B(\hat{\Delta}_b)$ згідно з табл. 4.3 в залежності від закону розподілу, який указано в сертифікаті калібрування еталонного ВП; $\eta(\hat{\Delta}_s)$ – ексцес, який приписується $u_B(\hat{\Delta}_s)$ в залежності від способу її знаходження:

$$\eta(\hat{\Delta}_s) = \begin{cases} -1{,}2, & \text{для формули} (5.34, \text{а}); \\ \dfrac{6}{L-5}, & \text{для формули} (5.34, \text{б}). \end{cases} \qquad (5.37)$$

Розширена невизначеність вимірювань обчислюється формулою (4.11):

$$U = k_p \cdot u_c(x_c)\,,$$

де k_p – коефіцієнт охоплення, який для рівня довіри 0,95 розраховують за формулою (4.12):

$$k_{0,95} = \begin{cases} 0{,}1085\eta^3 + 0{,}1\eta + 1{,}96, \text{ при } \eta < 0; \\ 2, \quad \text{при } \eta \ge 0, \end{cases}$$

а для рівня довіри 0,9545 – за формулою (4.13):

$$k_{0,9545} = \begin{cases} 0{,}12\eta^3 + 0{,}1\eta + 2, \text{ при } \eta < 0; \\ 2, \quad \text{при } \eta \ge 0. \end{cases}$$

Бюджет невизначеності прямих вимірювань еталонним ВП величини, яка відтворюється ММ, що калібрується, наведено у табл. 5.4.

Таблиця 5.4

Бюджет невизначеності прямих вимірювань еталонним ВП величини, яка відтворюється ММ, що калібрується

Вхідна величина	Оцінка вхідної величини	Стандартна невизначеність	Ексцес вхідної величини	Коефіцієнт чутливості	Внесок невизначеності
X_s	(5.30)	(5.32)	$6/(n\text{-}5)$	1	$u_A(\bar{x}_s)$
Δ_b	$\hat{\Delta}_b$	(5.33)	$\eta(\Delta_b)$	1	$u_B(\hat{\Delta}_b)$
Δ_s	0	(5.34)	(5.37)	1	$u_B(\hat{\Delta}_s)$
Вихідна величина	Оцінка вихідної величини	Сумарна стандартна невизначеність	Ексцес вимірюваної величини	Коефіцієнт охоплення	Розширена невизначеність
X_c	(5.31)	(5.35)	(5.36)	(4.12),(4.13)	(4.11)

5.3.2. Звірення значень, які відтворюються ММ, що калібрується, та еталонною ММ за допомогою компаратора

При звірянні двох ММ використовується допоміжний ЗВТ – компаратор (засіб порівняння, що призначений для звіряння мір однорідних величин).

Схема передачі розміру одиниці з допомогою компаратора наведена на рис. 5.4.

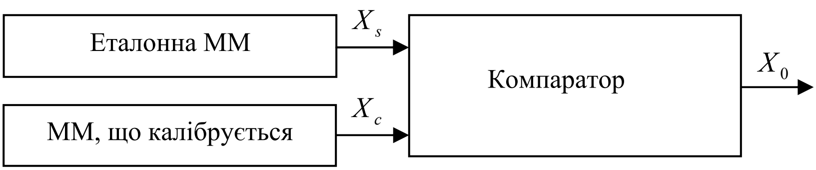


Рис. 5.4 – Схема звіряння ММ, що калібрується та еталонної ММ за допомогою компаратора

Модельне рівняння для цього випадку калібрування має вигляд:

$$X_c = (X_s + \Delta_s) + (X_0 + \Delta_b + \Delta_0), \tag{5.38}$$

де X_c – величина, яка відтворюється ММ, що калібрується; X_s – величина, яка відтворюється еталонною ММ; Δ_s – поправка на сумарну похибку еталонної ММ, пов'язану з дрейфом значення з часу останнього калібрування, відхиленнями в умовах експлуатації та ін; X_0 – величина, яка виміряна компаратором; Δ_b – поправка на зсув, який указаний в сертифікаті калібрування компаратора; Δ_0 – поправка на сумарну похибку компаратора, пов'язану з дрейфом значення від часу останнього калібрування, відхиленнями в умовах експлуатації та ін.

При багаторазових вимірюваннях оцінка X_0 визначається як середнє арифметичне результатів n його показів x_{0q}:

$$x_0 = \bar{x}_0 = \frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n} x_{0q}. \tag{5.39}$$

Оцінка значення еталонної ММ, що відтворюється x_s, береться з сертифіката калібрування еталонної міри.

Зазвичай Δ_s і Δ_0 розглядають як центровані випадкові величини (з оціненими значеннями $\hat{\Delta}_s$ і $\hat{\Delta}_0$, що дорівнюють нулю).

Тому оцінка значення величини x_s, яка відтворюється ММ, що калібрується, буде дорівнюти:

$$x_c = x_s + x_0 + \hat{\Delta}_b. \tag{5.40}$$

Вхідним величинам рівняння (5.38) відповідають такі стандартні невизначеності:

- стандартна невизначеність калібрування еталонної ММ, яка отримана із значень розширеної невизначеності $U(x_s)$ та коефіцієнта охоплення k_s, зазначених у сертифікаті калібрування:

$$u_B(x_s) = \frac{U(x_s)}{k_s}; \tag{5.41}$$

- стандартна невизначеність поправки $\hat{\Delta}_s$ в припущенні про рівномірний закон розподілу її всередині границь $\pm\theta_s$:

$$u_B(\hat{\Delta}_s) = \frac{\theta_s}{\sqrt{3}}, \qquad (5.42,а)$$

або при оцінюванні її за значеннями еталонної ММ x_{si}, взятими з останніх її L_s сертифікатів калібрування:

$$u_B(\hat{\Delta}_s) = \sqrt{\frac{L-1}{L-3}}\sqrt{\frac{1}{L_s-1}\sum_{q=1}^{L_s}(x_{sq}-\overline{x}_s)^2}\ , \quad \overline{x}_s = \frac{1}{L_s}\sum_{q=1}^{L_s}x_{qi}\ ; \qquad (5.42,б)$$

- стандартна невизначеність, яка пов’язана з розсіюванням показів компаратора x_{0q}, що оцінюється за типом A при виконанні багаторазових вимірювань:

$$u_A(x_0) = u_A(\overline{x}_0) = \sqrt{\frac{n-1}{n-3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{q=1}^{n}(x_{0q}-\overline{x}_0)^2}\ ; \qquad (5.43)$$

- стандартна невизначеність калібрування компаратора, яка отримана із значень розширеної невизначеності $U(x)$ та коефіцієнта охоплення k_0, зазначених у сертифікаті його калібрування:

$$u_B(\Delta_b) = \frac{U(x_0)}{k_0}\ ; \qquad (5.44)$$

- стандартна невизначеність похибки $\hat{\Delta}_0$ в припущенні про рівномірний закон розподілу її всередині границь $\pm\theta_0$:

$$u\left(\Delta_0\right) = \frac{\theta_0}{\sqrt{3}}, \qquad (5.45,а)$$

або при оцінюванні її за значеннями похибки компаратора $\hat{\Delta}_{0q}$, взятими з останніх L_0 сертифікатів калібрування:

$$u_B(\hat{\Delta}_0) = \sqrt{\frac{L-1}{L-3}}\sqrt{\frac{1}{L_0-1}\sum_{q=1}^{L_0}(\hat{\Delta}_{0q}-\overline{\Delta}_0)^2}\ , \quad \overline{\Delta}_0 = \frac{1}{L_0}\sum_{q=1}^{L_0}\hat{\Delta}_{0q}\ . \qquad (5.45,б)$$

- стандартна невизначеність вимірювання значення x_c, яка відтворюється ММ, що калібрується, дорівнюватиме:

$$u_c(x_c) = \sqrt{u^2(x_s) + u^2(\hat{\Delta}_s) + u_A^2(\overline{x}_0) + u_B^2(\hat{\Delta}_b) + u^2(\hat{\Delta}_0)}\ . \qquad (5.46)$$

Ексцес вимірюваної величини розраховується як:

$$\eta=\frac{1}{u_c^4(x_c)}\Big[\eta(x_s)\cdot u_B^4(x_s)+\eta(\Delta_s)\cdot u_B^4(\hat{\Delta}_s)+\frac{6}{n-5}u_A^4(\overline{x}_0)+$$
$$+\eta(\Delta_b)\cdot u_B^4(\hat{\Delta}_b)+\eta(\Delta_0)\cdot u_B^4(\hat{\Delta}_0)\Big], \qquad (5.47)$$

де $\eta(x_s)$ – ексцес, який приписується $u_B(x_s)$ згідно з табл. 4.3 в залежності від закону розподілу, який указано в сертифікаті її калібрування; $\eta(\Delta_b)$ – ексцес, який приписується $u_B(\hat{\Delta}_b)$ згідно з табл. 4.3 в залежності від закону розподілу, який указано в сертифікаті калібрування компаратора; $\eta(\hat{\Delta}_s)$ – ексцес, який приписується $u_B(\hat{\Delta}_s)$ в залежності від способу її знаходження:

$$\eta(\hat{\Delta}_s)=\begin{cases}-1,2, & \text{для формули}\,(5.42,\text{а});\\ \dfrac{6}{L-5}, & \text{для формули}\,(5.42,\text{б}),\end{cases} \qquad (5.48)$$

$\eta(\Delta_0)$ – ексцес, який приписується $u_B(\hat{\Delta}_0)$ в залежності від способу її знаходження:

$$\eta(\hat{\Delta}_0)=\begin{cases}-1,2, & \text{для формули}\,(5.45,\text{а});\\ \dfrac{6}{L-5}, & \text{для формули}\,(5.45,\text{б}),\end{cases} \qquad (5.48)$$

Розширена невизначеність вимірювань обчислюється формулою (4.11):

$$U=k_p\cdot u_c(x_c),$$

де k_p – коефіцієнт охоплення, який для рівня довіри 0,95 розраховують за формулою (4.12):

$$k_{0,95}=\begin{cases}0,1085\eta^3+0,1\eta+1,96, & \text{при } \eta<0;\\ 2, & \text{при } \eta\geq 0,\end{cases}$$

а для рівня довіри 0,9545 – за формулою (4.13):

$$k_{0,9545}=\begin{cases}0,12\eta^3+0,1\eta+2, & \text{при } \eta<0;\\ 2, & \text{при } \eta\geq 0.\end{cases}$$

Бюджет невизначеності для даного випадку наведено в табл. 5.5.

Таблиця 5.5

Бюджет невизначеності вимірювань при звірянні ММ, що калібрується, та еталонної ММ за допомогою компаратора

Вхідна величина	Оцінка вхідної величини	Стандартна невизначе-ність	Ексцес вхідної величини	Коефіцієнт чутливості	Внесок невизначе-ності
X_s	x_s	(5.41)	$\eta(x_s)$	1	$u(x_s)$
Δ_s	0	(5.42)	(5.42)	1	$u(\hat{\Delta}_s)$
X_0	(5.39)	(5.43)	$6/(n$-$5)$	1	$u_A(\overline{x}_0)$
Δ_b	$\hat{\Delta}_b$	(5.44)	$\eta(\Delta_b)$	1	$u_B(\hat{\Delta}_b)$
Δ_0	0	(5.45)	(5.48)	1	$u(\hat{\Delta}_0)$
Вихідна величина	Оцінка вихідної величини	Сумарна стандартна невизначе-ність	Ексцес вимірюва-ної величини	Коефіцієнт охоплення	Розширена невизначе-ність
X_c	(5.40)	(5.46)	(5.47)	(4.12), (4.13)	(4.11)

ВИСНОВКИ

Підсумовуючи отримані в монографії результати, хочеться звернути увагу на кілька важливих моментів.

1. Відомо, що значення розширеної невизначеності вимірювань використовується у законодавчій метрології для прийняття рішень щодо оцінки відповідності, зокрема при верифікації відкаліброваного засобу вимірювань. Отже, рівень ризику, пов'язаного із застосовуваним правилом прийняття рішення про відповідність, буде залежати від достовірності оцінки розширеної невизначеності.

2. Надійну оцінку розширеної невизначеності можна отримати при застосуванні GUM-S1, який використовує метод Монте-Карло, що базується на байєсовському підході.

3. Необхідність наявності сертифікованого програмного засобу для використання ММК та неможливість документації процедури оцінювання невизначеності на основі ММК для подальших перевірок контролюючими органами ускладнює застосування ММК у випробувальних та калібрувальних лабораторіях.

4. Недоліки та обмеження GUM, виявлені протягом 30 років використання його у випробувальних та калібрувальних лабораторіях та неузгодженість його з GUM-S1 робить необхідним здійснення його ревізії.

5. Нова Настанова має бути побудована на байєсівському підході та забезпечувати отримання значень розширеної невизначеності, що залежать від PDF вхідних величин. Цим вимогам задовольняють розроблені авторами метод ексцесів та закон поширення розширеної невизначеності. Обидва методи легко реалізуються в середовищі Excel і дозволяють враховувати кореляцію, що спостерігається між результатами вимірювань вхідних величин.

6. Метод ексцесів доцільно використовувати для оцінювання розширеної невизначеності вимірювань під час калібруванння, оскільки всі його обмеження відповідають реальним умовам калібрування.

7. Розглянуто отримання незміщених оцінок вимірюваної величини та її стандартної невизначеності при нелінійному модельному рівнянні без застосування ММК, який можна використовувати для валідації процедур оцінювання невизначеності вимірювань, що розробляються.

Список літератури

1. JCGM 200:2012 International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM), ISO/IEC, 2012, 108 p.
2. JCGM 100:2008 Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement. JCGM, 2008, 90 p.
3. EA-4/02 M:2022 Evaluation of the Uncertainty of Measurement in calibration. European Accreditation, 2022, 78 p.
4. Zakharov I.P., Vodotyka S.V., Klimova K.A., Shevchenko N.S. Some examples of the evaluation of measurement uncertainty// Measurement Techniques, Volume 56, Issue 6, 2013, pp. 591-598, DOI: 10.1007/s11018-013-0250-x.
5. M3003:2012 The Expression of Uncertainty and Confidence in Measurement. Edition 3. UKAS, 2012, 82 p.
6. Zakharov I.P., Vodotyka S.V. Application of Monte Carlo simulation for the evaluation of measurements uncertainty // Metrology and Measurement systems, 2008, vol., XV, Number 1 p. 118 – 123.
7. JCGM 101:2008 Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Propagation of distributions using a Monte Carlo method. JCGM, 2008. 90 p.
8. Bich et al. Revision of the “Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement”// Metrologia, 2012, Vol. 49, pp. 702–705.
9. Bich W., Cox M., Michotte C. Towards a new GUM − an update. Metrologia 53. 2016. S149–S159.
10. ISO/IEC 17025:2017 General requirements for the competence of testing and calibration laboratories. CASCO, 2017. 38 p.
11. Zakharov I., Neyezhmakov P., Botsiura O. Reduction of the measurand estimate bias for nonlinear model equation // Journal of Physics: Conf. Series 1065 (2018) 212002.
12. Zakharov I., Neyezhmakov P., Botsiura O. Reduction of the bias of measurement uncertainty estimates with significant non-linearity of a model equation // Journal of Physics: Conf. Series 1379 (2019) 012013
13. Zakharov, I.P., Botsyura, O.A. Calculation of Expanded Uncertainty in Measurements Using the Kurtosis Method when Implementing a Bayesian Approach // Measurement Techniques, 2019, Volume: 62, Issue: 4, pp. 327-331.

14. Zakharov I., Neyezhmakov P., Botsiura O. Expanded Uncertainty Evaluation Taking into Account the Correlation Between Estimates of Input Quantities // Ukrainian Metrological Journal, 2021, No 1, pp. 4-8.

15. Zakharov I., Botsyura O. Estimation of expanded uncertainty in measurement when implementing a Bayesian approach // Measurement Techniques, 2018, Volume: 61, Issue: 4, pp. 342-346.

16. Mutual recognition of national measurement standards and of calibration and measurement certificates issued by national metrology institutes. Paris, 14 October 1999.

17. Zakharov I.P., Vodotyka S.V., Shevchenko E.N. Methods, models, and budgets for estimation of measurement uncertainty during calibration // Measurement Techniques, Vol. 54, No. 4, 2011, p. 387-399, DOI: 10.1007/s11018-011-9737-5.

18. Zakharov Igor, Botsiura Olesia, Zadorozhna Iryna, Semenikhin Valerii, Diakov Dimitar, Grokhova Ganna. Measuring instruments calibration: advanced realisation of key elements // Metrology and Metrology Assurance (MMA-2023): Proceedings of XXXIII International Scientific Symposium, Sozopol, Bulgaria, 7-11 Sept. 2023, pp. 31-36.

19. Zakharov I. Botsiura O., Zakharov O., Zadorozhna I., Semenikhin V., Novoselov O. Main stages of calibration of measuring instruments // Ukrainian Metrological Journal 2023, № 3, 9-15. DOI:10.24027/2306-7039.3.2023.291862.

20. Zakharov I.P., Botsiura O.A., Neyezhmakov P.I. Study of approaches to determining the required number of multiple observations // Ukrainian Metrological Journal, 2022, No 3, 9-13. DOI: 10.24027/2306-7039.3.2022.269582.

21. IEC 60050-300:2001. International Electrotechnical Vocabulary - Electrical and electronic measurements and measuring instruments - Part 311: General terms relating to measurements - Part 312: General terms relating to electrical measurements - Part 313: Types of electri-cal measuring instruments - Part 314: Specific terms according to the type of instrument.

22. COOMET R/GM/35:2022 Expression of the expanded measurement uncertainty (method of kurtosis).

23. Rabinovich S.G. Measurement Errors and Uncertainties. Theory and Practice. 3rd ed., Springer, 313 p.

24. Welch B.L. The generalization of Students problem when several different population variances are involved. Biometrica, 1947, v. 34, pp. 28-35.

25. Satterthwaite F.E. An distribution approximate of estimates of variance components. Biometrics Bulletin 2: 1946. 110–114.
26. https://uncertainty.nist.gov/.
27. V. Witkovský, Matlab algorithm TDIST: The distribution of a linear combination of Student's t random variables. In COMPSTAT 2004 Symposium. 2004: Physica-Verlag/Springer 2004, Heidelberg, Germany.
28. Zakharov I., Botsiura O., Diakov D. Type A expanded uncertainty assigned to the measurand // 2023 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS-2023), Proceedings of the 2023 International Symposium, Batumi, Georgia, 22-25 September 2023, pp. 1-4, doi: 10.1109/EWDTS59469.2023.10297083.

ДОДАТКИ

Додаток А. Таблиці коефіцієнтів охоплення

Таблиця А1

Значення коефіцієнтів Стюдента для ймовірностей 0,95 та 0,9545 для дробових степенів свободи ν [4]

ν	**0,95**	**0,9545**	**ν**	**0,95**	**0,9545**	**ν**	**0,95**	**0,9545**	**ν**	**0,95**	**0,9545**
1,0	12,706	13,968	**3,0**	3,182	3,307	**5,0**	2,571	2,649	**7,0**	2,365	2,429
1,1	10,277	11,203	**3,1**	3,125	3,245	**5,1**	2,556	2,633	**8,0**	2,306	2,366
1,2	8,649	9,364	**3,2**	3,073	3,188	**5,2**	2,541	2,617	**9,0**	2,262	2,320
1,3	7,501	8,074	**3,3**	3,025	3,137	**5,3**	2,527	2,603	**10,0**	2,228	2,284
1,4	6,657	7,131	**3,4**	2,981	3,089	**5,4**	2,514	2,589	**11,0**	2,201	2,255
1,5	6,017	6,418	**3,5**	2,940	3,045	**5,5**	2,502	2,575	**12,0**	2,179	2,231
1,6	5,517	5,864	**3,6**	2,902	3,005	**5,6**	2,490	2,562	**13,0**	2,160	2,219
1,7	5,119	5,424	**3,7**	2,866	2,967	**5,7**	2,478	2,550	**14,0**	2,145	2,195
1,8	4,795	5,067	**3,8**	2,835	2,932	**5,8**	2,466	2,539	**15,0**	2,131	2,181
1,9	4,527	4,773	**3,9**	2,805	2,900	**5,9**	2,457	2,527	**16,0**	2,120	2,169
2,0	4,303	4,527	**4,0**	2,776	2,869	**6,0**	2,447	2,517	**17,0**	2,110	2,158
2,1	4,1122	4,318	**4,1**	2,750	2,841	**6,1**	2,437	2,506	**18,0**	2,101	2,149
2,2	3,949	4,140	**4,2**	2,725	2,814	**6,2**	2,428	2,496	**19,0**	2,093	2,140
2,3	3,807	3,985	**4,3**	2,702	2,789	**6,3**	2,419	2,487	**20,0**	2,086	2,133
2,4	3,684	3,850	**4,4**	2,680	2,766	**6,4**	2,410	2,478	**25,0**	2,060	2,105
2,5	3,575	3,732	**4,5**	2,659	2,743	**6,5**	2,402	2,469	**30,0**	2,042	2,087
2,6	3,478	3,627	**4,6**	2,639	2,722	**6,6**	2,394	2,460	**35,0**	2,030	2,074
2,7	3,392	3,534	**4,7**	2,621	2,702	**6,7**	2,386	2,452	**40,0**	2,021	2,064
2,8	3,315	3,450	**4,8**	2,603	2,684	**6,8**	2,379	2,444	**50,0**	2,009	2,051
2,9	3,245	3,375	**4,9**	2,586	2,666	**6,9**	2,372	2,436	∞	1,960	2,000

Таблиця А2

Значення коефіцієнтів покриття для композиції нормального та рівномірного внесків невизначеності [5]

$\frac{u_i(y)_{normal}}{u_i(y)_{rect}}$	$k_{0,9545}$	$\frac{u_i(y)_{normal}}{u_i(y)_{rect}}$	$k_{0,9545}$	$\frac{u_i(y)_{normal}}{u_i(y)_{rect}}$	$k_{0,9545}$
0,00	1,65	0,50	1,84	0,95	1,95
0,10	1,66	0,55	1,85	1,00	1,95
0,15	1,68	0,60	1,87	1,10	1,96
0,20	1,70	0,65	1,89	1,20	1,97
0,25	1,72	0,70	1,90	1,40	1,98
0,30	1,75	0,75	1,91	1,80	1,99
0,35	1,77	0,80	1,92	2,00	1,99
0,40	1,79	0,85	1,93	2,50	2,00
0,45	1,82	0,90	1,94	∞	2,00

Таблиця А3

Значення коефіцієнтів покриття для композиції нормального та арксинусного внесків невизначеності [5]

$\frac{u_i(y)_{normal}}{u_i(y)_{arcsine}}$	$k_{0,9545}$	$\frac{u_i(y)_{normal}}{u_i(y)_{arcsine}}$	$k_{0,9545}$	$\frac{u_i(y)_{normal}}{u_i(y)_{arcsine}}$	$k_{0,9545}$
0,00	1,41	0,50	1,77	0,95	1,93
0,10	1,47	0,55	1,80	1,00	1,93
0,15	1,51	0,60	1,82	1,10	1,95
0,20	1,55	0,65	1,84	1,20	1,96
0,25	1,60	0,70	1,86	1,40	1,97
0,30	1,64	0,75	1,88	1,80	1,99
0,35	1,67	0,80	1,89	2,00	1,99
0,40	1,71	0,85	1,90	2,50	2,00
0,45	1,74	0,90	1,92	∞	2,00

Таблиця А3

Значення коефіцієнтів покриття для композиції рівномірного та арксинусного внесків невизначеності [5]

$\frac{u_i(y)_{rect}}{u_i(y)_{arcsine}}$	$k_{0,9545}$	$\frac{u_i(y)_{rect}}{u_i(y)_{arcsine}}$	$k_{0,9545}$	$\frac{u_i(y)_{rect}}{u_i(y)_{arcsine}}$	$k_{0,9545}$
0,00	1,41	0,45	1,75	3,00	1,80
0,10	1,48	0,50	1,78	4,00	1,75
0,15	1,53	0,60	1,82	5,00	1,72
0,20	1,57	0,70	1,86	6,00	1,70
0,25	1,62	0,80	1,88	7,50	1,68
0,30	1,66	0,90	1,89	10,00	1,66
0,35	1,69	1,00	1,90	20,00	1,65
0,40	1,73	2,00	1,86	∞	1,65

Таблиця А5

Значення коефіцієнтів покриття для композиції двох рівномірних або двох арксинусних внесків невизначеності [5]

$\frac{u_i(y)_{smaller}}{u_i(y)_{lagger}}$	$k_{0,9545}$ 2 rect	$k_{0,9545}$ 2 arcsine	$\frac{u_i(y)_{smaller}}{u_i(y)_{lagger}}$	$k_{0,9545}$ 2 rect	$k_{0,9545}$ 2 arcsine
0,00	1,65	1,41	0,40	1,82	1,72
0,05	1,65	1,44	0,45	1,84	1,75
0,10	1,66	1,49	0,50	1,86	1,77
0,15	1,69	1,53	0,60	1,89	1,81
0,20	1,71	1,58	0,70	1,91	1,83
0,25	1,74	1,62	0,80	1,92	1,85
0,30	1,77	1,66	0,90	1,93	1,86
0,35	1,79	1,69	1,00	1,93	1,86

Додаток В. Знаходження параметрів розподілу за коефіцієнтом охоплення [22]

1) Параметр $\alpha_T = u_2/u_1$ трапецієвидного закону розподілу зі стандартною невизначеністю u_{trap} де $u_1 = u_{trap}\Big/\sqrt{1+\alpha^2}$, $u_2 = \alpha u_1$, – стандартні невизначеності двох рівномірних законів, з яких складається трапецієвидний, визначається з рис. В 1.

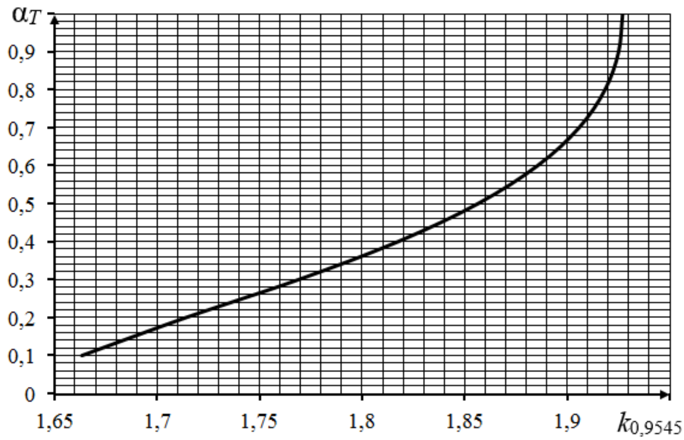


Рисунок В1 – Номограма для знаходження параметра $\alpha_T = u_2/u_1$ трапецієвидного закону розподілу по значенню $k_{0,9545}$

2) Число степенів свободи закону розподілу Стьюдента ν для ймовірності 0,9545 визначається з рис. В 2.

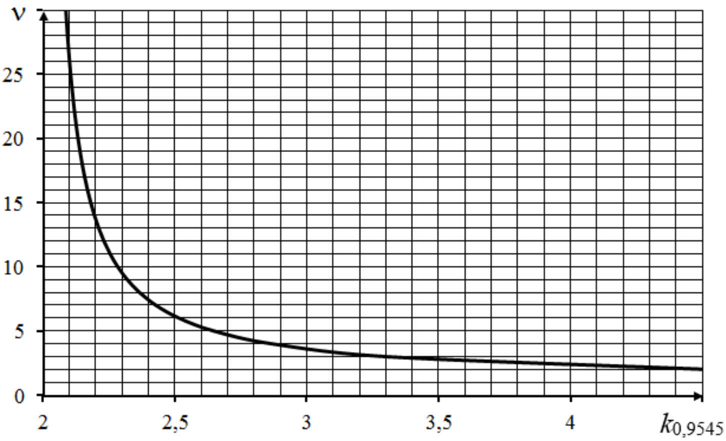


Рисунок В2 – Номограма для визначення числа степенів свободи ν закону розподілу Стьюдента по коефіцієнту охоплення $k_{0,9545}$

Додаток С. Обчислення зміщення числового значення вимірюваної величини при нелінійному модельному рівнянні

Вираз для оцінки зміщення оцінки вимірюваної величини за відсутності кореляції між вхідними величинами має вигляд [11]:

$$\Delta_y = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} c_{ii} u_i^2 \,, \tag{C1}$$

де $c_{ii} = \partial^2 y / \partial x_i^2$ – частинна похідна другого порядку від Y по X_i, яка оцінена при $X_1 = x_1, \ldots, X_N = x_N$.

Величина зміщення може бути обчислена методом частинних прирощень [11] за формулою:

$$\Delta_y = \sum_{j=1}^{N} \left\{ \frac{f[x_1,\ldots,(x_j+u_j),\ldots,x_N] + f[x_1,\ldots,(x_j-u_j),\ldots,x_N]}{2} - f[x_1,x_2,\ldots,x_N] \right\}. \tag{C2}$$

За наявності кореляції між k-ю та m-ю вхідними величинами вираз для величини зміщення оцінки вимірюваної величини має вигляд:

$$\Delta(y) = -\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} c_{ii}u_i^2 + c_{km}r_{km}u_k u_m\right], \tag{C3}$$

де $c_{km} = \partial^2 y/(\partial x_k \partial x_m)$ – змішана частинна похідна другого порядку від Y по X_k, X_m, яка оцінена при $X_1 = x_1, ..., X_N = x_N$; r_{km} – коефіцієнт кореляції між результатами вимірювань X_k, X_m, та обчислюється за формулою:

$$r_{km} = \frac{\sum_{q=1}^{n}(x_{kq} - \overline{x}_k)(x_{mq} - \overline{x}_q)}{\sqrt{\sum_{q=1}^{n}(x_{kq} - \overline{x}_k)^2 \sum_{q=1}^{n}(x_{mq} - \overline{x}_m)^2}}; \tag{C4}$$

u_k, u_m – стандартні невизначеності, які викликані спостережуваним розкидом показань k-ї та m-ї вхідних величин, причому:

$$u_k = \sqrt{\frac{n-1}{n-3}}\frac{s_k}{\sqrt{n}}, \tag{C5}$$

$$u_m = \sqrt{\frac{n-1}{n-3}}\frac{s_m}{\sqrt{n}}. \tag{C6}$$

Отримане значення зміщення $\Delta(y)$ порівнюють зі значенням незміщеної оцінки стандартної невизначеності $u_0(y)$, яке отримують у наступному розділі. Якщо виконується нерівність:

$$|\Delta(y)| \geq \frac{1}{3}u_0(y), \tag{C7}$$

необхідно враховувати зміщення $\Delta(y)$ як поправку до y, отримуючи незміщену оцінку вимірюваної величини за формулою:

$$y_0 = y - \Delta(y). \tag{C8}$$

Додаток D. Обчислення зміщення стандартної невизначеності вимірюваної величини при нелінійному модельному рівнянні

Зміщення оцінки стандартної невизначеності вимірюваної величини обчислюється за такою формулою [12]:

$$\Delta(u^2) = \left[\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N} c_{ii}^2(\eta_i + 2)u_i^4 + \sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{i} c_{ij}^2 u_i^2 u_j^2\right], \tag{D1}$$

де η_i – ексцес розподілу i-ї вхідної величини, який беруть з табл. 4.3.

Отримане значення зміщення порівнюють зі значенням $u^2(y)$. Якщо виконуються нерівність:

$$\left|\Delta(u^2)\right| \geq \frac{1}{9}u^2(y), \tag{D2}$$

необхідно враховувати зміщення $\Delta(u^2)$ у якості поправки до $u^2(y)$, отримуючи незміщену оцінку дисперсії вимірюваної величини за формулою:

$$u_0^2(y) = u^2(y) + \Delta(u^2). \tag{D3}$$

Для полегшення обчислень за формулами (D1)-(D3) доцільно скористатися методом частинних прирощень.

У цьому випадку різницева частинна похідна першого порядку вимірюваної величини по *j*-й вхідній величині буде дорівнювати:

$$c_j^* = \frac{f[x_1,...,(x_j+u_j),...,x_N] - f[x_1,...,(x_j-u_j),...,x_N]}{2u_j}. \tag{D4}$$

Різницева частинна похідна другого порядку вимірюваної величини по *j*-й вхідній величині дорівнюватиме:

$$c_{jj}^* = \frac{1}{u_j^2}\{f[x_1,...,(x_j+u_j),...,x_N] - 2f(x_1,x_2,...,x_N) + f[x_1,...,(x_j-u_j),...,x_N]\}. \tag{D5}$$

Різницева змішана частинна похідна другого порядку вимірюваної величини по *j*-й та *i*-й вхідним величинам дорівнюватиме:

$$c_{ji}^* = \frac{1}{4u_ju_i}\{f[x_1,...,(x_j+u_j),...,(x_i+u_i),...,x_N] - f[x_1,...,(x_j+u_j),...,(x_i-u_i),...,x_N] -$$
$$- f[x_1,...,(x_j-u_j),...,(x_i+u_i),...,x_N] + f[x_1,...,(x_j-u_j),...,(x_i-u_i),...,x_N]\}. \tag{D6}$$

Додаток E. Обґрунтування методу ексцесів

Ексцес η є центральним моментом четвертого порядку PDF випадкової величини x і є мірою її гостровершинності:

$$\eta = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}(x-E_x)^4 g(x)dx}{u_x^4} - 3, \tag{E1}$$

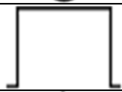
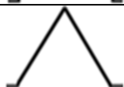
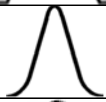
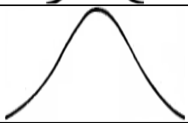
де E_x, u_x та $g(x)$ – відповідно сподівання, стандартна невизначеність та PDF випадкової величини x.

Для розрахунку розширеної невизначеності необхідно знати залежності коефіцієнта охоплення від ексцесу розподілу $k_p(\eta)$.

У табл. Е1 представлені ексцеси найбільш поширених у метрологічній практиці симетричних PDF. Там же наведено формули для коефіцієнтів охоплення для довільного рівня довіри p.

Таблиця Е1

Ексцеси та коефіцієнти охоплення для симетричних PDF

PDF		η	k_p
Арксинусний		-1,5	$\sqrt{2}\sin(p\pi/2)$
Рівномірний		-1,2	$p\sqrt{3}$
Трикутний		-0,6	$(1-\sqrt{1-p})\sqrt{6}$
Нормальний		0	$t_{p;\infty}$
Стьюдента з числом ступенів свободи ν		$\dfrac{6}{\nu-4}$	$t_{p;\nu}\sqrt{\dfrac{\nu-2}{\nu}}$

Для розрахунку $k_p(\eta)$ були побудовані композиції різних PDF, які подані у табл. Е2. У цій таблиці наведено формули для ексцесів цих композицій. Вони обчислювались за формулою, яка витикає з (4.14):

$$\eta = \frac{\eta_1 u_1^4 + \eta_2 u_2^4}{\left[u_1^2(y) + u_1^2(y)\right]^2} = \frac{\eta_1 \gamma^4 + \eta_2}{\left[\gamma^2 + 1\right]^2}, \qquad \text{(Е2)}$$

де η_1, η_2 та u_1, u_2 – ексцеси та стандартні невизначеності першого та другого PDF, що підсумовуються, $\gamma = u_1/u_2$.

Коефіцієнти охоплення цих композицій обчислювалися аналітичними і чисельними методами.

Таблиця Е2

Ексцеси для композицій різних PDF

№	PDF1	PDF2	γ	η
1	Рівномірний	Рівномірний	γ	$-1,2\dfrac{(1+\gamma^4)}{(1+\gamma^2)^2}$
2	$m=2,...,10$ рівномірних		1	$\dfrac{-1,2}{m}$
3	Рівномірний	Нормальний	γ	$\dfrac{-1,2}{(1+\gamma^2)^2}$
4	Арксинусний	Арксинусний	γ	$-1,5\dfrac{(1+\gamma^4)}{(1+\gamma^2)^2}$
5	$m=2,...,10$ арксинусних		1	$\dfrac{-1,5}{m}$
6	Арксинусний	Рівномірний	γ	$\dfrac{-(1,5+1,2\gamma^4)}{(1+\gamma^2)^2}$
7	Арксинусний	Нормальний	γ	$\dfrac{-1,5}{(1+\gamma^2)^2}$
8	Стьюдент, ν	Нормальний	γ	$\dfrac{6\alpha^4}{(\nu-4)(\gamma^2+\alpha^2)^2}$, $\alpha=\sqrt{\dfrac{\nu-2}{\nu}}$
9	Стьюдент, ν	Рівномірний	γ	$\dfrac{-1,2\gamma^4+\dfrac{6\alpha^4}{\nu-4}}{(\gamma^2+\alpha^2)^2}$
10	Стьюдент, ν	Арксинусний	γ	$\dfrac{-1,5\gamma^4+\dfrac{6\alpha^4}{\nu-4}}{(\gamma^2+\alpha^2)^2}$
11	Стьюдент, ν_1	Стьюдент, ν_2	γ	$6\dfrac{\dfrac{\gamma^4\alpha_1^4}{\nu_1-4}+\dfrac{\alpha_2^4}{\nu_2-4}}{(\gamma^2\alpha_1^2+\alpha_2^2)^2}$

Отримані залежності $k_p(\eta)$ є вузькою зоною з точок (рис. Е1, Е2), яка повинна бути апроксимована аналітичною функцією.

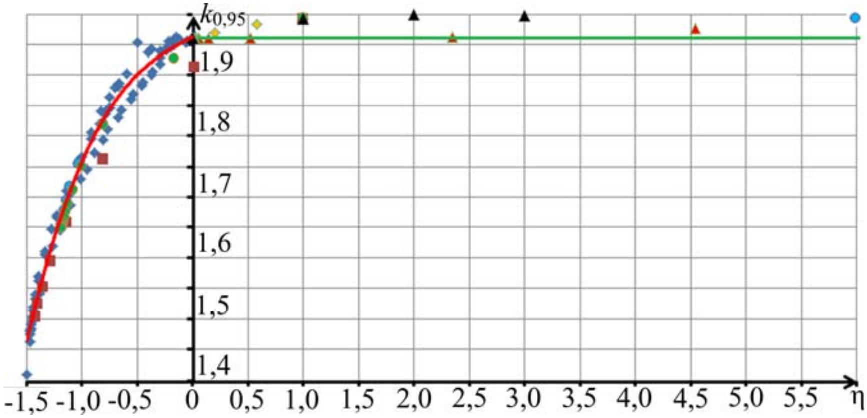


Рисунок Е1 – Залежність $k_{0,95}(\eta)$

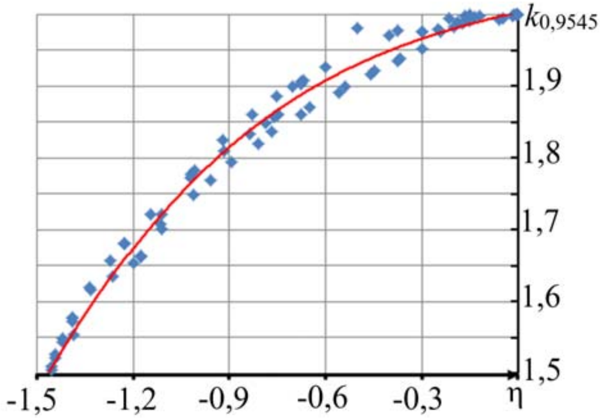


Рисунок Е2 – Залежність $k_{0,9545}(\eta)$

Результат цієї апроксимації для різних p наведено на рис. Е3.

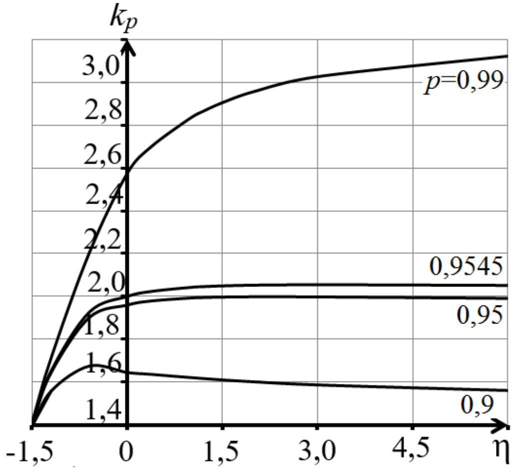


Рисунок Е3 – Апроксимація залежностей $k_p(\eta)$

Аналіз залежностей рис. Е3 показав, що апроксимуюча функція для всіх них в діапазоні $\eta \le 0$ являє собою поліном третього ступеня, а в діапазоні $\eta > 0$ є коефіцієнтом Стьюдента для степеню свободи $\nu = \frac{6}{\eta} + 4$, тобто:

$$k_p = \begin{cases} \sum_{j=0}^{3} A_j \eta^j, & \text{при } \eta \le 0; \\ t_{p;\left(\frac{6}{\eta}+4\right)} \cdot \sqrt{\frac{3+\eta}{3+2\eta}}, & \text{при } \eta \in [0;6]. \end{cases} \tag{Е3}$$

Найбільш близькі за характером змін залежності для рівнів довіри $p = 0{,}95$ та $p = 0{,}9545$, причому в діапазоні $\eta \in [0;6]$ вони змінюються не більше, ніж на 2,5 %, що дозволяє апроксимувати їх у цьому діапазоні прямими $k_{0,95}(\eta)$= 1,96 та $k_{0,9545}(\eta)$ =2,0.

Таким чином, в усьому діапазоні апроксимуючі залежності для $p = 0{,}95$ та $p = 0{,}9545$ з похибкою не більше ±2,5% описуються виразами:

$$k_{0.95} = \begin{cases} 0{,}1085\eta^3 + 0{,}1\eta + 1{,}96, \text{ при } \eta < 0; \\ 1{,}96, \text{ при } \eta \geq 0, \end{cases} \quad \text{(E4)}$$

$$k_{0.9545} = \begin{cases} 0{,}12\eta^3 + 0{,}1\eta + 2{,}0, \text{ при } \eta < 0; \\ 2{,}0, \text{ при } \eta \geq 0. \end{cases} \quad \text{(E5)}$$

Бюджет невизначеності вимірювань з ексцесами вхідних і вимірюваної величини представлено в табл. 4.5. Слід зазначити, що така реалізація методу ексцесу має обмеження: кількість повторних вимірювань має бути більшою за 5. Нижче наведено короткий опис процедури оцінки невизначеності з урахуванням ексцесів.

Перші п’ять кроків цієї процедури збігаються із процедурою нового GUM [22]:

1. Моделювання вимірювань: $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$.

2. Оцінювання вхідних величин: $x_1, x_2, ..., x_N$.

3. Обчислення числового значення вимірюваної величини: $y = f(x_1, x_2, ..., x_N)$.

4. Оцінювання стандартних невизначеностей вхідних величин:

$$u(x_i); \; u(\overline{x}_i) = \frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\nu}{\nu - 2}}.$$

5. Оцінювання стандартної невизначеності вимірюваної величини:

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i)}; \quad u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2c_m c_k u(x_m, x_k)},$$

де $c_i = \dfrac{\partial y}{\partial x_i}$ – коефіцієнти чутливості; $u(x_m, x_k)$ – коваріація між результатами вимірювань m-ї та k-ї вхідних величин.

На шостому кроці потрібно оцінити ексцес вимірюваної величини з використанням формул (4.14), (4.15).

На останньому, сьомому, кроці виконують оцінювання розширеної невизначеності вимірюваної величини:

$$U(y) = k_p(\eta) \cdot u(y).$$

Значення $k_p(\eta)$ для рівнів довіри 0,95 і 0,9545 знаходять по формулам (E3) та (E4), відповідно.

Додаток F. Обґрунтування закону розповсюдження розширеної невизначеності

1. Постановка проблеми

Повторні спостереження вимірюваних величин проводяться для підвищення точності їх оцінки. Як правило, середнє арифметичне цих повторних спостережень береться як оцінка цих вимірюваних величин [2]. Слід зазначити, що середнє арифметичне є спроможною, незміщеною та ефективною оцінкою вимірюваної величини лише тоді, коли її функція щільності ймовірності (PDF) підкоряється нормальному закону [23].

Якщо вимірювана величина Y є просто окремою нормально розподіленою величиною X, яка оцінюється середнім арифметичним $\overline{x}$ n незалежних повторних спостережень із експериментальним стандартним відхиленням середнього значення $s(\overline{x})$, тоді PDF оцінки вимірюваної величини y можна описати як t-розподіл (PDF Стьюдента) з числом ступенів свободи (ЧСС) $\nu = n - 1$ [7].

Якщо вимірювана величина Y є функцією N нормально розподілених вхідних величин $X_1, X_2, ..., X_N$, $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$ і якщо кожна вхідна величина X_i, i=1, ..., N, оцінюється середнім арифметичним $\overline{x}_i$ n_i незалежних повторних спостережень з експериментальним середньоквадратичним відхиленням (СКВ) середнього значення $s(\overline{x}_i)$, то загалом PDF вимірюваної величини y можна приблизно описати як t-розподіл з ефективним ЧСС ν_{eff} [2, 23].

Проблема пошуку ефективного ЧСС не має точного розв'язку [23]. Наближені формули для ефективних оцінок ЧСС отримано в роботах Welch B.L. і Satterthwaite F.E. [24, 25] в сорокових роках минулого століття, коли чисельне моделювання не мало широкого застосування через відсутність комп'ютерів.

Тому потрібно було знайти вираз, який забезпечує найкраще наближення коефіцієнта покриття та ефективного числа степенів свободи.

Для досягнення поставленої мети вирішувалися такі завдання:

1) чисельне моделювання композиції (згортки) двох PDF Стьюдента з різною кількістю ступенів вільності ν_1 та ν_2 з співвідношенням СВ $\gamma = S_2/S_1$;

2) знаходження достовірних оцінок коефіцієнтів покриття *k* для композиціії PDF Стьюдента;

3) оцінка числа степенів свободи ν отриманої композиції.

2. Визначення коефіцієнтів охоплення композиції PDF Стьюдента

Моделювання *t*-розподілів та їх композиції було виконано методом Монте-Карло [7] з використанням веб-додатку для оцінки невизначеності вимірювання "NIST Uncertainty Machine" [26] або алгоритму Matlab TDIST [27]. Останній є достатньо швидким і точним чисельним алгоритмом для статистичних програм, які вимагають обчислення розподілу та квантилів лінійної комбінації незалежних *t* випадкових величин Стьюдента.

Використання даного алгоритму дозволило знайти коефіцієнт покриття для ймовірності p=0,95 для композиції двох PDF Стьюдента з ЧСС ν_1, ν_2, які змінюються від 2 до 20 для співвідношень СКВ γ, що дорівнюють 0,2; 0,6 і 1,0 [28].

Графіки цих залежностей наведені на рис. F1-F3. Усі вони мають вигляд низхідних функцій від ν_1, ν_2.

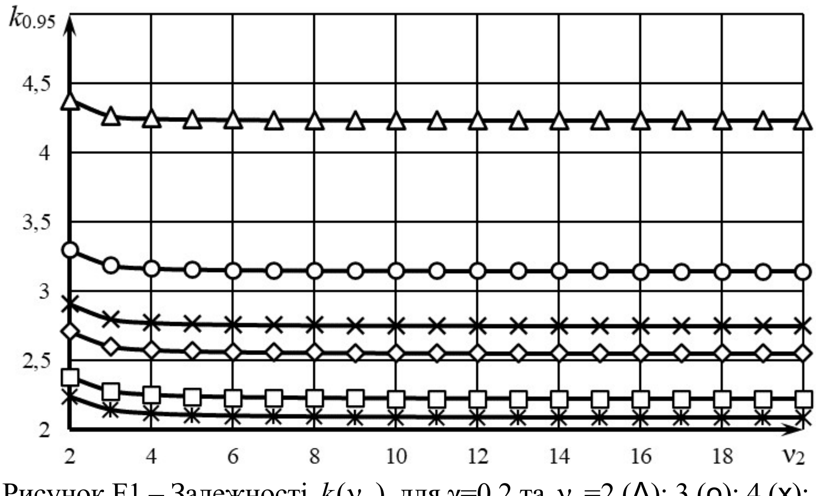


Рисунок F1 – Залежності $k(\nu_2)$ для γ=0,2 та ν_1=2 (Δ); 3 (o); 4 (x); 5 (◊); 10 (□); 20 (ж)

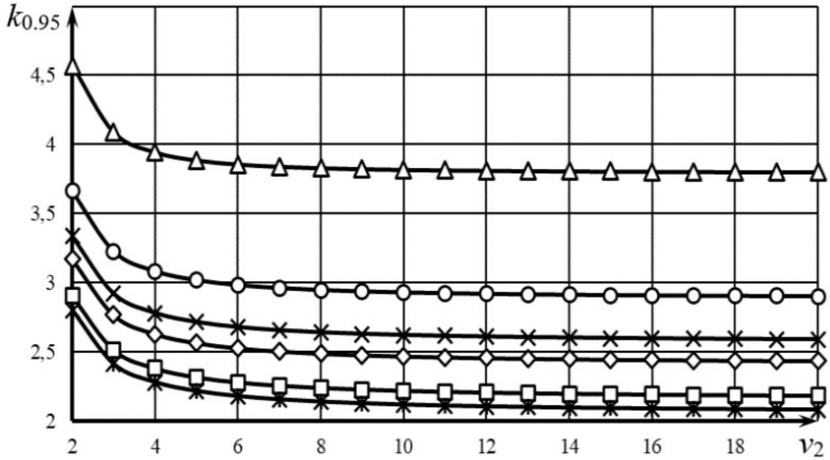


Рисунок F2 – Залежності $k(\nu_2)$ для γ=0,6 та ν_1=2 (Δ); 3 (o); 4 (x); 5 (◊); 10 (□); 20 (ж)

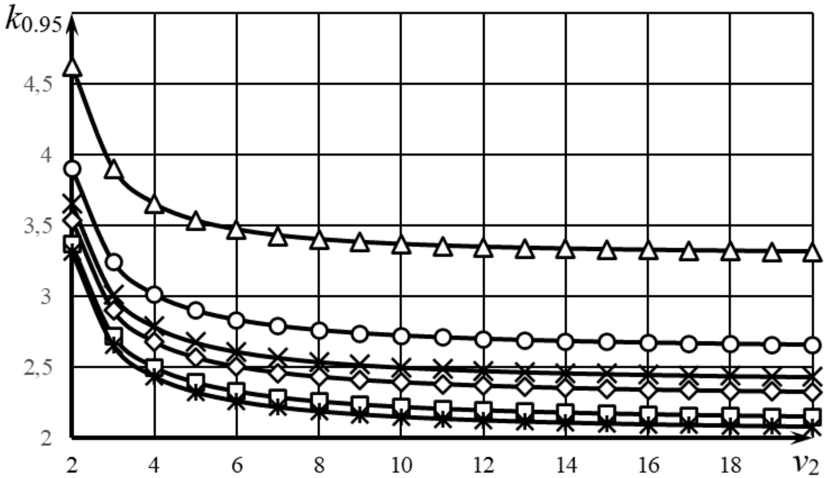


Рисунок F3 – Залежності $k(\nu_2)$ для γ=1,0 та ν_1=2 (Δ); 3 (o); 4(x); 5 (◊); 10 (□); 20 (ж)

Надійну оцінку коефіцієнта охоплення для композиції законів розподілу Стьюдента шукатимемо за формулою, запропонованою в [15]:

$$k_{app} = \frac{\sqrt{t^2_{0,95;\nu_1} S_1^2 + t^2_{0,95;\nu_2}(\nu_2) S_2^2}}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}} = \sqrt{\frac{t^2_{0,95;\nu_1} + t^2_{0,95;\nu_2}\gamma^2}{1+\gamma^2}} \;. \qquad \text{(F1)}$$

Залежності відносних похибок апроксимації δ_k від параметрів ν_1 і ν_2 визначають за формулою:

$$\delta_k = 100 \cdot \frac{k_{app} - k_{0,95}}{k_{0,95}} \text{ , \%.} \qquad \text{(F2)}$$

На рис. F4 наведено залежності максимальних відносних похибок апроксимації. Для γ=0,2 максимальна відносна похибка апроксимації отримана при ν_1=3; для γ=0,6 та γ=1,0 – при ν_1=2.

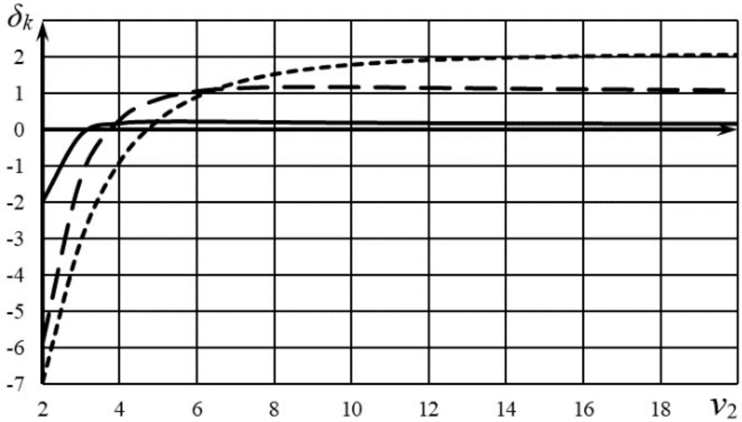


Рисунок F4 – Залежності максимальних відносних похибок апроксимації для γ=0,2 (——), γ=0,6 (- - -) та γ=1,0 (– – –)

Як видно з рис. F4, відносна похибка апроксимації δ_k зростає зі збільшенням γ і має максимум при γ=1,0. Крім того, значення δ_k зростає зі зменшенням ν_1, ν_2.

3. Визначення ЧСС композиції законів *t*-розподілу

Для того, щоб оцінити ЧСС результуючої згортки, необхідно обернено перетворити *t*-коефіцієнти в число ступенів свободи. Для цього спочатку знайшли апроксимацію залежності коефіцієнтів t-розподілу від NDF для рівня довірчої вірогідності p=0,95 [4]:

$$t_{0,95;\nu} = t_{0,95;\infty}\left[1+\frac{1}{0,822\nu - 0,87}\right], \qquad \text{(F3)}$$

де $t_{0,95;\infty} = 1,96$.

Похибка апроксимації для ν=2 не перевищує 4%, а для $\nu \geq 3$ – не більше ± 0,22%.

Після цього з виразу (F3) була отримана шукана емпірична залежність:

$$\nu = \frac{1}{0,822}\left[\frac{1,96}{t_{0,95;\nu} - 1,96} + 0,87\right]. \qquad \text{(F4)}$$

Залежність ЧСС композиції законів t-розподілу від ν_1 і ν_2 для різних співвідношень γ, знайдених запропонованим методом, наведена на рисунках F5-F7.

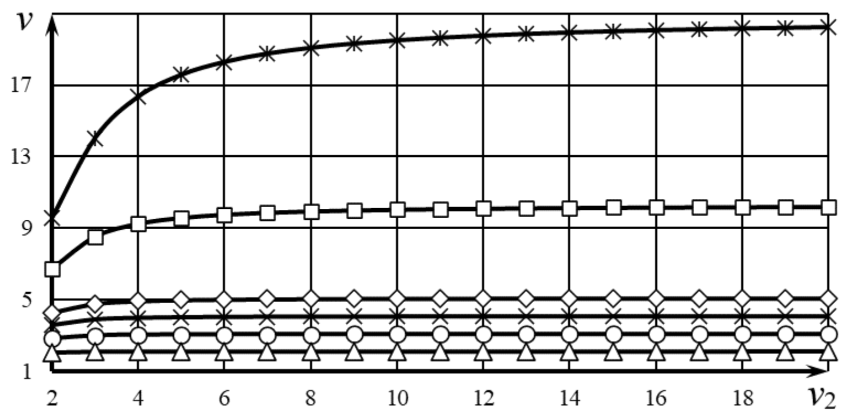


Рисунок F5 – Залежності $\nu(\nu_2)$ для γ =0,2 та ν_1=2 (Δ); 3 (o); 4(x); 5 (◊); 10 (□); 20 (ж)

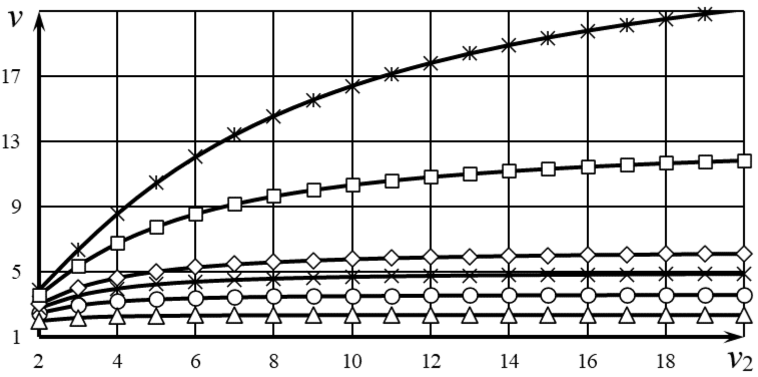


Рисунок F6 – Залежності $\nu(\nu_2)$ для γ =0,6 та ν_1 =2 (Δ); 3 (о); 4(х); 5(◊); 10 (□); 20 (ж)

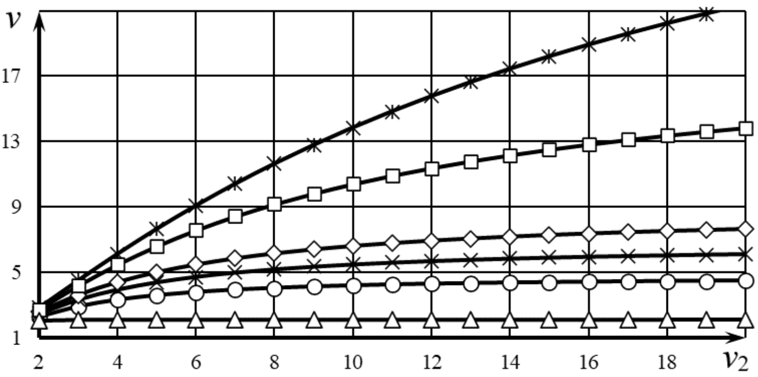


Рисунок F7 – Залежності $\nu(\nu_2)$ для γ =1,0 та ν_1 =2 (Δ); 3 (о); 4(х); 5(◊); 10 (□); 20 (ж)

Такі ж залежності, отримані за формулою Велча-Саттерсвейта [2]:

$$\nu_{eff} = \frac{(S_1^2 + S_2^2)^2}{\dfrac{S_1^4}{\nu_1} + \dfrac{S_2^4}{\nu_2}} = \frac{(1+\gamma^2)^2}{\dfrac{1}{\nu_1} + \dfrac{\gamma^4}{\nu_2}} \qquad \text{(F5)}$$

зображено на рисунках F8-F10.

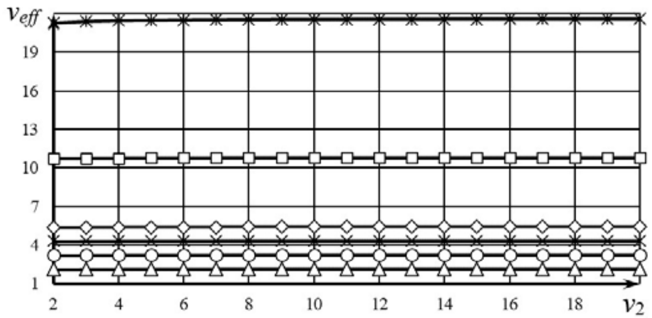


Рисунок F8 – Залежності $\nu_{eff}(\nu_2)$ для γ =0,2 та ν_1 =2 (Δ); 3 (о); 4(х);
5 (◊); 10 (□); 20 (ж)

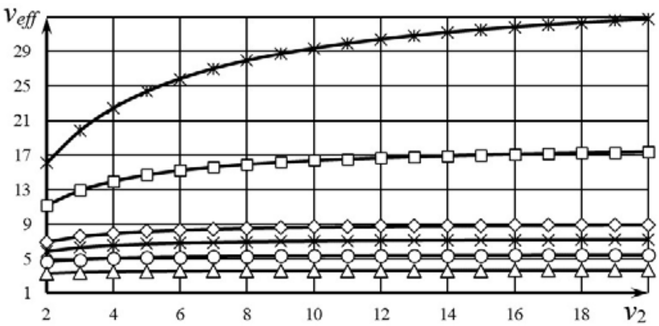


Рисунок F9 – Залежності $\nu_{eff}(\nu_2)$ для γ =0,6 та ν_1 =2 (Δ); 3 (о); 4(х);
5 (◊); 10 (□); 20 (ж)

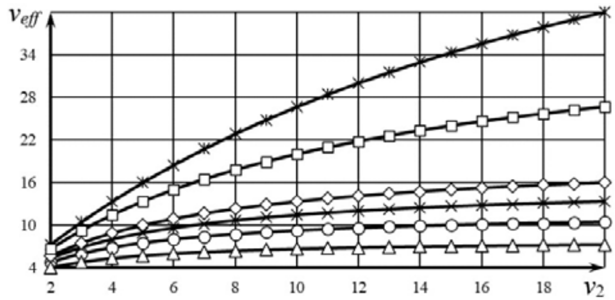


Рисунок F10 – Залежності $\nu_{eff}(\nu_2)$ для γ =0,2 та ν_1 =2 (Δ); 3 (о); 4(х);
5 (◊); 10 (□); 20 (ж)

Відносні похибки розрахунку ЧСС за формулою Велча-Саттерсвейта розраховуються за формулою:

$$\delta_\nu = 100 \cdot \frac{\nu_{eff} - \nu}{\nu}, \%. \qquad \text{(F6)}$$

Залежності похибки δ_ν від ν_1 і ν_2 для різних співвідношень γ наведені на рис. F11-F13.

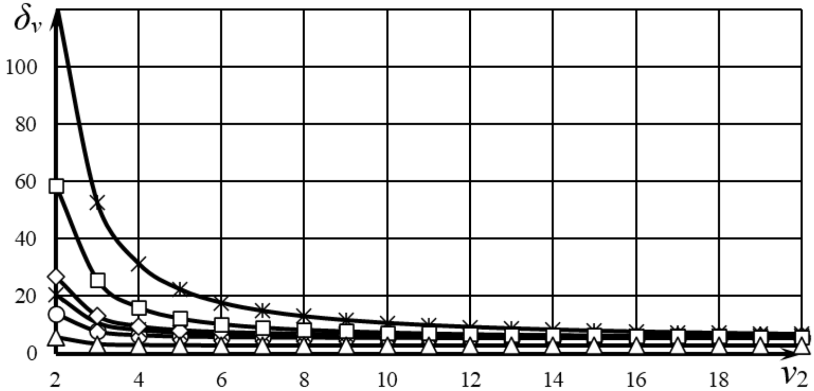


Рисунок F11 – Залежності $\delta_\nu(\nu_2)$ для γ =0,2 та ν_1 =2 (Δ); 3 (O); 4(x); 5 (◊); 10 (□); 20 (ж)

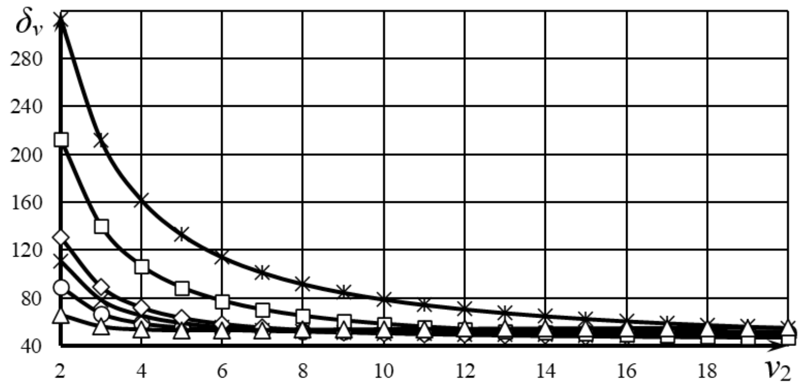


Рисунок F12 – Залежності $\delta_\nu(\nu_2)$ для γ =0,6 та ν_1 =2 (Δ); 3 (O); 4(x); 5 (◊); 10 (□); 20 (ж)

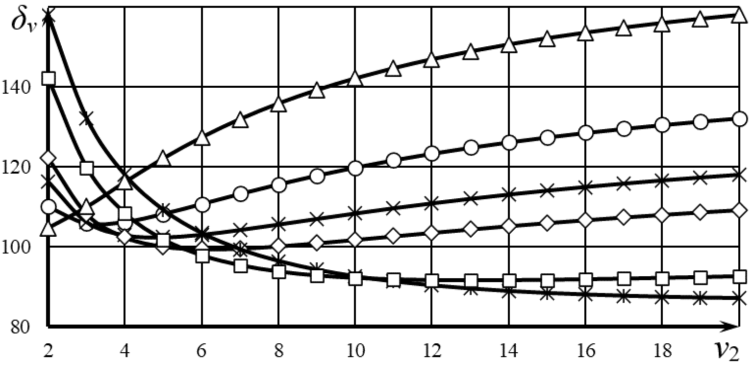


Рисунок F13 – Залежності $\delta_{\nu}(\nu_2)$ для γ =1,0 та ν_1 =2 (Δ); 3 (О); 4(х); 5 (◊); 10 (□); 20 (ж)

Оскільки коефіцієнти охоплення розраховуються в GUM [2] за формулою Велча-Саттерсвейта, то потрібно визначити похибку розрахунку k_{GUM} у цьому випадку. Відносні похибки апроксимації δ_{GUM} були розраховані за формулою:

$$\delta_{\mathrm{GUM}} = 100 \cdot \frac{k_{\mathrm{GUM}} - k_{0,95}}{k_{0,95}}, \% \tag{F7}$$

та показані на рис. F14-F16.

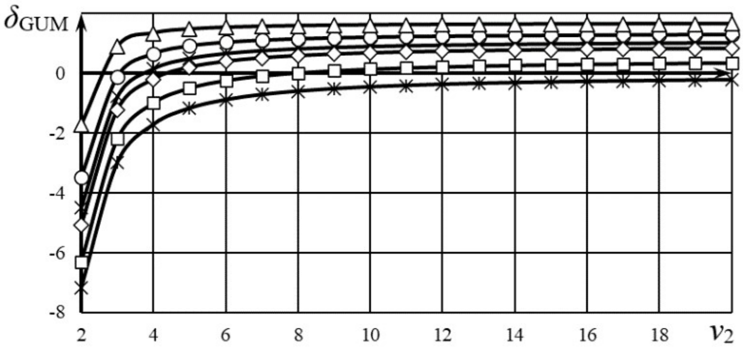


Рисунок F14 – Залежності $\delta_{\mathrm{GUM}}(\nu_2)$ для γ =0,2 та ν_1=2 (Δ); 3 (о); 4(х); 5 (◊); 10 (□); 20 (ж)

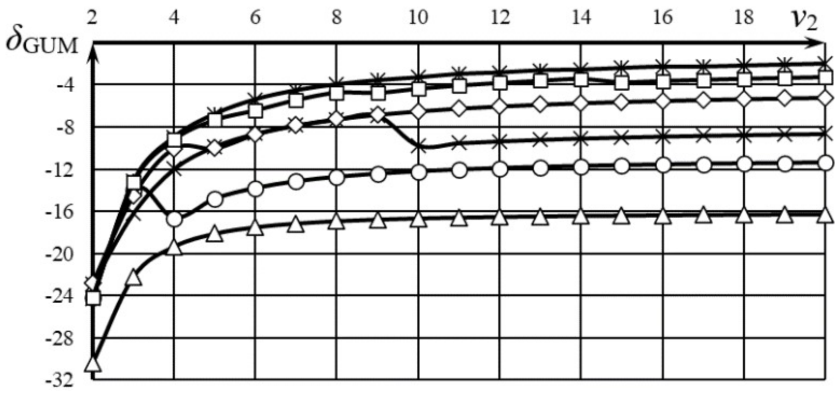


Рисунок F15 – Залежності $\delta_{GUM}(\nu_2)$ для γ =0,6 та ν_1=2 (Δ); 3 (о); 4(х); 5 (◊); 10 (□); 20 (ж)

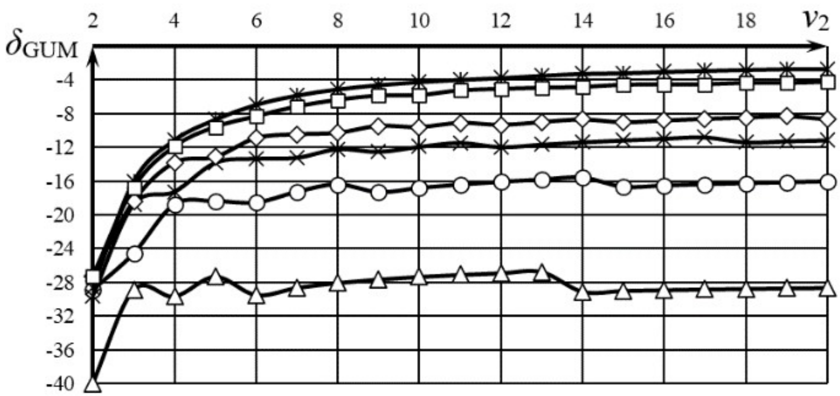


Рисунок F16 – Залежності $\delta_{GUM}(\nu_2)$ для γ =1,0 та ν_1=2 (Δ); 3 (о); 4(х); 5 (◊); 10 (□); 20 (ж)

Таким чином, відносні похибки оцінювання коефіцієнтів охоплення для випадкових похибок за формулою Welch-Satterthwaite можуть сягати до -40 відсотків, в той час, як відносні похибки оцінювання коефіцієнтів охоплення для випадкових похибок за формулою (F1), як видно з рис. F4 не перевищує ±2 % вже для числа степенів свободи розподілів Стьюдента $\nu \geq 2$.

4. Закон розповсюдження розширеної невизначеності

Отримані результати можуть бути використані для оцінки розширеної невизначеності для кількості повторних спостережень вхідних величин $n \geq 3$ на основі закону розповсюдження розширеної невизначеності (ЗРРН) [15, 22].

Вираз для розрахунку розширеної невизначеності для рівнів довіри $p = 0{,}95$ або $p = 0{,}9545$ в цьому випадку має вигляд:

$$U(y) = \sqrt{U_A^2(y) + U_B^2(y)}, \tag{F8}$$

де $U_A(y)$, $U_B(y)$ є розширеними невизначеностями типу A та B вимірюваної величини, відповідно. Тут:

$$U_A = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} t_{(p;\nu_i)}^2 c_i^2 \cdot s^2(\overline{x}_i)}, \tag{F9}$$

де $s(x_i)$ та c_i – СКВ середнього арифметичного та коефіцієнт чутливості i-ї вхідної величини відповідно; $t_{p;\nu_i}$ – коефіцієнт Стьюдента для $\nu = (n-1)$.

Розширена невизначеність типу B розраховується як

$$U_B = k_B \cdot u_B(y), \tag{F10}$$

де k_B – коефіцієнт покриття типу B, розрахований методом ексцесу [9] за формулами:

$$k_p = \begin{cases} 0{,}1085\eta^3 + 0{,}1\eta + 1{,}96, & \text{for } p = 0{,}95; \\ 0{,}12\eta^3 + 0{,}1\eta + 2, & \text{for } p = 0{,}9545; \end{cases} \tag{F11}$$

$u_B(y)$ – стандартна невизначеність вимірюваної величини типу B, розрахована як:

$$u_B(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 u_B^2(x_i)}. \tag{F12}$$

5. Аналіз точності ЗРРН

Проаналізуємо запропоновану методику оцінювання розширеної невизначеності. Для цього порівняємо значення розширеної невизначеності, отримані за допомогою ММК та ЗРРН для однакових початкових умов. Відносне відхилення значень шуканої величини при використанні ЗРРН визначимо за формулою:

$$\delta_{\text{ЗРРН}} = \left(\frac{U_{\text{ЗРРН}}}{U_{\text{ММК}}} - 1 \right) \cdot 100\% \,. \tag{F13}$$

У процесі обчислення будемо аналізувати ситуацію, що зводиться до двох джерел невизначеності: один з них визначається використовуваним ЗВТ, інформація про інструментальну невизначеність якого міститься в сертифікаті калібрування, а другий – розкидом показань цього ЗВТ при проведенні вимірювань.

У цьому випадку сумарна стандартна невизначеність вимірювань, оцінена відповідно до (F8)-(F10), буде дорівнювати:

$$U_{\text{ЗРРН}} = \sqrt{\left[t_{0,95;(n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]^2 + (k_B u_B)^2} \,. \tag{F15}$$

тут s – середнє квадратичне відхилення показань ЗВТ; n – кількість проведених багаторазових вимірювань; u_B – стандартна інструментальна невизначеність ЗВТ, яка одержана (за типом В) з сертифіката його калібрування; $k_B = 1{,}65$ для рівномірного та $k_B = 1{,}96$ – для нормального законів розподілу, який приписується u_B.

Позначаючи $\gamma = u_B / (s/\sqrt{n})$, отримуємо з (F15) наступний вираз:

$$U_{\text{ЗРРН}} = \sqrt{\left[t_{0,95;(n-1)} \right]^2 + k_B^2 \gamma^2} \,.$$

Розширена невизначеність $U_{\text{ММК}}$ обчислювалась з використанням веб-додатку для оцінки невизначеності вимірювання “NIST Uncertainty Machine” [26].

На основі розрахованих $U_{\text{ЗРРН}}$, $U_{\text{ММК}}$ для n=4 та n=10, рівномірного та нормального законів розподілу, який приписується u_B в залежності від $\gamma \in [0;8]$ були обчислені значення $\delta_{\text{ЗРРН}}$, які представлені на рис. F17.

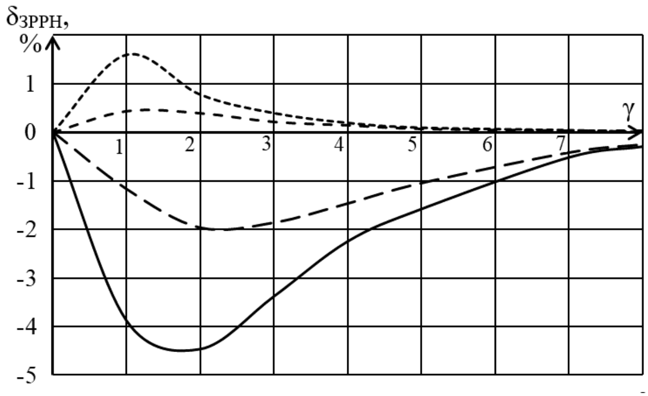


Рисунок F17 – Залежності відносних похибок апроксимації $\delta_{ЗРРН}$:

—— для рівномірного закону u_B та n=10;

— — для рівномірного закону u_B та n=4;

– – – для нормального закону u_B та n=10;

- - - для нормального закону u_B та n=4.

Таким чином, дослідження ЗРРН показує, що різниця між оцінками розширеної невизначеності, отриманими за допомогою ЗРРН, відрізняється від оцінок, отриманих за допомогою МКМ, не більше ніж на ±4,5%.

Додаток G. Перелік публікацій з прикладами оцінювання невизначеності вимірювань запропонованими методами

G1. Zakharov I., Botsiura O. Brikman A., Zakharov O. Evaluation of expanded uncertainty at glass thermometer calibration // Ukrainian Metrological Journal, 2019, No 4, 23-28. DOI: 10.24027/2306-7039.4.2019.195953.

G2. Zakharov I., Botsiura O., Semenikhin V. Measurement uncertainty evaluation by kurtosis method at calibration of electrical resistance standards using a comparator// Ukrainian Metrological Journal, 2020, No 1, pp. 12-16. DOI: 10.24027/2306-7039.1.2020.204166.

G3. Botsiura O.A., Zakharov I.P. Increasing the Reliability of Evaluation of Expanded Uncertainty in Calibration of Measuring Instruments //Measurement Techniques, 2020 Volume: 63, Issue: 6, pp. 414-420. DOI 10.1007/s11018-020-01803-2.

G4. Zakharov I.P., Botsiura O.A., Patsenko O.M. Measurement uncertainty evaluation at mass calibration // Ukrainian Metrological Journal, 2020, No 3, pp. 36-41. DOI: 10.24027/2306-7039.3.2020.216839.

G5. Zakharov I.P., Botsiura O.A., Tsybina I.Yu., Zakharov O.O. Measurement uncertainty evaluation at micrometer calibration // Ukrainian Metrological Journal, 2020, No 3a, pp. 196-201. DOI: 10.24027/2306-7039.3A.2020.220313.

G6. Zakharov I., Botsiura O., Semenikhin V., Fomenko V. Considering of the input quantities distributions in the procedure for measurements uncertainty evaluating on the example of resistance box calibration // Ukrainian Metrological Journal, 2020, No 4, pp. 3-8. DOI: 10.24027/2306-7039.4.2020.224189.

G7. Zakharov I., Neyezhmakov P., Botsiura O. Expanded Uncertainty Evaluation Taking into Account the Correlation Between Estimates of Input Quantities // Ukrainian Metrological Journal, 2021, No 1, pp. 4-8. DOI: https://doi.org/10.24027/2306-7039.1.2021.228134.

G8. Zakharov I., Botsiura O., Neyezhmakov P., Obtaining Uncertainty Estimates Compatible with Estimates of Monte Carlo Method // Measurement-2019: Proceedings of the 12th International Conference, Smolenice, Slovakia, 27-29 May 2019, pp. 47-50.

G9. Zakharov I.P., Neyezhmakov P.I., Botsiura O.A. Revision of GUM: the suggested algorithm for processing measurement results // 2019 IEEE 8th International Conference on Advanced Optoelectronics and Lasers (CAOL), 6-8 Sept. 2019, Sozopol, Bulgaria, pp. 632 – 635. DOI: 10.1109/CAOL46282.2019.9019421. Electronic ISSN: 2160-1534. Print on Demand(PoD) ISSN: 2160-1518.

G10. Zakharov I., Botsiura O., Zadorozhna I. Measurement Uncertainty Evaluation at Gauge Block Calibration // 2019 XXIX International Scientific Symposium “Metrology and Metrology Assurance” (MMA), 6-10 Sept. 2019, Sozopol, Bulgaria, pp. 19-22. DOI: 10.1109/MMA.2019.8936023.

G11. Zakharov I., Neyezhmakov P., Botsiura O. Expanded Uncertainty Evaluation Taking into Account the Correlation Between Estimates of

Input Quantities // Sensor and Measurement Science International Conference (SMSI 2020), 22-25 June 2020, Nuremberg, Germany, pp. 351-352. DOI 10.5162/SMSI2020/P4.7.

G12. Zakharov I., Serhiienko M., Chunikhina T. Measurement uncertainty evaluation by kurtosis method at calibration of a household water meter // Metrology and Metrology Assurance (MMA-2020): Proceedings of 2020 XXX International Scientific Symposium, Sozopol, Bulgaria, 7-11 Sept. 2020, pp. 83-86. DOI: 10.1109/MMA49863.2020.9254260.

G13. Zakharov I., Botsiura O., Semenikhin V. Method of kurtosis in estimating the measurement uncertainty during evaluation of the electrical resistance measures using a potentiometer // Ukrainian Metrological Journal, 2021, No 2, pp. 30-34. DOI: 10.24027/2306-7039.2.2021.236078.

G14. Zakharov I.P., Botsiura O.A., Neyezhmakov P.I. Study of approaches to determining the required number of multiple observations // Ukrainian Metrological Journal, 2022, No 3, 9-12. DOI: 10.24027/2306-7039.3.2022.269582.

G15. Igor Zakharov, Olesia Botsiura, Dimitar Diakov, Dariusz Świsulski. Peculiarities of Measurement Uncertainty Evaluation at Calibrating a Ring Gauge //MEASUREMENT 2023, Proceedings of the 14th International Conference, Smolenice, Slovakia. 29-31 May, 2023, pp. 122-125.

G16. Zakharov Igor, Botsiura Olesia, Zadorozhna Iryna, Semenikhin Valerii, Diakov Dimitar, Grokhova Ganna. Measuring instruments calibration: advanced realization of key elements // Metrology and Metrology Assurance (MMA-2023): Proceedings of XXXIII International Scientific Symposium, Sozopol, Bulgaria, 7-11 Sept. 2023 (Scopus), pp. 31-36.

G17. Zakharov I., Zadorozhna I., Świsulski D., Diakov D. Accounting for the distributions of input quantities in the procedure for the measurement uncertainty evaluation when calibrating the goniometer // Ukrainian Metrological Journal. 2023. No. 1. P. 34–38.

G18. Zakharov Igor, Semenikhin Valerii, Zakharov Oleksandr, Shevchenko Svitlana. Features of measurement uncertainty evaluation during calibration of digital ohmmeters // Ukrainian Metrological Journal. 2023. No. 2. P. 22–27.

ЗМІСТ

Підписано до друку 11.04.2024 р.
Формат 60x84 1/16. Папір офсет. Друк офсет.
Умов. друк. арк. 5,81. Авт. арк. 5,3. Тираж 100 прим.
Віддруковано в ФО-П Єфименко С.А.

У монографії викладено основні питання оцінювання невизначеності вимірювань. Наводяться недоліки реалізації базового алгоритму GUM. Розглядається байєсівський підхід до оцінювання невизначеності вимірювань та його чисельна реалізація методом Монте-Карло. Проводиться порівняння оцінок невизначеності, які одержуються з урахуванням базового алгоритму і за допомогою ММК. Описується метод ексцесів, який дозволяє отримати оцінки невизначеності вимірювань, зіставні з оцінками ММК. Розглядаються недоліки методу ексцесів. Пропонується закон розповсюдження розширеної невизначеності, що усуває ці недоліки. Описуються питання оцінювання невизначеності вимірювань при нелінійних модельних рівняннях. Наводяться алгоритми реалізації методу ексцесів при калібруванні засобів вимірювальної техніки.

Рекомендується науковим працівникам, викладачам, співробітникам калібрувальних та випробувальних лабораторій, аспірантам та студентам метрологічних спеціальностей.